डमार्गन

याचा

बीजगणित मू

यांचें मराठी भ.

कारनेल जार्ज रिट्सो ज

मुंबई खात्याचे चीफ इंजनेर

यांणीं

विष्णु सुंदर छत्रे, गंगाधर शास्त्री फडके

आणि

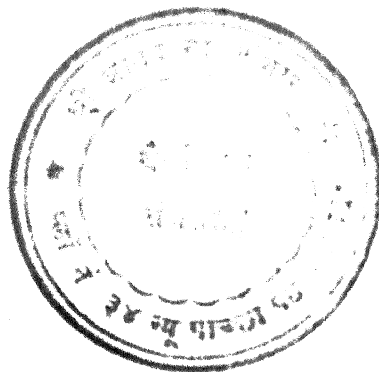
गोविंद गंगाधर फडके

यांचा साहाय्यानें केलें

दुसरी आवृत्ति.

मुकाम मुंबई माहे एप्रिल सन १८५१

मुंबईमध्यें अमेरिकन मिशन छापखान्यांत छापिलें, सन १८५१.



TO

THE HONORABLE GEORGE RUSSELL CLERK, K. C. B.

GOVERNOR OF BOMBAY.

One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded; this translation into Marathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Algebra, is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant,

GEORGE RITSO JERVIS.

Bombay, 15th April, 1851.

ELEMENTS OF ALGEBRA.

"What a benefite that onely thyng is, to haue the witte whetted and sharpened, I neade not trauell to declare, sith all en confesse it to be as greate as maie be. Excepte any witlesse pers ne thinke he maie bee to wise. But he that moste feareth that, is leaste in daunger of it. Wherefore to conclude, I see moare menne to acknowledge the benefite of nomber, than I can espie willying to studie, to attaine the benefites of it. Many praise it, but fewe dooe greatly practise it: onlesse it bee for the volgare practice, concerning Merchaudes trade. Wherein the desire and hope of gain, maketh many willyng to sustaine some trauell. For aide of whome, I did sette forth the firste parte of *Arithmetike*. But if thei knewe how farre this seconde parte, dooeth excell the firste parte, the would not accoumpte any tyme loste, that were imploied in it. Yea, thei would not thinke any tyme well bestowed, till thei had gotten soche habilitie by it, that it might be their aide in al other studies.—ROBERT RECORDE.

"Ce n'est point par la routine qu'on s'instruit, c'est par sa propre reflection; et il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raison de ce qu'on fait; cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense; et une fois acquise, elle ne se perd plus."—CONDILLAC.

बीजगणित



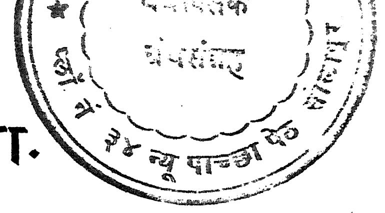
मूळपीठिका.

बुद्धि पाजवून तीक्ष्ण केली असतां, केवढा लाभ होईल, हें सांगत फिरण्याचें प्रयोजन नाहीं, कां कीं, तो लाभ बहुत मोठा आहे, असें सर्व लोक कबूल करितात. कोणी एकादा मूर्ख मनुष्य आपल्ये मनांत समजेल, कीं मी फार शाहाणा होईन, परंतु जो माणूस, मी अतिशाहाणा होईन, हें भय, जितकें जितकें धरितो, तितका तितका तो शाहाणपणापासून दूर रहातो- सारांश हाच, कीं गणित विद्येपासून लाभ होतो, असें पुष्कळ लोक मानितात; परंतु तो लाभ संपादायासाठीं शिकण्यास राजी, असे थोडे आढळतात. गणितविद्येस बहुत लोक वाखाणितात, परंतु व्यापार उदीम, अशे हलके कामाचे गरजेखेरीज, या विद्येस शिकणारे थोडे. अशा कामांत लोभानें प्रवासाचे श्रम घेण्यास ही, ते राजी होतात. अशा लोकांचा उपयोगासाठीं गणिताचा पहिला भाग तयार केला. परंतु हा दुसरा भाग पहिल्या भागापेक्षां किती उत्तम आहे, हें जर ते जाणतील, तर ते याजवर जो वेळ घालविला, तो फुकट गेला, असें कधींहि मानणार नाहींत. इतकेंच केवळ नाहीं, दुसऱ्या विद्यांचा अभ्यासाविषयीं उपयोगी पडे, अशी याविद्येंत निपूणता प्राप्त होईपर्यंत, आपला वेळ चांगला गेला, असेंहि ते मानणार नाहीं.

ज्ञानप्राप्ती स्वकष्टानें आणि स्वविचारानें होते. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून, केवळ पाठकरणें, हा ज्ञान प्राप्तीचा उपाय नव्हे. जें कांहीं करायाचें त्याचें कारण सांगण्याची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्यानें अवघड वाटतें, तथापि ती अभ्यासानें सोपी होते. आणि एकदा संवय झाली, ह्मणजे, ती कधीं सुटत नाहीं.

मुंबई

इश्वीसन्न १८५१



अनुक्रमणिका.

पृष्ठ

प्रवेशक · १

पहिला अध्याय.

एकवर्ण समीकरणाविषयीं · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ५१

दुसरा अध्याय.

अंकगणित चिन्हाहून भिन्न, अशा बीजगणित चिन्हांविषयीं · · ११५

तिसरा अध्याय.

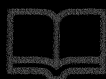
एकापेक्षां अधिक अव्यक्त परिमाणें आहेत, अशा एकवर्णसमीकरणाविषयीं · १४७

चवथा अध्याय.

घात आणि मूळप्रकाशक चिन्हें, आणि बीजानुरूप पद्धतींचा क्रमनियम, यांविषयीं · · · · · · · · · · · · · · · · · · · १६९

पांचवा अध्याय.

पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्णाचे पद्धतींचा सामान्य सिद्धांत; यामध्यें दुसऱ्या वर्णाचे समीकरणांचे अंकगणितरूप उलगडण्याचा विचार आहे · · · · · · · · · · · · · · · · · २२७



अनुक्रमणिका.

सहावा अध्याय.

पृष्ठ

नियत आणि अनियत परिमाणांविषयीं · · · · · · · · · · · · · २६५

सातवा अध्याय.

बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फळें यांचे प्रतवार रचनेविषयीं, भागाकाराची रीति · · · · · · · · · · · · · · · · २८९

आठवा अध्याय.

श्रेणी आणि अनियमित गुणकांविषयीं · · · · · · · · · · · · ३०५

नववा अध्याय.

अंकगणितांतील बरोबरी शब्दार्थाहून भिन्न, अशा बीजगणितांतील बरोबरी शब्दाचे अर्थाविषयीं · · · · · · · · · · · · · · ३२४

दहावा अध्याय.

फङ्शनगणिताविषयीं · ३३५

अकरावा अध्याय.

द्वियुक्पदसिद्धांताविषयीं · · · · · · · · · · · · · · · · · · ३४०

बारावा अध्याय.

घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयीं · · · · ३५७

तेरावा अध्याय.

गणितकृति सोपी करण्यासाठीं लाग्रतम कामांत आणण्याचा रितींविषयीं · ३७३



बीजगणित मूळपीठिका.

प्रवेशक.

जो कोणी बीजगणित शिकायास इच्छील, त्याला अगोधर अंकगणिताची चांगली माहिती असावी, आणि तो खचित व्यवहारी आणि दशांशअपूर्णांकांत पक्का जाणता असावा. एवढें ज्ञान नसेल तर त्याणें आरंभीं तें शिकून घ्यावें हेंच बरें, कां कीं त्याशिवाय बीजगणित शिकण्यास दुसरा कांहीं सुगम मार्ग नाहीं.

अंकगणिताचीं कामें, **चिन्हांनीं** होतात. अंक ह्मणजे भलत्ये परिमाणाचें चिन्ह आहे; तें परिमाण कोणत्ये जातीचें आहे, तें तो अंक दाखवीत नाहीं. जर कोणी मनुष्य आपल्येपाशीं मेंढरें किती आहेत, त्यांची गणना खड्यांनीं करितो, तेव्हां ते खडे त्या मेंढ्रांचे संख्येचें चिन्ह आहे. ही रीति फार लांब आणि श्रमाची आहे, यास्तव हल्लीं, अंकांची संख्या जाणायासाठीं, कागदावर अनेक तऱ्हेचीं चिन्हें करितात; आणि जेव्हां १ अशा चिन्हाचा अर्थाचा नेम ठरविला, तेव्हां त्यावरून दुसऱ्या प्रत्येक चिन्हाचा अर्थ ठरवितां येईल. जेव्हां लांबीविषयीं विचार करितों, तेव्हां, इच्छेप्रमाणें, भलती कांहीं लांबी घेऊन, तीस एक ह्मणतों. व्यवहारांत तो एक अनेक वस्तूंचा मागें विशेषणरूपानें लागतो; जसें एक हात, एक कोस; परंतु अंकगणितांमध्यें त्या एकानें गणना होती, तेव्हां तो नुसता १ आहे. आतां + या चिन्हास वहिवाटींत आणिलें, आणि असें मानिलें कीं जेव्हां दोन अंकांमध्यें + हें चिन्ह ठेविलें, तर असें जाणावें, कीं त्या दोन परिमाणांची बेरीज घेण्याचें चिन्ह आहे. जसें, जर

— ह्या लांबीचें चिन्ह १ आहे,

तर — — ह्या लांबीचें चिन्ह १+१ आहे.

१+१ याचें संक्षेपचिन्ह (२) घेतों ; ह्मणजे हें चिन्ह, दोन, ही संख्या दाखवायास नवें कल्पित घेतलें आहे. तसें २+१ याचें संक्षेपचिन्ह (३) तीन घेतों; तसें ३+१ याचें संक्षेपचिन्ह (४) चार घेतों; याप्रमाणें पुढेंहि.

जेव्हां १,२,३, इत्यादिकांचा अर्थ १कोस, २कोस, ३कोस, इत्यादि; अथवा १शेर, २शेर, ३शेर, इत्यादि असेल, तेव्हां त्या अंकांस **विशेषणांक** ह्मणतात. परंतु १,२,३, इत्यादि विशेष्य वस्तूंचे अंक अशी कल्पना न केली, जसें, **साहा आणि चार मिळून दहा होतात,** तेव्हां त्या अंकांस **केवळ अंक** ह्मणतात. गणितपुस्तकांत शिकणारास केवळ अंकांची ओळख होती; विशेषणांक आणि केवळ अंक, या दोहोंमध्यें जो भेद आहे, तो त्यास उघडा समजत नाहीं. समजातीय एकंचा विशेषणांकांनीं, गणितांमध्यें, किती कृती होतात? **केवळ मिळवणी आणि वजाबाकी.** कोसांस कोस मिळवितां येतात, अथवा कोसांतून कोस वजा करितां येतात. गुणाकारांत १,२,३, इत्यादि अंकांमध्यें कांहीं नव्ये तऱ्हेचें ध्वनित होतें; तें असें कीं, कांहीं काम **वारंवार** करायाचें, त्यास तेवढ्या **वेळा** ह्मणतात. ६ कोस ५ **वेळा** घे. यांत एकंचा दोन जाती आहेत; ह्मणजे एक एकं १ कोसाचा दर्शक आणि दुसरा एकं १ वेळेचा दर्शक, गुणाकारांत अशा दोन एकंमांतील, एक तरी अगत्य **वेळेचा** दर्शक असला पाहिजे; आणि ६ कोस ३ **कोसांनीं** गुणावे, असें ह्मणणें हें फार अयोग्य आहे. ६ कोस ३ कोस **वेळा** घे यापासून काय समजेल? कांहींच समजणार नाहीं.

परंतु या पुढील प्रश्नावर कांहीं विचार कर. **जर कापडाचे एक गजाला ५ रुपये पडतात, तर १२ गजांस किती पडतील?** याचें उत्तर जाणणें, तर १२ **गज** ५ **रुपयांनीं** गुणितात कीं काय? नाहीं. कारण अशा रितीनें गुणाकार होत नाहीं. या प्रश्नास उलगडून उत्तर काढण्यासाठीं, याप्रमाणें कृति केली पाहिजे; सांगीतलें आहे कीं प्रत्येक गजाची किंमत ५ रुपये आहे; तर जेवढ्या **वेळा** कापड विकणारा एक एक गज, वारंवार मोजून देतो, तितके **वेळा** विकत घेणारानें, वारंवार, ५ रुपये दिले पाहिजेत; ह्मणजे तो ५ रुपये १२ **वेळा** देतो. यावरून मुख्यत्व वेळांवर आहे.

भागाकारांत असी कल्पना आहे, कीं कांहीं पुनःपुनः करायाचें

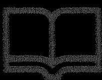
हाच, कीं ३ कोस किती **वेळा** पुनःपुनः घ्यावे, असे कीं १८ कोसांबरोबर होतील; परंतु जर याप्रमाणें ह्मटलें, कीं **१८ कोस ३ नीं भाग**, तर अर्थ हाच, १८ कोस ३ समभागांत विभागून, त्या प्रत्येक समभागांत किती कोस आहेत हें शोधायाचें आहे.

१८ कोस ३ **कोसांनीं** भागिले असतां ६ येतात; ह्मणजे अर्थ हाच कीं १८ कोस पुरे होण्यासाठीं, ३ **कोस** पुनः पुनः ६ **वेळा** घेतले पाहिजेत.

१८ **कोस** भागिले ३ नीं, ह्मणजे ६ **कोस** येतात; अर्थ हाच कीं, जर १८ कोस ३ **समभागांत** विभागिले, तर प्रत्येक समभाग ६ **कोसांबरोबर** आहे. वरचे दोन उदाहरणांत, जर केवळ अंकांनीं कृति केली, तर दोहोंचें उत्तर एकच होतें; १८ भागिले ३, ह्मणजे ६.

दुसरा नवा एक प्रश्न करितों. १२ गजांमध्यें ८ गज किती वेळा जातात? एक वेळेपेक्षां अधीक आणि दोन वेळांपेक्षां कमी हें उत्तर आहे, हेंहि उत्तर बरोबर पुरें नाहीं, कां कीं पुनःपुनः वेळांचा भागांची कल्पना अजून बरोबर समजांत आली नाहीं. आतां मनांत आण कीं एक यंत्र आहे, ज्याचे अवयवांचें चलन उड्या मारीत मारीत होतें, आणि त्याचा प्रत्येक उडींत आठ गजांचें काम होतें, आणि त्याचानें एक पूर्ण उडीपेक्षां कमी उडी मारवत नाहीं, ह्मणजे उडी मारील तर बरोबर आठ गजांचीच मारील नाहीं तर कांहींच नाहीं, तेव्हां या यंत्राची एक एक उडी वेळेचा दर्शक आहे असें मानून वेळा हा शब्द एथें कामांत घेतला आहे. यापासून उघड समजतें, कीं अशा यंत्रावयवानें ८ आणि १६ गज समभागांचे उडीमध्यें, असें १२ गजांवर त्याचानें उभें राहवत नाहीं. परंतु, आतां कल्पना कर, कीं हें यंत्र एक पळांत बरोबर ८ गज चालतें. तर असें लिहिलें कीं एक एक उडी ८ गजांबरोबर आहे, तर १२ गज ह्मणजे एक उडी आणि एक अर्धी उडी होईल. तशाच रितीनें १२ गजांमध्यें ८ गज हे **एक वेळा आणि अर्ध वेळा** आहेत.

अंकगणितांमध्यें एक अपूर्णांक दुसरे अपूर्णांकानें भागावा असें असेल, तर या पुढील उदाहरणापासून त्याचा अर्थ कळेल; उदाहरण,



$\frac{२}{३}$ यांस $\frac{५}{७}$ यांणीं भागिलें तर $\frac{१४}{१५}$ होतात; अथवा $\frac{२}{३}$ मध्यें $\frac{५}{७}$, १ वेळेचा $\frac{१४}{१५}$ जातो.

हीं पुढील उदाहरणें शिकणारानें मनांत विचार करून ठसवून घ्यावीं.

जर पूर्ण १ दिवसांत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ मिळवितो, तर एक रुपयाचे $\frac{२}{३}$ एक दिवसाचे $\frac{१४}{१५}$ शांत मिळवील.

जर एक या अंकाचा अर्थ फिरविला, असा कीं, जो $\frac{५}{७}$ होता तो हल्लीं १ आहे, तर जो $\frac{२}{३}$ होता तो हल्लीं $\frac{१४}{१५}$ होईल.

जर अ रेघेचे $\frac{५}{७}$, ब रेघेचे बरोबर आहेत, तर अ रेघेचे $\frac{२}{३}$ ब रेघेचे $\frac{१४}{१५}$ होतील.

वर सांगीतलेलीं उदाहरणें बरोबर पक्कीं समजलीं पाहिजेत, अशे जातीचीं उदाहरणें मनांत पक्की समजून ठसलीं नाहींत तोंपर्यंत बीजगणित शिकणारांस आरंभीं तें फार कठीण आहे असें वाटतें. जें वर लिहिलें ते ध्यानांत आलें नाहीं, तर निश्चयें समजावें कीं शिकणाराला अंकगणिताची पुरी माहिती नाहीं, तेव्हां त्यास या बीजगणिताचे पुस्तकापासून कसा लाभ होईल?

अंकगणिताचा अंक चिन्हामध्यें **नियमितसंबंध** आहे; उदाहरण, २+२ हे नेहेमी ४ आहेत, हीं अंकचिन्हें कोस, गज, बिघे, इत्यादि कोणत्याहि वस्तूंचीं असोत. **बीजामध्यें** अंकचिन्हस्थळीं अक्षेरं घेतात, परंतु त्यांचा परस्पर नियमित संबंध नाहीं. जसें अंकगणितांमध्यें १, २, ३, इत्यादि अंकचिन्हांनीं कोणत्याहि कृतीपासून जों निश्चितार्थ निघतो तो निश्चितार्थ, अनेक विशेष, १ गज, २ गज, किंवा १ पळ २ पळें इत्यादि वस्तूविषयीं बरोबर एकसारिखा आहे; तशा रितीनें बीजगणितांत अंकांचा साधारण गुणावर कल्पना करितों, आणि त्या कल्पनांपासून जो निश्चितार्थ उत्पन्न होतो, तो सर्व अंकांवर बरोबर सारखाच लागू पडतो. हें बीजगणिताचें मोठें एक अंग आहे, आणि शिकणाराला या अंगानें बीजगणित येण्याची योग्यता येईल.

परंतु ही व्याख्या थोड्या शब्दांनीं सांगीतली, ही जो थोडें बहुत बीजगणित शिकलेला असेल, त्यास मात्र समजेल. जो मनुष्य कोणतीहि विद्या शिकायास इच्छितो, त्यास जर त्या विद्येविषयीं कांहींच माहीत नाहीं, तर त्यास त्या विद्येची व्याख्या थोड्या शब्दांनीं समजावि-

(८) एकं घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं त्यास (८) वेळा घेतला तर पूर्ण एक एकं होईल, ह्मणजे तो एकंचा (८) वा भाग असावा. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं १ मिळीव; तर ८+१ ह्मणजे ९ होतील आणि १/८+१ ह्मणजे १ १/८ आहे. पाहा, प्रथम अंक ह्मणजे ९, यामध्यें दुसरा अंक ह्मणजे १ १/८, हा बरोबर (८) वेळा जातो. एकंचे (२/३) घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं, एक वेळेचे (२/३) घेतले असतां पूर्ण १एकं होईल; तर एथें तो अपूर्णांक १ १/२ होईल. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं एक मिळीव, तर १ २/३ आणि २ १/२ होतील. यांतील प्रथम अंकांत ह्मणजे १ २/३ शांत, दुसरा अंक ह्मणजे २ १/२, हा बरोबर (२/३) वेळा जाईल. हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा, त्यांमध्यें इच्छेप्रमाणें भलते कांहीं पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घालावे.

( ) एकं घे आणि असा पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घे कीं, जो वारंवार ( ) वेळा घेतला तर, पूर्ण एक एकं होईल. नंतर त्या दोहोंस १ मिळीव; तेव्हां प्रथमाचे बेरिजेंत दुसऱ्याची बेरीज ( ) वेळा किंवा वेळेच्या भाग जाईल.

हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा,

( )	पूर्ण किंवा अपूर्णांक, जो वारंवार ( ) वेळा घेतला तर पूर्ण एकं होतो.	पहिल्ये अंकास एक मिळविला.	दुसऱ्या अंकास १ मिळविला.	( )वेळा तिसऱ्या कोष्टकांतील अंकांत चवथ्या कोष्टकांतील अंक जातो.
७	१/७	८	१ १/७	७
१/३	३	१ १/३	४	१/३
२ १/४	४/९	३ १/४	१ ४/९	२ १/४
१/२०	२०	१ १/२०	२१	१/२०
१	१	२	२	१



या कोष्टकांत १ भागिला प्रथम आसनांतील पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें, इतक्याबरोबर दुसऱ्या आसनांतील पूर्ण किंवा अपूर्णांक आहे; अथवा एकांत पहिल्या आसनांतील अंक किती वेळा जातो तो वेळांक दुसऱ्या आसनांतील अंक दाखवितो, असा संबंध या दोन आसनांत आहे. उदाहरण, जर प्रथम आसनांतील संख्येस

अंक ह्मणतात,

तर दुसरे आसनांतील संख्या, १ भागिली **अंकानें** इतकी आहे.

आणि प्रथम आणि पांचव्या आसनांतील अंकांचें ऐक्य जें ध्यानांत येतें, तें या पुढील रितीप्रमाणें सांगतां येईल;

अंकास १ मिळवून त्या बेरिजेस, **अंक जितके वेळा** १ मध्यें **जातो त्यांत १ मिळवून त्या बेरीजेनें** भागिलें, तर तो भागाकार **अंकच** होईल.

वर सांगीतलेली गोष्ट सोईकरितां अधिक संक्षेपानें सांगतां येती, **अंक** ह्मटला तर भलता कांहीं अंक घेतां येतो, आणि **इच्छे-प्रमाणें त्या अंकाचे** जागीं भलतें कांहीं चिन्ह घेतां येतें, तर त्या चिन्हाविषयीं मूळाक्षरांतून भलतें कांहीं अक्षर घे, मनांत आण, कीं त्या अंकाचें चिन्ह एथें **अ**, घे. वर सांगीतल्याप्रमाणें + हें चिन्ह मिळवणीचें आहे असें जाण, आणि एक अंक दुसऱ्या अंकास भागायास, जसें अंकगणितामध्यें लिहितात, तसें लिहावें, ह्मणजे भाज्य वर आणि भाजक खालीं आणि त्यांचामध्यें रेघ. आणि = या चिन्हानें असें समजावें कीं जो अंक त्याचे पुढें आहे, तो त्याचे दुसरे बाजूचे मागल्ये अंकाबरोबर आहे. तेव्हां वर सर्व अंकांचा सामान्य गुण जो सिद्ध करून दाखविला तो याप्रमाणें अक्षरचिन्हांनीं दाखवितां येतो;

$$\frac{अ+१}{\frac{१}{अ}+१}=अ$$

आतां या विद्येचा प्रथम भागाची व्याख्या सांगायास आरंभ करितों,

१ व्याख्या. या विद्येविषयीं, हिंदुलोकांमध्यें, सर्वांपेक्षां प्राचीन पुस्तक, जें हल्लीं सांपडतें, तें संस्कृत भाषेंत, **भास्कराचार्य** या नामें पुरुषानें केलें, त्यास **बीजगणित** ह्मणतात. त्याचा काळ सुमारें इश्वी सन्न ११५० आहे.

२ व्या०. अंकास अक्षरानें दाखवितां येतें, आणि पुढें समजांत येईल कीं तो, इच्छेप्रमाणें, भलता कांहीं सामान्य अंक असेल; किंवा तो कांहीं अव्यक्तविशेष अंक असेल, त्याचे जागीं, व्यक्त अंक होईपावेतों, अक्षरचिन्हानें तो दाखविला जातो; अथवा तो कांहीं व्यक्त पूर्ण किंवा अपूर्णांक असेल, ज्याचें वारंवार काम पडतें, याजकरितां कांहीं संक्षेप अक्षरचिन्हांनीं लिहायास जोईस पडतें. म्हणजे p या चिन्हास पि, आणि e या चिन्हास इ, हीं दोन अक्षरें इंग्लिश भाषेंतून दोन विशेष निश्चितार्थ स्थळीं लिहितात, ते निश्चितार्थ पुरे दाखवायास अशक्य, परंतु सुमारानें ३·१४१५९२७ आणि २·७१८२८१८ यांचे जवळ जवळ आहेत.

३ व्या०. जीं अक्षरें कामांत आणितात तीं बाळबोध लिपीचीं मूळ अक्षरें आहेत, इंग्रेजी भाषेंत इटालिक् लहान अक्षरें घेतात, आणि तीं कळायासाठीं एथें लिहून दाखवितों.

मूळ अक्षरें.

इंग्रेजी		उच्चार	बाळबोध	इंग्रेजी		उच्चार	बाळबोध
A	*a*	ए	अ	*N*	*n*	एन	न
B	*b*	बी	ब	*O*	*o*	ओ	ओ
C	*c*	सी	क	*P*	*p*	पी	प
D	*d*	डी	ड	*Q*	*q*	क्यु	क
E	*e*	ई	ई	*R*	*r*	आर	र
F	*f*	एफ	फ	*S*	*s*	एस	स
G	*g*	जी	ग	*T*	*t*	टी	ट
H	*h*	एच	ह	*U*	*u*	यु	यु
I	*i*	ऐ	ऐ	*V*	*v*	वि	व
J	*j*	जे	ज	*W*	*w*	डब्ल्यु	व
K	*k*	के	के	*X*	*x*	एक्स	क्ष
L	*l*	एल	ल	*Y*	*y*	वै	य
M	*m*	एम	म	*Z*	*z*	जेड	झ

४ **व्या०. पूर्णांक** आणि **अपूर्णांक** यांस सर्वदा अंक ह्मणतात. व्यवहारी बोलण्यांत $२\frac{१}{२}$ यांस अंक ह्मणत नाहीं, परंतु बीजगणितांत त्यांस **अंक ह्मणतात**; जर $२\frac{१}{२}$ आणि २,३,४, इत्यादि या दोहोंमध्यें फेर काय तो दाखवायाचें प्रयोजन असेल, तर प्रथम $२\frac{१}{२}$ यांस **अपूर्णांक** ह्मणतात, व दुसरे २,३,४, यांस **पूर्णांक** ह्मणतात.

बहुधा ० या चिन्हास अंक ह्मणतात, त्याचा अर्थ **शून्य** आहे, ह्मणजे तें कांहीं महत्व किंवा परिमाणाचा अभाव सुचवितें. जसें, अ, यांतून ब वजा केला तर काय राहील? आणि असें विचारिलें असतां कळलें, कीं अ आणि ब एकेच अंकाचे ठिकाणीं घेतले आहेत, तर, उत्तर हेंच आहे, कीं **कांहीं अंक बाकी राहत नाहीं, ह्मणजे शून्य राहतें.** असे जातीचे प्रश्नावरून जेव्हां कांहीं राहिलें नाहीं असें ह्मणतात, तेव्हां प्रश्नाचे उत्तरासाठीं ० असें चिन्ह लिहितात, ह्मणून शून्य अंकाप्रमाणें रूप धरितें.

५ **व्या०.** हें पुढील चिन्ह + **अधिकाचा** अर्थ दाखवितें, आणि जेव्हां दोन अंकांचे किंवा अक्षरांचे मध्यें हें चिन्ह लिहिलें असतें, तेव्हां दुसरी रकम पहिल्ये रकमेशीं **मिळवायाची** आहे असें दाखवितें. जसें, अ+ब यास अ **अधिक** ब ह्मणतात, याचा अर्थ हाच, कीं अ या अक्षराचे जे अंक असतील, ते ब अक्षराचे अंकांशीं मिळवायाचे आहेत.

नुसता + अ, त्याचा अर्थ केवळ अ शून्याशीं मिळवावा अथवा ०+ अ असा होतो.

६ **व्या०.**– या चिन्हास **उणें** ह्मणतात, त्याचा अर्थ **कमी करणें**, ह्मणजे दुसरा अंक पहिल्ये अंकांतून वजा करायाचा आहे असा होतो. जसें, अ–ब यास अ **उणा** ब ह्मणतात, ह्मणजे अ, बनें कमी करायाचा अथवा अ यांतून ब वजा करायाचा आहे.

जेव्हां अ, ब पेक्षां उणा आहे, तेव्हां हें वरचें उदाहरण अशक्य आहे, कां कीं जी अशी कृति होऊं सकत नाहीं ती करायास तें सांगतें. जसें, ३–६ ही कृति अशक्य आहे. अशे जातीचे उत्तराचा अर्थ काय आहे तो कल्पनेनें पुढें शोधला जाईल, अशी कृति अशक्य आहे ह्मणून, त्याचा अशक्यपणा कसकशे जातीचे अयुक्तीनें होतो, हेंहि पुढें शोधून कळेल.

७ **व्या०.** हें पुढील चिन्ह × **गुणाकार** दाखवितें, त्याचा अर्थ

असा आहे कीं प्रथम अंकामध्यें जितके एकं किंवा एकंचे भाग असतील, तेवढे **वेळा** किंवा **वेळांचा** भाग दुसरा अंक घेण्याचा आहे. जसें, अ×ब यास अ **गुणिला** ब असें ह्मणतात. आणि अ वेळा ब घ्यावा असें हें चिन्ह सुचवितें. जसें, $१\frac{१}{२}$ × ६ ह्मणजे ६ हे एक वेळा आणि एक अर्धी वेळा ह्मणजे ९ घ्यावयाचे आहेत. अब ही पद्धती अ आणि ब यांचा गुणाकार दाखविती; आणि या दोन अक्षरांस गुणाकाराचे **गुण्यगुणक** ह्मणतात, आणि तीं अक्षरेंहि परस्पर **गुणक** आहेत. ०×अ आणि अ×० हीं दोन्हीं ० असलीं पाहिजेत; कां कीं अ कांहीं वेळा अथवा वेळेचा भागहि न घेतला, तर कांहींच परिमाण होत नाहीं, आणि ०, कितीहि वेळा वारंवार घेतलें, तर कांहींच फळ उत्पन्न होत नाहीं. नवे शिकणारे वरचे या गोष्टीविषयीं नेहेमी चुकतात, यास्तव, त्यांचे स्मरणांत या गोष्टीचा निश्चितार्थ ठसायासाठीं, हीं दोन पुढील कृत्यें उदाहरणासाठीं सांगतो. त्यांचें उत्तर स्पष्ट उघड आहे, आणि तीं उत्तरें बीजगणितरूपानें दाखवितां येतील.

कितीएक पेट्या आहेत, त्या प्रत्येक पेटींत कांहींच भरलें नाहीं, तर सर्वांत किती भरलें असेल?

जर अ, हें अक्षर पेट्यांची संख्या दाखवितें, तर ० वारंवार अ वेळा घेतलें, अथवा अ×०, तर केवळ शून्य होतें.

एक पेटी आहे, ती सोन्यानें भरलेली आहे, परंतु त्यांत अला कांहीं भाग नाहीं; तर त्यांत अचें काय आहे?

जर, प, हें अक्षर पेट्यांत जितके सोन्याचे शेर आहेत, ते दाखवितें, तर अचा भाग ०×प, ह्मणजे ० आहे; ह्मणजे कांहींच नाहीं.

नवे शिकणारे अशी चूक करितात याचें कारण असें आहे, कीं **गुणिला नाहीं**, ह्मणजे कांहीं **उणा केला नाहीं**, किंवा त्याचें **रूप अगदीं बदललें नाहीं**, असें मनांत आणून चूक करितात; परंतु अपूर्णांक गणितांमध्यें आणि बीजगणितांमध्यें **गुणाकार** ह्मटला, तर हाच अर्थ धरिला पाहिजे, कीं अमुक वेळा किंवा **वेळांचा भाग** वारंवार घ्यावयाचा आहे. जर कोणताहि अंक **अगदींच गुणिलेला नसला**, तर कांहींच अंक उत्पन्न होत नाहीं, कां कीं त्याचा कांहींच भाग घेतला नाहीं; रूप बदल न होतां जो अंक तसाच रहातो, तो अंक **गुणिला**

जेव्हां केवळ अक्षरें, किंवा अंकसुद्धां अक्षरें कामांत आणितात, तेव्हां (×) हें गुणाकार चिन्ह टाकितात. जसें अब, ह्मणजे अ वेळा ब घेतला असा अर्थ आहे; ३अ याचाहि अर्थ हाच, कीं अ तीन वेळा घेतला आहे. जेव्हां दोन अंक कामांत घेतले असतात तेव्हां मात्र त्यांचामध्यें × हें चिन्ह लिहिलें पाहिजे. जसें, ३×६ हे गुणाकार चिन्हावांचून जवळ जवळ ३६ याप्रमाणें लिहितां येत नाहींत, कां कीं तो अंक ६+६+६ होत नाहीं, परंतु अंकगणित रितीनें ३ गुणिले १० अधिक ६ याप्रमाणें असावा. बहुतकरून अंकांमध्यें × हें चिन्ह सोडून, केवळ त्याचेजागीं बिंदु करून ३.६ याप्रमाणें लिहितात; परंतु यापासून शिकणारांस कांहीं भ्रम होईल, कीं या रूपाचा अर्थ $३ + \frac{६}{१०}$ असा आहे ह्मणून, दशांशाचे चिन्हाचा बिंदु नेहेमी संभाळून त्याणें वर लिहावा. जसें, ३·६.

८ व्या०. अपूर्णांकांतील **अंश** आणि **छेद** यांमध्यें जी रेघ लिहितात, ती **भागाकार** दाखविती. जसें, $\frac{अ}{ब}$ यास **अ भागिला ब** असें ह्मणतात आणि अमध्यें ब किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो असा त्याचा अर्थ आहे. जसें, $\frac{३}{२}$ **अथवा ३ भागिले २ ह्मणजे** $१\frac{१}{२}$ आहे. अर्थ हाच कीं ३ यामध्यें २ एक वेळा, आणि एक अर्धी वेळा जातात. **अर्धा** ह्मणजे $\frac{१}{२}$, या रूपानें लिहिण्यास योग्य, कां कीं एकामध्यें जितके वेळा दोन जातात, तो एका वेळेचा अर्धा भाग आहे. कदाचित् अ÷ब याप्रमाणें लिहितात.

$\frac{अ}{०}$ यापासून बहुतकरून नवे शिकणारे असें मनांत घेतात कीं, याचें उत्तर अच आहे; परंतु त्यांत कांहींच अर्थ नाहीं. साहामध्यें शून्य किती वेळा जातें! उत्तर हेंच कीं असे प्रश्न अयुक्त आहेत. अ आणि $\frac{अ}{१}$ हे एकच आहेत. कां कीं अ याचा अर्थ भलते एकंची संख्या, अथवा एकंचे भाग आहेत; तर, **अ यामध्यें १ हा किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो** असें विचारिलें तर, उत्तर हेंच कीं नुस्ता अ आहे.

९ व्या०. हीं पुढील सांगीतलेलीं उदाहरणें, अ अक्षराचा वेगळाल्या पद्धती आहेत; त्या पद्धती शिकणारानें घोकून त्यांशीं पकें माहित व्हावें;

$$अ - ० \qquad १ \times अ \qquad १ \times अ \times १ \qquad \frac{अ \times १}{१} \text{ इत्यादि.}$$

१०. व्या० **बरोबरी** आणि **तर** किंवा **यामुळें** यांचीं संक्षेप चिन्हें पुढीलप्रमाणें लिहितात. अ=ब यांत अर्थ हाच, कीं अ आणि ब जा अंकस्थळीं घेतले, ते दोन **अंक** बरोबर आहेत; आणि अ बरोबर ब याप्रमाणें ह्मणतात; **तर** किंवा **यामुळें** यांचें संक्षेप चिन्ह ∴ हें आहे. जसें, अ=ब आणि ब=क; ∴ अ=क, आणि यास, अ बरोबर ब आणि ब बरोबर क, यामुळें अ बरोबर क याप्रमाणें ह्मणतात.

११ व्या०. बीजगणितांतील चिन्हाचा प्रत्येक समुदायास **पद्धती** ह्मणतात, आणि जेव्हां दोन पद्धती, = या चिन्हानें जोडिल्या असतात, तेव्हां त्या सर्वांस **समीकरण** ह्मणतात.

एकरूप समीकरण तेंच आहे, कीं जाचा दोन बाजू बरोबर आहेत; त्या समीकरणांतील अक्षर भलत्ये कोणत्येहि अंकाचे स्थळीं लिहिलें आहे अशी कल्पना करितां येईल; जसें, ६ व्या पृष्ठावरील समीकरणांत,

$$\frac{अ+१}{\frac{१}{अ}+१}=अ$$

यांत अ कोणत्याहि किमतीचा असला, तरी हें समीकरण खोटें होत नाहीं; अथवा अची कशीहि किंमत कल्पिली तथापि त्या किमतीविषयीं हें समीकरण खरेंच आहे.

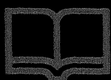
हीं पुढील सांगितलेलीं समीकरणांचीं उदाहरणें एकरूप आहेत, असें स्पष्ट दिसतें.

$$अ+ब = ब+अ \qquad अ+१+१ = अ+३-१$$

$$अ+अ = २अ \qquad अ+अ+अ = ३अ$$

$$\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}अ = अ \qquad \frac{१}{३}अ+\frac{१}{३}अ+\frac{१}{३}अ = अ$$

$$२अ+३अ-अ+४अ=८अ+६अ+५अ-११अ$$



हीं पुढील उदाहरणें एकरूप आहेत, असें पहिल्यानें दिसण्यांत येत नाहीं; परंतु शोधिलीं असतां, प्रत्येक स्थितींत तीं बरोबर खरीं आहेत.

$$\frac{१}{१+अ} + \frac{१}{१+२अ} = \frac{२+३अ}{१+३अ+२अअ}$$

$$अ - \frac{अ}{१+क्ष} = \frac{अक्ष}{१+क्ष}$$

संकेत समीकरण तेंच आहे, कीं जें अक्षरांचे प्रत्येक किमतीनें खरें होत नाहीं, परंतु तें कित्येक नियमित किमतीनें मात्र खरें असतें.

जसें, ब+१=७ आणि अ−३=१२,
हीं दोन उदाहरणें ब बरोबर ६ आणि अ बरोबर १५ अशा संकेतावांचून खरीं होणार नाहींत.

पुनः अ=ब+क हें समीकरण अ, ब, आणि क, यांचे प्रत्येक किमतीविषयीं खरें होत नाहीं, परंतु असा संकेत असला पाहिजे कीं, अ हा ब आणि क यांचे बेरिजेबरोबर असावा. समीकरणांत जेव्हां अक्षरस्थळीं अंक लिहितात, आणि तें समीकरण खरें होतें, तेव्हां असें ह्मणतात कीं तो अंक त्या समीकरणास स्थापितो; जसें, अ−३=१२, हें समीकरण अ बरोबर १५, या अंकानें मात्र स्थापिलें जातें.

१२ व्या०. जेव्हां बीजांतल्या पद्धती एक किंवा अनेक कुंडलींत* **मांडिलेल्या असतात, तेव्हां त्यांचा अर्थ हाच, कीं त्या कुंडलींतील अनेक पदें, बाजूचे पदांशीं केवळ एक अक्षरासारिखा संबंध ठेवितात.** जसें,

$$अ-(ब-क)$$

याचा अर्थ हा कीं, अ यांतून नुसता ब किंवा नुसता क उणा करायाचा नाहीं, परंतु ब−क वजा करायाचा, ह्मणजे ब यांतून क उणा करून जी बाकी राहील, ती अ यांतून वजा करायाची आहे. ह्मणून अ−ब−क असें नाहीं.

उदाहरण. जेव्हां अ=२०, ब=१२, क=१०, ड=३, तेव्हां अ−(ब−{क−ड}) या पद्धतीपासून उत्तर काय निघेल? एथें या उदाहरणांत क−ड, हे १०−३ ह्मणजे ७ आहेत; ब−(क−ड) हे १२−७,

* ( ) या चिन्हास कुंडली ह्मणतात.

ह्मणजे ५ आहेत; तर अ–(ब–{क–ड}) हे २०–५, ह्मणजे १५ आहेत.

आणि, (अ+ब)(क+ड) याचा अर्थ हाच, कीं क+ड ही पद्धती अ+ब वेळा घेण्याची आहे, आणि प(क्र+र) याचा अर्थ हाच, कीं प वेळा क्र+र, घेण्याचा आहे.

या वरचा व्याख्या बीजगणित लिहिण्याचा पहिल्या परिपाटी आहेत. पुढें शिकतांना दुसऱ्या परिपाटी आढळतील. आतां बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, या चार प्रथम कृत्यांतील कांहीं उघडे विशेष गुण सांगतों.

१. अंक किंवा अक्षरचिन्हें, कोणत्याहि क्रमानें मांडून मिळविलीं असतां, त्यांचे बेरिजेंत अंतर पडत नाहीं. या पुढील पद्धती एकच आहेत असें उघड दिसतें;

१ + २ + ३	१ + ३ + २
२ + ३ + १	३ + २ + १
३ + १ + २	२ + १ + ३

याचप्रमाणें अक्षर चिन्हांनीं अ+ब+क+ड=ब+क+ड+अ=ब+अ+ड+क, इत्यादि, होतें.

२. लहानांतून मोठें पद वजा करणें, असा प्रसंग आणल्याशिवाय, मेळवणी आणि वजाबाकीचीं पदें, इच्छेप्रमाणें स्थळभेदेंकरून मांडितां येतात. जसें, कोणी मनुष्य २० रुपये हारेल आणि ५० रुपये जिंकेल, तर आरंभीं ५० रुपये जिंकला आणि त्यांतून २० रुपये हारला, इतकेच रुपये त्याचे जवळ राहतील; परंतु त्याचे जवळ २० रुपयांपेक्षां उणे असते तर, त्याचानें ५० रुपये जिंकवते, परंतु २० रुपये हारववतेना. जसें, १०–२०+५० हें अशक्य; परंतु १०+५०–२० हें शक्य आहे. याचप्रमाणें ८–६+१०–११ या पुढील रूपानें मांडितां येतात;

८–६+१०–११	८+१०–११–६	१०+८–११–६
८+१०–६–११	१०+८–६–११	१०–६+८–११;

परंतु या पुढील रूपानें मांडवत नाहीं;

१०-११+८-६   -११+८+१०-६ इत्या०

१०-११-६+८   -६-११+८+१० इत्या०

प्रश्न. अ-ब+क-ड हें संभवण्यासाठीं कोणत्या प्रकारचे संकेत केले पाहिजेत? उत्तर, ब पेक्षां अ अधिक असावा, किंवा ब पेक्षां उणा तरी नसावा, आणि अ-ब+क हे ड पेक्षां उणे नसावे. या गोष्टीविषयीं पुढें विचार होईल.

३. गुणाकार आणि भागाकार कोणत्याहि क्रमानें करितां येतात. ह्मणजे, अबक ही पद्धती हें सुचविती कीं, ब वेळा क घेण्याचा आहे; आणि यांचा गुणाकार होतो तो अ वेळा घेण्याचा आहे; अंकगणितां-तील रितीपासून कळतें, कीं अ, ब, क, यांचा गुणाकार, बअक यांचे बरोबरच आहे; ह्मणजे, क, अ वेळा घेतला, आणि त्यांचा गुणाकार ब वेळा घेतला, ते अंक पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत. शिकणारानें बीजाच्या आरंभ केल्याचे पूर्वीं, या सर्व जातीचा अंकगणित रिती शिकून सिद्ध केलेल्या आहेत, असें मानिलें आहे.

अंकगणितांत हेंहि दाखविलें आहे कीं, भागाकार आणि गुणाकार यांचा कृतींचा क्रम फिरवितां येतो; ह्मणजे, अ भागिला ब आणि त्यां-च्या भागाकार गुणिला कनें, अशी सांगीतलेली पद्धती या पुढील पद्धती प्रमाणेंच आहे, ह्मणजे अ गुणिला क आणि त्यांचा गुणाकार भागिला बनें, अथवा

$$क \times \frac{अ}{ब} = \frac{कअ}{ब}$$

सारांश, वर २ ऱ्या आणि ३ ऱ्या पृष्ठावर गुणाकार ह्मणजे वेळा किंवा वेळेच्या भाग घेण्याचें सांगीतलें आहे, त्याचा अर्थ वाढवून पाहातां, प्रत्येक गुणाकार भागाकार आहे, आणि प्रत्येक भागाकार गुणाकार आहे. जसें, ६ यांणीं अ भागणें ह्मणजे अचा साहावा भाग घेणें आहे, अथवा एक वेळेचा एक षष्ठांश वेळा अ घ्यावा, अथवा अ यास $\frac{1}{६}$ याणें गुणायाचा आहे. याचसारिखें, अ यास $\frac{1}{४}$ याणें भागणें ह्मणजे १ एकंचे किती चतुर्थांश अमध्यें जातात असें विचारणें; त्यास उत्तर हेंच, कीं अमध्यें जितके एकं आहेत, तितके वेळांचा चौपट वेळा, ह्मणजे अ यास चोहोंनीं गुणावे.

पुनः १० यांस $\frac{२}{३}$ यांनीं भागावें, ह्मणजे १० गुणिले $\frac{३}{२}$ आहे. १० यांस $\frac{२}{३}$ यांनीं भागावें ह्मणजे एक एकंचे $\frac{२}{३}$ श १० मध्यें किती वेळा जातात हें शोधून काढावयाचें आहे. आतां $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{१}{३}$ मिळून १ एकं होतो आणि $\frac{१}{३}$ हा $\frac{२}{३}$ चे अर्धा आहे; ह्मणून पूर्ण १ एकंमध्यें $\frac{२}{३}$ हे एक वेळा आणि एक अर्धी वेळा जातात. यामुळें, १० मध्यें $\frac{२}{३}$ हे १० वेळा आणि १० अर्धे वेळा जातात, अथवा १५ वेळा. ह्मणजे १० यांस $\frac{२}{३}$ यांनीं भागिलें तर १० हे एक वेळा आणि एक अर्ध वेळा घेतल्याप्रमाणें आहेत, अथवा १० गुणिले १$\frac{१}{२}$, ह्मणजे गुणिले $\frac{३}{२}$ नीं.

याचसारिखें, १० हे $\frac{७}{२}$ यांनीं भागणें, ह्मणजे १० यांस $\frac{२}{७}$ यांनीं गुणणें हीं दोन्हीं बरोबर आहेत. अशा प्रश्नांत विचार हाच आहे कीं १० मध्यें ७ एकंचे अर्धे किती वेळा जातील? तर जितके वेळा त्यांत ७ एकं जातात, त्यांचे दुप्पट वेळा; ह्मणजे १ वेळेचे $\frac{१०}{७}$ याचे दुप्पट अथवा एक वेळेचे $\frac{२०}{७}$. परंतु $\frac{२०}{७}$ हे १० यांचे $\frac{२}{७}$ आहेत, अथवा १० चा एक वेळेचे $\frac{२}{७}$ घेतले.

शिकणारानें या पुढील पद्धतींप्रमाणें वेगवेगळीं अनेक जातीचीं उदाहरणें कल्पून लावण्याचा अभ्यास केला पाहिजे.

$$\text{अ गुणिला } \frac{प}{क} \text{ ह्मणजे अ भागिला } \frac{क}{प}$$

$$\text{अ भागिला } \frac{प}{क} \text{ ह्मणजे अ गुणिला } \frac{क}{प}$$

$$\text{अथवा } \frac{प}{क} \times अ = \frac{अ}{\frac{क}{प}} \text{ आणि } \frac{अ}{\frac{प}{क}} = \frac{क}{प} \times अ$$

बीजगणितांतल्या पद्धतीस अंकरूप देणें, आणि वेगवेगळ्या अक्षरांची वेगवेगळी किंमत समजणें, अशा जातींच्या कृतींचा शिकणारानें प्रथमतः अभ्यास केला पाहिजे. असें याप्रमाणें,

जेव्हां $अ = \frac{१}{२}$ आणि $ब = \frac{२}{५}$ तर $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ याची काय किंमत आहे.

$$अ+ब = \frac{१}{२} + \frac{२}{५} = \frac{९}{१०} \qquad अ-ब = \frac{१}{२} - \frac{२}{५} = \frac{१}{१०}$$

$$\therefore \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{\frac{९}{१०}}{\frac{१}{१०}} = ९$$

जेव्हां अ = $१\frac{१}{२}$ तर $\frac{१+\text{अअ}}{१+\text{अ}} = \frac{\text{अअअ}}{२+\frac{१}{२}\text{अ}}$ असें समीकरण खरें आहे कीं नाहीं?

$$\text{अअ} = \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} = \frac{९}{४} \quad १ + \text{अअ} = १\frac{९}{४} = \frac{१३}{४}$$
$$१+\text{अ} = १ + \frac{३}{२} = \frac{५}{२} \quad (१+\text{अअ})\div(१+\text{अ}) = \frac{१३}{४} \div \frac{५}{२} = \frac{१३}{१०}$$
$$\text{अअअ} = \frac{३}{२}\times\frac{३}{२}\times\frac{३}{२} = \frac{२७}{८} \quad \frac{१}{२}\text{अ} = \frac{३}{४} \quad २+\frac{१}{२}\text{अ} = \frac{११}{४}$$
$$\text{अअअ}\div(२+\frac{१}{२}\text{अ}) = \frac{२७}{८} \div \frac{११}{४} = \frac{२७}{२२}$$

परंतु सांगितल्ये उदाहरणाची पहिली रकम $(१+\text{अअ})\div(१+\text{अ}) = \frac{१३}{१०}$ यामुळे वरचें समीकरण खरें नाहीं.

जेव्हां अ=४ आणि ब=३, तेव्हां अअ+ब(अ+ब) याची किंमत काय आहे?

$$\text{अ}+\text{ब} = ४+३ = ७ \qquad \text{ब}(\text{अ}+\text{ब}) = ३\times७ = २१, \text{अअ}=१६$$
$$\text{तर } \text{अअ}+\text{ब}(\text{अ}+\text{ब}) = १६+२१ = ३७$$

परंतु जीं समीकरणें एकरूप आहेत, असें खचित् सांगतात, त्यांचा खरेपणा काढायाचे कृत्यांचा अभ्यास बोध होण्यास फार उपयोगी आहे.

अ = ४ आणि ब = २ असें असेल तर

$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}} = \frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}}$ हें खरें आहे कीं नाहीं ?

$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}} = \frac{१६-४}{२} = (६)$, अअअ = ६४, बबब = ८.

तर $\frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}} = \frac{६४+८}{१६+४-८} = \frac{७२}{१२} = (६)$ तर हें समीकरण खरें आहे.

आतां अ = $\frac{२}{३}$ आणि ब = $\frac{१}{२}$ असें असलें, तर वरचें समीकरण खरें आहे कीं नाहीं?

$$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}} = \frac{\frac{४}{९}-\frac{१}{४}}{\frac{२}{३}-\frac{१}{२}} = \frac{\frac{७}{३६}}{\frac{१}{६}} = (\frac{७}{६})$$

$\frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}} = \frac{\frac{८}{२७}+\frac{१}{८}}{\frac{४}{९}+\frac{१}{४}-\frac{१}{३}} = \frac{\frac{९१}{२१६}}{\frac{१३}{३६}} = (\frac{७}{६})$ यावरून हें समीकरण खचित् खरें आहे.

या पुढील एकरूप समीकरणाचा उदाहरणक्रमाची सत्यता शिकणारानें ताडून पहावी; ती अशी, कीं पहिल्यानें, अक्षरांस पूर्णांकाचें रूप द्यावें, नंतर दुसऱ्यानें अपूर्णांकाचें रूप द्यावें. कां कीं, जर समीकरणाचा दोन बाजूंचा किमती बरोबर असतील, तर त्यावरून त्यांचे एकरूपाचा खरेपणा निघेल. कृति करितेसमयीं पदांमध्यें इतकें मात्र संभाळावें कीं समीकरणांतील अक्षरांस, उण्यांतून अधिक वजा करावें लागेल, अशी किंमत देऊं नये, आणि अक्षरांस अशीहि किंमत देऊं नये कीं, कृति केल्यानें पदांमध्यें असा कांहीं अपूर्णांक निघेल कीं ज्याचे छेदस्थळीं शून्य येईल. याविषयीं ६ वी आणि ८ वी व्याख्या पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.

$$(\text{अ}+\text{क्ष}+\text{य})(\text{अ}+\text{क्ष}-\text{य}) = \text{अअ}+\text{२अक्ष}+\text{क्षक्ष}-\text{यय}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब}) = \text{अअ}+\text{२अब}+\text{बब}$$

$$(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब}) = \text{अअ}-\text{२अब}+\text{बब}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}-\text{ब}) = \text{अअ}-\text{बब}$$

$$(\text{मम}-\text{नन})(\text{मम}-\text{नन})+\text{४ममनन} = (\text{मम}+\text{नन})(\text{मम}+\text{नन})$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})+(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब}) = \text{२अअ}+\text{२बब}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})-(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब}) = \text{४अब}$$

$$(\text{अ}+\text{ब}+\text{क})(\text{अ}+\text{ब}-\text{क})(\text{ब}+\text{क}-\text{अ})(\text{क}+\text{अ}-\text{ब}) = \text{२अअबब}+\text{२}\times\text{बबकक}+\text{२ककअअ}-\text{अअअअ}-\text{बबबब}-\text{कककक};\ (\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})\times(\text{अ}+\text{ब})=\text{अअअ}+\text{३अअब}+\text{३अबब}+\text{बबब}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{अ}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}-\text{१}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}-\text{२}} = \frac{\text{३अअ}+\text{२}-\text{६अ}}{\text{अअअ}+\text{२अ}-\text{३अअ}}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अ}-\text{ब}}+\frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}+\text{ब}} = \frac{\text{२अअ}+\text{२बब}}{\text{अअ}-\text{बब}}$$

$$\text{अक्षक्ष}+\text{बक्ष}+\text{क} = \frac{(\text{२अक्ष}+\text{ब})(\text{२अक्ष}+\text{ब})+\text{४अक}-\text{बब}}{\text{४अ}}$$

$$\frac{\text{क्षक्षक्ष}-\text{ययय}}{\text{क्षक्ष}-\text{यय}} = \frac{\text{क्षक्षक्ष}+\text{क्षक्षय}+\text{क्षयय}+\text{ययय}}{\text{क्षक्ष}+\text{क्षय}+\text{यय}}$$

$$\frac{\text{क्ष}+\text{अ}}{\text{क्ष}+\text{ब}} = \frac{\text{क्षक्ष}+(\text{अ}+\text{क})\text{क्ष}+\text{अक}}{\text{क्षक्ष}+(\text{ब}+\text{क})\text{क्ष}+\text{बक}}$$

जेव्हां बीजांत एकरूप अक्षराचीं अनेक पदें असतील तेव्हां तीं संक्षेपानें अधिक सरळरूपांत आणितां येतील. जसें,

३अ+२अ = ५अ   अ+७अ−४अ=४अ

३अब+२अब = ५अब $\frac{\text{प}}{\text{क}}+७\frac{\text{प}}{\text{क}}-४\frac{\text{प}}{\text{क}}=४\frac{\text{प}}{\text{क}}$

२क्षक्ष+२क्षक्ष = ५क्षक्ष   अअब+७अअब−३अअब=५अअब

अ+१२अ−३अ−६अ+२अ−अ=५अ

या वरचे शेवटील उदाहरणांमध्यें सर्व अधिक पदांची बेरीज मिळवून १५अ होतात, आणि त्यांतून पहिला अ तीन वेळा, दुसरा अ ६ वेळा, आणि तिसरा अ १ वेळा, ह्मणजे सर्व मिळून १० वेळा; ह्मणजे १०अ वजा करायाचे आहेत; अशानें १५अ−१०अ=५अ होतात.

त्याच प्रमाणें अ+ब−३अ+४ब=५ब−२अ, कां कीं ब आणि ४ब मिळविले असतां ५ब होतात, आणि यांशीं अ मिळविला आहे. आणि नंतर त्यांतून ३अ वजा केले आहेत. परंतु, पहिल्यानें अ मिळवून नंतर ३अ वजा केले असतां, आणि अ न मिळवितां केवळ २अ वजा केले, तर हीं दोन्हीं बरोबर आहेत. ह्मणजे त्यांस हें रूप होतें.

अ+५ब−३अ=५ब−२अ

उदाहरणें.

अ+अब−२अब+४अ+६अ=११अ−अब

२क्षक्ष+६क्ष−४क्ष−क्षक्ष+क=क्षक्ष+२क्ष+क

$३\text{क्ष}-१५+\frac{1}{2}\text{क्ष}-\text{क्ष}-७=२\frac{1}{2}\text{क्ष}-२२$

क्ष+य+क्ष−य+३क्ष =५क्ष

कोणत्याहि पद्धतीमध्यें क्ष य हीं अक्षरें सर्व पदांमध्यें साधारण असतील जसें,

+६क्षय, −क्षय, +४क्षय, +२क्षय, −११क्षय, −१२क्षय, क्षय चा या

वेगवेगळ्या सर्व पदांची किमत जें एक पद दाखवितें तें याप्रमाणें काढितां येतें; अधिक क्षय पदांची बेरीज १२ आहे, आणि उण्ये पदांची बेरीज २४ आहे. तर सर्व अधिक पदांची बेरीज, आणि तितक्याच उण्या पदांची बेरीज टाक, ह्मणजे कांहींच अधिक पदें न राहातां उणीं पदें १२ राहातील, तर दुसरे पद्धतीचे पदांस–१२क्षय जोडून लिहिले पाहिजेत.

जेव्हां अक्षरांचीं किंवा अंकांचीं दोन पदें सारिखीं नाहींत, तेव्हां त्यांस वरप्रमाणें संक्षेपरूप होत नाहीं. उदाहरण; अअ+अ या पदांचें संक्षेपरूप होत नाहीं. त्याचें संक्षेपरूप २अ, किंवा २अअ, किंवा अअअ, असेंहि नव्हे; तर तें, अ घेतला अ वेळा, अधिक अ घेतला एक वेळा, असें आहे, यास्तव तें अ घेतला अ+१ वेळा, अथवा (अ+१)अ आहे. (अ+१) घेतला अ वेळा, अथवा अ(अ+१) हें त्याचें दुसरें रूप आहे. वर **१४ वें पृष्ठ पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.**

याप्रमाणें बीजकृतीनें अ+अ या दोन पदांचा २अ, असा एक पदरूप संक्षेप होतो, परंतु अअ+अ या पद्धतीचा संक्षेप त्याप्रमाणें होत नाहीं, आणि बीजानें त्यास कांहींच संक्षेपरूप देववत नाहीं, आणि अंकगणित रितीनें त्यास संक्षेपरूप देतां येतें परंतु, जोंपर्यंत अ कोणत्या अंकस्थळीं घेतला, हें समजे पावेतों संक्षेप होत नाहीं.

अ+ब यामध्यें अ, किती वेळा जातो? एथें ब मध्यें अ किती वेळा जातो हें जाणल्यावांचून या प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं; यामुळें अ+ब यांत अ किती वेळा जातो. हें केवळ $\frac{अ+ब}{अ}$, अशे बीजरूप पद्धतीनें दाखवितां येतें परंतु शिकणारानें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं, हें प्रश्नाचें उत्तर नाहीं, परंतु प्रश्नाचें उत्तर दाखविण्यासाठीं अशी एक बीजरीति योजिली आहे.

मअ–नअ यामध्यें अ किती वेळा जातो? एथें, म आणि न या दोहोंचे अंकांची किमत जाणल्यावांचून, वरचे प्रश्नाचे उत्तर बरोबर देववत नाहीं; तथापि मअ आणि नअ यांचा बीज अर्थ सहाय्यानें बीज पद्धतीचें उत्तर, त्या गणित पद्धतीचे उत्तराजवळ अवळ एक पायरी आलीकडे आणि तें, तशानें $\frac{मअ-नअ}{अ}$ या रूपाशिवाय दुसरे रूपानें लिहितां येतें, कां, स्पष्ट आहे कीं न वेळा, म वेळांतून वजा केल्या असतां म–न वेळा राहातात; ह्मणजे मअ–नअ यांत अ हा म–न वेळा जातो.

वर सांगितलेल्या गोष्टी बीजगणितांतील सर्व कृती करितेसमयीं लक्षांत ठेविल्या पाहिजेत. ८अ+५ अ हे किती किमतीचे आहेत? एथें अ कोणत्या अंकस्थानीं घेतला आहे, हें जाणल्यावांचून, अशे प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं; परंतु ८अ+५अ यांचें अतिसंक्षेप बीजरूप काय आहे? असा प्रश्न केला तर, उत्तर १३अ आहे. आणि बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, इत्यादिकांचा कृती, बीजपद्धतींस एक रूपांतून दुसरें अधिक संक्षेपरूप देण्याचा रिती दाखवितात. उदाहरण अ+ब आणि अ−ब यांची बेरीज काय आहे? हें बीजरितीनें विस्तारें लिहिलें असतां, त्यास याप्रमाणें पहिलें रूप होईल; जसें,

(अ+ब)+(अ−ब)

परंतु यांचें सर्वांपेक्षां संक्षेपरूप २अ आहे; आणि २अ, असें संक्षेपरूप केल्यानें, त्या कृतीस बीजगणिताची मिळवणी ह्मणतात.

मिळवणी.

क+ई यास अ+ब याशीं मिळवायाची इच्छा आहे. जर अ+ब यास क मिळविला, तर अ+ब+क होतो, परंतु इतकेंच केल्यानें पूर्ण मिळवणी झाली नाहीं, कां कीं मिळवायाचें परिमाण केवळ क नाहीं, तर क+ई आहे. यामुळें अ+ब+क+ई हीच पूर्ण मिळवणी झाली. अथवा,

(अ+ब)+(क+ई)=अ+ब+क+ई . . . . . (१)*

अ+ब यास क−ई मिळविणें असल्यास, प्रथम क मिळवून, अ+ब+क होतात. परंतु असें केल्यानें, बेरीज अधिक झाली, कां कीं, क पासून ई वजा करून बाकी मात्र मिळवायाची. ह्मणून बेरिजेंतून ई वजा करून ती बेरीज शुद्ध कर, ह्मणजे अ+ब+क−ई असें होईल.

* जेव्हां वर दिलेल्या समीकरणासारिख्या समीकरणाचो गरज पुढें लागेल, तेव्हां त्यास लौकर जाणायासाठीं, त्या समीकरणासमोर एक अंक किंवा अक्षर वरप्रमाणें लिहावें.

(अ+ब)+(क−ई)=अ+ब+क−ई . . . . (२)

(१) आणि (२) या पद्धतींस अधिक संक्षेपरूप देणें अशक्य. आतां हीं पुढील उदाहरणें तपासावीं.

अ+ब यांस अ−ब मिळीव,

(अ+ब)+(अ−ब)=अ+ब+अ−ब=२अ

३क्ष−अ यास २अ−क्ष मिळीव

(३क्ष−अ)+(२अ−क्ष)=३क्ष−अ+२अ−क्ष=२क्ष+अ.

अब−ब यास २अब+क−६ब मिळीव

उत्तर २अब+क−६ब+अब−ब, अथवा ३अब+क−७ब

वरचे आणि त्यासारिख्या दुसऱ्या कृतीवरून, मिळवणीची रीति याप्रमाणें निश्चित होती.

रीति. **एक पद्धतीवांचून बाकी दुसऱ्या सर्व पद्धतींचे प्रथम पदांपुढें + हें चिन्ह कर; आणि असें मनांत आण कीं त्यांचा समुदाय एकच पद्धती आहे. नंतर अक्षरांविषयीं सरूप पदांचा संक्षेप होईपर्यंत कर.**

उदाहरण.

अ−ब+३क−अब

४अब−ब+२अ−क्ष

४क्ष+६अ+अब−७



यांची मिळवणी कर.

उत्तर ९अ−२ब+४अब+३क+३क्ष−७

या पुढील उदाहरणांचा बेरिजा घे.

अ—ब	अ—२ब	अ+मअ—४
ब—क	ब—२क	६—अ+२मअ
क—ड	क—२ड	१२मअ—१२—३अ
ड—क्ष	ड—२क्ष	प+अ—$\frac{1}{2}$
अ—क्ष	अ—ब—क—ड—२क्ष	१५मअ—२अ—१०$\frac{1}{2}$+प

(१) आणि (२); यांपासून ही पुढील रिती निघती.

जेव्हां कुंडलींतल्या पद्धतीचे पूर्वीं बाहेर+चिन्ह मांडिलें असतें. तेव्हां कुंडलीचा रेघा पुसून टाकून, पद्धतीचे किमतींत फेर पडत नाहीं.

अ+(ब+क—ई)=अ+ब+क—ई

वजाबाकी.

अ यांतून ब+क वजा कर. अ यांतून प्रथम ब, वजा केला तर अ—ब होतो, परंतु इतकेंच केल्यानें वजाबाकीची कृति पुरी झाली नाहीं, कां कीं ब, यांत क मिळविला पाहिजे, आणि नंतर त्यांची बेरीज अ यांतून वजा केली पाहिजे. यामुळें कहि वजा केला पाहिजे, तेणेंकरून हें रूप होईल अ—ब—क, अथवा

अ—(ब+क)=अ—ब—क. . . . . (३)

अ यांतून ब—क वजा कर, ब वजा केला, तर अ—ब होईल, परंतु केवळ असें केल्यानें क अधिक वजा केला असें झालें; अथवा खरे किमतीपेक्षां अ—ब, हा क याणें उणा आहे. यामुळें, खरी किंमत अ—ब+क ही आहे, अथवा

अ—(ब—क)=अ—ब+क. . . . . (४)

वरचे गोष्टीप्रमाणें, हीं पुढील कित्येक उदाहरणें आहेत.

$$अ-(क-अ)=अ-क+अ=२अ-क$$

$$अ-(अ-क)=अ-अ+क=क$$

$$३अ+ब-(२अ-ब)=३अ+ब-२अ+ब=अ+२ब$$

$$अ+ब-(अ-ब)=अ+ब-अ+ब=२ब$$

$$मक्ष-(क-३मक्ष)=मक्ष-क+३मक्ष=४मक्ष-क$$

कुंडलींत अनेक पदें असतील, आणि कुंडलीचे बाहेर – चिन्ह असेल तर कुंडलींतील सर्व पदांचीं चिन्हें बदल केलीं, ह्मणजे + यास – केलें, आणि – यास + केलें, तर ती कुंडली पुसून टाकितां येईल.

ही गोष्ट (३) आणि (४) यांपासून उघडी स्पष्ट होती.

ही वर सांगीतलेली रीति मनांत पक्की ठेविली नाहीं, तर, ती अनास्था चूक करण्याचें कारण होईल; तर ही चूक नवे शिकणारेच करितात असें नाहीं, परंतु अधिक शिकलेलेहि करितात. ह्मणून लक्षांत येण्याकरितां ती रीति मोठे अक्षरानें वर लिहून दाखविली आहे. आणि नवे शिकणाराचे मनांत ही गोष्ट अधिक ठसायासाठीं, त्यास कळलें पाहिजे कीं या रितीची अनास्था करणें ह्मणजे वेडेपणाचा पुढील गोष्टी कबूल केल्याप्रमाणें होतील; ह्मणजे, सर्व कर्जे मिळकती आहेत असें होईल, आणि सर्व प्राप्ती तोटा असें होईल; कर्ज सोडणें ह्मणजे उपद्रव देणें, आणि जसा जसा मनुष्यास लुटावा तसा तसा तो द्रव्यवान होतो; आणि याप्रमाणें मिथ्या वेड्या वेड्या दुसऱ्या हजारों गोष्टी होतील.

मागील रितीचा दुसरा ताळा पुढें सांगतों. जर पुढील पद्धति काय आहे; हें जाणण्याची इच्छा असेल ह्मणजे,

$$अ-(ब+क-प-क) \cdots\cdots\cdots\cdots (अ)$$

तर भलतीं दोन परिमाणें एकसारिखींच वाढविलीं, तरी त्यांची वजाबाकी, पहिल्ये शुद्ध परिमाणांचे वजाबाकी बरोबर होईल हें स्मरणांत ठेविलें पाहिजे. याप्रमाणें अ+क्ष आणि ब+क्ष यांची वजाबाकी अ आणि

ब यांचे वजाबाकी बरोबर आहे. वरचे उदाहरणांत असें दाखविलें कीं, अ यांतून,

ब+क–प–क वजा कराचे आहेत.

अ आणि ब+क–प–क, यांशीं (प+क) वेगवेगळे मिळून, याप्रमाणें होईल. अ+(प+क) उणें

(ब+क–प–क)+(प+क)

अथवा ब+क–प–क+प+क अथवा ब+क

ह्मणजे अ–(ब+क–प–क) बरोबर

अ+प+क–(ब+क) अथवा अ+प+क–ब–क

अथवा अ–ब–क+प+क . . . . (ब)

(अ) आणि (ब) ह्या खुणांचा वरचा दोन पद्धती ताडून पाहातां ही रीति खरी आहे असें स्पष्ट दिसतें.

वजाबाकीची रीति या पुढीलप्रमाणें आहे.

रीति. जी पद्धती वजा करायाची आहे, तिचे प्रथम पदास+ हें चिन्ह आहे, असें मनांत आण; नंतर त्याच पद्धतीचे दुसऱ्या सर्व पदांचीं चिन्हें बदल कर, ह्मणजे + यास – कर, आणि – यास+ कर, नंतर जिचीं चिन्हें अशीं बदल केलीं ती पद्धति जा पद्धतींतून वजा करायाची आहे तिशीं जोड; नंतर होईल तितका संक्षेप कर.

अ+ब–क–क्ष+२ज्ञ+३अब–१४ यांतून

क–२अ+क्ष+ज्ञ–४अब+२$\frac{१}{२}$ हे वजा कर

२अ+ब–२क–२क्ष+ज्ञ+७अब–१६$\frac{१}{२}$ ही बाकी

अ+क	क्ष+य–३–अ	अ–ब +क–ड+ई	यांतून
२क–अ	क्ष–य+३–अ	अ–२ब+क+ड–ई	हे वजा कर
२अ–क	२य–६	ब–२ड+२ई	ही बाकी

अ+ब+२क+३ड+४ई−५फ−६ग यांतून
१२ड+४ई−३क+२अ+ब−ग+फ हे वजा कर
५क−९ड−६फ−५ग−अ बाकी

अ−(ब−(क+क्ष))+(ब−(क्ष−२ब)) हें काय आहे ?

कुंडली काढून टाकण्याची जी रीति सांगितली तिजपासून,

अ−ब+(क+क्ष)+ब−(क्ष−२ब) हें रूप होतें.

याच रितीनें, याचाहि रूपभेद होतो.

ह्मणजे अ−ब+क+क्ष+ब−क्ष+२ब=अ+क+२ब

हीं पुढील उदाहरणें करून दाखीव.

अ−{अ−(अ−(अ−क्ष))}=क्ष

अ−{ब−(अ−(ब−क्ष))}=२अ−२ब+क्ष

पूर्वीं, जें वर सर्व सांगीतलें, त्यावरून समजांत आलें कीं, बीजगणित पद्धतींची मिळवणी आणि वजाबाकीचीं, वेगळालीं पदें, कशींहि मांडिलीं, तरी त्यांत कांहीं अंतर पडत नाहीं; तर या पुढील पद्धतीचें शक्य अथवा अशक्यरूप आहे किंवा नाहीं, याविषयीं कांहींच लक्षांत आणायाची गरज नाहीं. १२ आणि १३ वें पृष्ठ पाहा ह्मणजे समजेल; परंतु शक्य किंवा अशक्य रूपें हीं दोन्हीं सारिखींच असें मानितां येईल. जसें, ३−७+८, यांत जी वजाबाकी करायाची आहे, ती पहिल्यानेंच अगत्य करावी असें नाहीं, आणि यासाठीं अशी पद्धति अशक्य रूपाची ह्मणून कामांत घेऊं नये, असेंहि मनांत आणणार नाहीं; परंतु पदांचा क्रम कसाहि मांडला तरी कांहीं चिंता नाहीं; यावरून, वरचें उदाहरण ३+८−७ असें आहे; याप्रमाणें ही गोष्ट दुसरे सर्व पद्धतींस साधारण आहे. जर मिळवणी आणि वजाबाकीचे कृतीसाठीं पदांचे रचनेचे शक्यपणाविषयीं कांहीं अगोधर विचार करायाचें प्रयोजन असेल, तर असें करवत नाहीं, वरची अशक्य रूपाची पद्धति ह्मणजे ३−७+८ ही १२ तून वजा केली तर याप्रमाणें होईल.

$$१२-(३-७+८)=१२-३+७-८=८$$

शक्य रूपानें पदें मांडिलीं असतां त्यांचें उत्तर वरचाप्रमाणें होईल; जसें,

$$१२-(३+८-७)=१२-३-८+७=८$$

गुणाकार आणि भागाकार.

बीजगणिताचे पदांशीं गुणाकार आणि भागाकार करतेसमयीं, नेहमीं लक्षांत ठेवावें, कीं जीं अक्षरें कामांत घेतात, तीं पूर्ण किंवा अपूर्णांक दाखवितात. अपूर्णांक गणितामध्यें ज्याचे अंश आणि छेद वेगवेगळे पूर्णांक आहेत, त्यांचे मिळवणी इत्यादिकांचे रितीविषयीं अंकगणितांत जें सांगीतलें आहे तें प्रथम येथें दाखवितों.

जेव्हां अ आणि ब हे पूर्णांक आहेत, तेव्हां पुढील सर्व प्रश्न एकच अर्थाचे आहेत आणि त्यांचें उत्तर $\frac{अ}{ब}$ आहे.

१. जर एक एकं ब समभागांत विभागिला, आणि त्या भागांतून अ भाग घेतले, तर ते किती एकं किंवा एकंचे भाग होतील?

२. अ याचे ब भागांत किती एकं किंवा एकंचे भाग आहेत?

३. अ यामध्यें ब किती वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातो? याप्रमाणें $\frac{३}{७}$ ह्मणजे एकंचा एक सप्तमांश तीन वेळा घेतला आहे, तर तीन यांचा सातवा भाग काय आहे? आणि तीन यामध्यें सात एका वेळेचे किती भाग वेळा जातात? या दोन प्रश्नांचें उत्तर $\frac{३}{७}$ आहे.

जेव्हां अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद हे दोनहि अपूर्णांक आहेत, तेव्हां वर सांगीतल्याप्रमाणें त्या अपूर्णांकाचा अर्थ बोलण्याचे रितीप्रमाणें सांगायास कठीण पडतें. उदाहरण, जेव्हां अ=३ आणि ब=७, आहेत, तेव्हां त्यास $\frac{अ}{ब}$ असें रूप देऊन सांगण्यास, कठीण पडत नाहीं; परंतु अ=२$\frac{१}{२}$ आणि ब=$\frac{४}{६}$ असें असून अपूर्णांकाचें रूप $\frac{अ}{ब}$ असें असलें,

तर भाषेनें त्याचा अर्थ सांगायास कठीण पडतें. कल्पना कर, कीं कांहीं विशेष एक एकं, जसें, १ कोस घेतला आहे, तर

कोसाचे $\frac{३}{७}$ काय आहेत?	कोसाचे $\frac{२\frac{१}{२}}{\frac{४}{९}}$ काय आहेत?
उत्तर, एक कोस सात समभागांत विभागून त्यांतून तीन भाग.	उत्तर; (**एक कोस $\frac{४}{९}$ समभागांत विभागून**) त्या भागांचे $२\frac{१}{२}$.

दुसऱ्या उदाहरणाचे उत्तरांत जे शब्द मोठ्या अक्षरांनीं लिहिले ते असमजुतीचे आहेत, आणि जरी त्यांना अर्थ नाहीं; तथापि त्यांस समजायाजोगा कांहींएक अर्थ देतां येईल. जेव्हां ७ यांचा ठिकाणीं $\frac{४}{९}$ आणि ३ यांचा ठिकाणीं $२\frac{१}{२}$ मांडिले, तेव्हां वरचे दोन उदाहरणांतून प्रथम उदाहरणाचा अर्थ फिरविल्यावांचून, उच्चारण्याची रीति मात्र बदल केल्यानें, समजुतींत येई अशी बोलण्याची रीति निघेल. जसें,

अशी एक लांबी घे, कीं ती ७ वेळा घेतली असतां एक कोस होईल, नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी ३ वेळा घे.	अशी एक लांबी शोधून घे, कीं ती एक वेळेचे $\frac{४}{९}$ वेळा घेतली असतां एक कोस होईल, नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी $२\frac{१}{२}$ वेळा घे.

आतां $२\frac{१}{२} \div \frac{४}{९} = \frac{४५}{८}$ कोस, अथवा $५\frac{५}{८}$ कोस होतात, जी घेतलेली लांबी तिचे नऊ भाग करून, त्यांतले चार भाग घेतले असतां एक कोस बरोबर असेल, तर ती पहिली घेतलेली लांबी $२\frac{१}{२}$ वेळा घेतली, तर $५\frac{५}{८}$ कोस होतील; हें गणित रितीनें शिकणारास स्पष्ट समजेल. आणि जर याप्रमाणें प्रश्न केला कीं, $२\frac{१}{२}$ यामध्यें $\frac{४}{९}$ किती वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा आतात, तर त्याचें उत्तर $५\frac{५}{८}$ आहे.

बीजगणितांत अक्षरांविषयीं बोलण्याची जी रीति कामांत आणितात, ती पूर्णांकांचा कल्पनेवरून निघती; परंतु पूर्ण किंवा अपूर्णांकांचे स्थळीं अक्षरेंच मांडितात, ह्मणून अपूर्णांकाविषयीं अशी बोलण्याचे रितींचा फलितार्थ नसल्यास तशी बोलण्याची रीति फारच संकोचित आहे. जसें,

जर क्ष बिघ्यांची किंमत य रुपये आहे, तर एक बिघ्याची किंमत काय आहे? असा प्रश्न केला असतां याप्रमाणें सर्वदां उत्तर देतात, य यास क्ष समभागांत विभाग; नंतर प्रत्येक भागामध्यें जितके रुपये आहेत तितके रुपये एक बिघ्याची किंमत होईल. ह्मणून जर १८ बिघ्यांची किंमत ३६ रुपये आहे तर ३६ सांचा १८ वा भाग २ रुपये आहे, याजकरितां एक बिघ्याची किंमत २ रुपये आहे. परंतु जर एक बिघ्याचा $\frac{1}{2}$ याची किंमत २$\frac{1}{3}$ रुपये आहे, आणि जर असें ह्मटलें कीं २$\frac{1}{3}$ यांस $\frac{1}{2}$ समभागांत भागायाचे, तर त्याचा अर्थ खचित् याच बोलण्याप्रमाणें आहे, कीं २$\frac{1}{3}$ यांस २ वेळा घे, अथवा गणित रितीप्रमाणें २$\frac{1}{3}$ यांस $\frac{1}{2}$ यांणीं भाग. आतां, भलतें कांहीं परिमाण $\frac{1}{10}$ समभागांनीं भाग, आणि त्याच परिमाणास १० वेळा घे, हीं दोन्हीं एकच आहेत, असें ह्मणणें, पहिल्या लक्ष्यानें जरीं उपहास्य दिसतें, तथापि कांहीं परिमाण १० समभागांत भागून त्यांतून एक भाग घेणें, आणि तेंच परिमाण $\frac{1}{10}$ यांणीं गुणणें हीं दोन्हीं एकच आहेत; या गोष्टीसारिखें वर कांहीं लिहिलें आहे ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, आणि याशिवाय दुसरी ही पुढील गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं जर क्ष बिघ्यांला य रुपये पडतात असें जेव्हां ह्मणतों, तेव्हां य यास क्ष समभागांत भागिल्यानें एक बिघ्याची किंमत सांपडती, तेणेंकरून वरचें उपहास्य नाहीं असें होतें. कां कीं, पूर्णांकाचे किंवा अपूर्णांकाचे स्थळीं अक्षरें मांडितात.

अपूर्णांकाचे आश्रयानें त्रिराशींतील अनेक प्रश्न शिकणारानें उलगडून काढावे, हें काम त्यास फार उपयोगी आहे; ह्मणून पहिल्यानें अपूर्णांकाचे प्रश्न पूर्णांकाचे आश्रयानें पडताळून पाहावे. मग नुसते आपल्ये विचारानें सिद्ध करावे.

१. जर ६ गजांची किंमत ७ रुपये आहे तर ५ गजांस काय किंमत पडेल?

जर एक गजाचे $\frac{1}{3}$ यांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{5}{7}$ आहे, तर एक गजाचे $\frac{4}{6}$ यांची किंमत काय असेल?

जसें ६ गज, ५ गजांस आहेत, तसे ७ रुपये $\frac{७\times५}{६}$ अथवा ५$\frac{५}{६}$ रुपयांस आहेत. हें उत्तर.

जसें एक गजाचे $\frac{२}{३}$ एक गजाचे $\frac{४}{९}$ शांस आहेत, तसें एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ यांस $\frac{\frac{५}{७}\times\frac{४}{९}}{\frac{२}{३}}$ अथवा, एक रुपयाचे $\frac{१०}{२१}$ आहेत. हें उत्तर.

२. जर, एक गजाचे $\frac{२}{३}$ यांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ असेल तर · ·
जर, २ गजांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}\times२$ अथवा $\frac{१५}{७}$ असेल तर· ·
जर, १ गजाची किंमत एक रुपयाचे $\frac{१५}{७}\div२$ अथवा $\frac{१५}{१४}$ असेल तर··
जर, ४ गजांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{१५}{१४}\times४$ अथवा $\frac{३०}{७}$ असेल तर··
जर, एक गजाचे $\frac{४}{९}$ यांस एक रुपयाचे $\frac{३०}{७}\div९$ अथवा $\frac{१०}{२१}$ असेल तर··

जा रिती पूर्णांकाचे संबंधानें अपूर्णांकांविषयीं लागतात, त्या शिकणारास पूर्वींच माहीत झाल्या आहेत; तर त्याच रिती आतां बीजरूपानें मांडितों. पहिल्यानें, पूर्णांकाचे स्थळीं अक्षरें घेतलीं, असें मानून

$$\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब} \qquad \frac{अ}{ब} + \frac{क}{ड} = \frac{अड+बक}{बड}$$

$$अ + \frac{ब}{क} = \frac{अक+ब}{क} \qquad \frac{अ}{ब} - \frac{क}{ड} = \frac{अड-बक}{बड}$$

$$अ - \frac{ब}{क} = \frac{अक-ब}{क} \qquad \frac{अ}{ब} - क = \frac{अ-बक}{ब}$$

$$\frac{अ}{ब} \times क = \frac{अक}{ब} \qquad \frac{अ}{ब} \times \frac{क}{ड} = \frac{अक}{बड}$$

$$\frac{अ}{ब} \div क = \frac{अ}{बक} \qquad क \div \frac{अ}{ब} = \frac{बक}{अ}$$

$$\frac{अ}{ब} \div \frac{क}{ड} = \frac{अ}{ब}\times\frac{ड}{क} = \frac{अड}{बक}$$

शिकणारानें वरचे प्रत्येक समीकरणाची ओळख करून घेतली पाहिजे, आणि जर शिकणारा अपूर्णांकाचे वेगळाल्ये कृतींशीं माहित असेल, तर त्याला तीं समीकरणें समजण्यास सोपें पडेल. जसें या पुढील उदाहरणांत $\frac{अ}{ब}\times\frac{क}{ड} = \frac{अक}{बड}$, यावरून शिकणारास अपूर्णांक गणि-

तांतील रितीची ओळख येईल; **एक अपूर्णांक दुसऱ्ये अपूर्णांकानें गुणायाचा असल्यास, अंश अंशांनीं गुणून नवे अंश होतील, आणि छेद छेदांनीं गुणून नवे छेद होतील.**

जेव्हां अक्षरें, अपूर्णांकांचे ठिकाणीं कामांत घेतलीं आहेत, तेव्हां वरची रीति त्यावरहि लागू पडेल. हें दाखविण्यासाठीं एक उदाहरण करून दाखवितों. $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{मअ}}{\text{मब}}$. आतां, अ चे ठिकाणीं $\frac{\text{प}}{\text{क}}$, ब चे ठिकाणीं $\frac{\text{र}}{\text{स}}$ आणि म चे ठिकाणीं $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$ घे, आणि असें मनांत आण कीं, प, क, र, स, क्ष, आणि य, हे सर्व पूर्णांकांचे ठिकाणीं आहेत. तर

$$(\text{गणित रीतीनें})\ \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\frac{\text{प}}{\text{क}}}{\frac{\text{र}}{\text{स}}} = \frac{\text{पस}}{\text{कर}}$$

$$\text{मअ} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} \times \frac{\text{प}}{\text{क}} = \frac{\text{क्षप}}{\text{यक}} \qquad \text{मब} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} \times \frac{\text{र}}{\text{स}} = \frac{\text{क्षर}}{\text{यस}}$$

$$\frac{\text{मअ}}{\text{मब}} = \frac{\frac{\text{क्षप}}{\text{यक}}}{\frac{\text{क्षर}}{\text{यस}}} = \frac{\text{क्षयपस}}{\text{क्षयकर}}$$

$$\text{परंतु}\ \frac{\text{क्षयपस}}{\text{क्षयकर}} = \frac{(\text{क्षय})\times\text{पस}}{(\text{क्षय})\times\text{कर}} = \frac{\text{पस}}{\text{कर}}$$

ह्मणून $\frac{\text{मअ}}{\text{मब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$. या उदाहरणांत अ, ब, म, हे सर्व अपूर्णांक आहेत.

पूर्वीं गणितांत सांगितलें आहे, कीं, पूर्णांकांचे किंवा अपूर्णांकांचे उदाहरणांत, फळांत अंतर पडल्याशिवाय, गुणाकार, किंवा, भागाकार यांचे क्रम फिरवितां येतात. जेव्हां गुणाकार आणि भागाकार, या दोहोंविषयीं, बोलायाचें आहे, तेव्हां त्यांचे भेदावर लक्ष्य ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं अ, यानें भागावें आणि $\frac{1}{\text{अ}}$ यानें गुणावें हीं दोन्हीं एकसारिखींच आहेत. या पुढील उदाहरण समुदायावर लक्ष्य ठेविलें पाहिजे, आणि वेगवेगळाले गुणाकार पर्यायानें पुनःपुनः करून सिद्ध केले पाहिजेत.

१. अ, ब, क, आणि ड, यांचा गुणाकार; २. अब आणि कड, यांचा गुणाकार; ३. अक आणि बड, यांचा गुणाकार; ४. अड आणि बक, यांचा गुणाकार; ५. अबक आणि ड, यांचा गुणाकार; ६. अबड आणि क, यांचा गुणाकार; ७. अकड आणि ब, यांचा

गुणाकार; ८. बकड आणि अ, यांचा गुणाकार; यांत कोणत्येहि क्रमानें अक्षरें मांडिलीं तरी त्या सर्वांचा गुणाकार अबकड या पदाबरोबर आहे.

एकेरी पदांचे गुणाकार करून त्या गुणाकारपदांचीं अक्षरें पाहिजे त्या क्रमानें मांडितां येतात, आणि जर त्या पदांस कांहीं गुणकांक असेल तर ते अंक परस्पर गुणून गुणाकार मांडावा. नुसते दोन अंक असल्यास त्यांचा मध्यें × हें चिन्ह करावें. जसें. २अब × ४कड, हे या पुढील वेगळाल्ये रितीनें मांडतां येतात;

२अब४डक २×४अबकड ८अकबड ८अबकड, इत्यादि.

पदांचे आरंभीं गुणकांक मांडावे हें सोयीचें आहे, आणि पदांचीं एक जातीचीं अक्षरें एकत्र मांडावीं हेंहि सोईवार पडतें. ह्मणून

२अअब×३अबबक, हे, ६अअअबबबक. याप्रमाणें मांडितात.

१२अबक्ष× ४अबक्षक्ष = ४८अअबबक्षक्षक्ष, ३अबक× $\frac{१}{२}$अब = $\frac{३}{२}$अअबबक.

जेव्हां अपूर्णांक परस्परांचे जवळजवळ, किंवा एका अक्षराजवळ मांडिले असतात, तेव्हां परस्परांचा गुणाकार आहे असें ते जाणवितात. जसें,

२$\frac{अ}{ब}$क $\frac{ई}{फ}$ यांचा अर्थ, २ × $\frac{अ}{ब}$ × क × $\frac{ई}{फ}$ अथवा, २ $\frac{अकई}{बफ}$ आहे.

जरी अ, अब, अबक इत्यादि, यांस पूर्ण, आणि $\frac{अ}{ब}$, $\frac{क}{ड}$, $\frac{अक}{ब}$, इत्यादि, यांस अपूर्ण पदें ह्मणतात तरी तें ह्मणणें त्यांचे अंकगणित गुणाविषयीं नाहीं, परंतु बीजगणित गुणाविषयीं आहे; कां कीं, अपूर्णांकाचे ठिकाणीं अक्षरें मांडितात, ह्मणून जें बीजरूपानें मनन केलें असतां पूर्ण होतें, तेंच अंकगणितरूपानें मनन केलें असतां अपूर्ण होतें; आणि याप्रमाणें याचे उलटेंहि होतें. उदाहरण, अशी कल्पना कर, कीं अ हा $\frac{१}{२}$ याचे ठिकाणीं घेतला, आणि ब हा $\frac{१}{४}$ याचे ठिकाणीं घेतला, तर बीजरूपानें अपूर्ण पद आहे, तोच गणितरूपानें $\frac{१}{२}$ अपूर्ण पद होतो; परंतु, $\frac{अ}{ब}$ हें बीजरूपानें जें अपूर्ण पद तें अंकगणितरूपानें $\frac{१}{२} \div \frac{१}{४}$ = २, पूर्ण पद होतें.

यामुळें, पूर्ण किंवा अपूर्ण पदांविषयीं बोलणें पडलें, त
त्याचे बीजरूपावर लक्ष्य ठेवावें, त्यांचे गणित किमती
करूं नये.

या पुढील समीकरणांमध्यें जी रीति लक्षांत येती, ती रीति
ल्या पदांचा गुणाकाराचा आधार आहे ;

म (अ+ब) = मअ+मब

म (अ—ब) = मअ—मब

पहिल्यानें, हेंच केलें पाहिजे कीं, अ+ब यांस म वेळा घ
केवळ म वेळा अ घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ जितक्या
वा वेळेचे भाग वेळा घेतला, तितके वेळा ब किंवा बचे भा
राहिले. यामुळें मअ हा मब इतक्यानें उणा आहे, ह्मणून
हा इच्छिला गुणाकार आहे.

दुसऱ्यानें, याप्रमाणें केलें पाहिजे, कीं अ—ब यास म वे
जर केवळ अ हा म वेळा घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ
वेळा किंवा वेळेचा भाग वेळा घेतला, तितक्यानें ब किंवा
अधिक घेतला. यामुळें मअ हा मब इतक्यानें अधिक आ
मअ—मब हा इच्छिला गुणाकार आहे.

यावरून हें पुढील समीकरण सिद्ध होतें.

म(अ+ब—क—ड)=मअ+मब—मक—मड

ह्मणून, अ+ब, यांचे ठिकाणीं, प घे; आणि क+ड, यांचे
क घे; तर अ+ब—क—ड हे प—क आहे. २३ आणि २४

आणि म(अ+ब—क—ड)=म(प—क)=मप—मक

परंतु, मप=मअ+मब आणि मक=मक+मड

तेव्हां, मप—मक=मअ+मब—(मक+मड)

=मअ+मब—मक—मड

या पुढील उदाहरणांस मागील सांगीतलेल्या रिती लागू होतात ;

$$\text{२(अ+ब)=२अ+२ब} \qquad \text{२}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{(अ−ब)=२}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ−२}\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ब}$$

$$\text{अब(अ−ब)=अअब−अबब} \qquad \text{२अ(अ−अअ)}^{*}\text{=२अअ−२अअअ}$$

$$\text{२अबक(अब−अक+४)=२अअबबक−२अअबकक+१२अबक}$$

$$\text{२}\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}+\frac{\text{क्ष}}{\text{३}}\right)=\text{क्ष}+\frac{\text{२क्ष}}{\text{३}} \qquad \text{६}\left(\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}+\frac{\text{क्ष}}{\text{३}}\right)=\text{३क्ष+२क्ष}$$

$$\text{४०}\left(\frac{\text{१}}{\text{२}}-\text{क्ष}\right)=\text{२०−४०क्ष} \qquad \text{अ}\left(\frac{\text{३}}{\text{४}}+\text{ब}\right)=\frac{\text{३}}{\text{४}}\text{अ+अब}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\left(\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\text{ब}\right)=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\,\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\text{ब}=\text{१+अ}$$

$$\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}}(\text{क्षज्ञ+१})=\frac{\text{क्षक्षयज्ञ}}{\text{ज्ञ}}+\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}}=\text{क्षक्षय}+\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{अ+ब}}\left\{\text{क+ड−ई}\right\}=\frac{\text{अक}}{\text{अ+ब}}+\frac{\text{अड}}{\text{अ+ब}}-\frac{\text{अई}}{\text{अ+ब}}$$

$$\text{पकरस}\left(\frac{\text{१}}{\text{प}}+\frac{\text{१}}{\text{क}}+\frac{\text{१}}{\text{र}}-\frac{\text{१}}{\text{पकर}}\right)=\text{करस + परस + पकस−स}$$

अ+ब यांस क+ड यांणीं गुणायासाठीं, क्षणमात्र, अ+ब यांचे ठिकाणीं प, घे. तर प, हा क+ड यांणीं गुणिला, आणि क+ड हा, प यांणीं गुणिला हीं एकच आहेत, ह्मणजे, पक+पड आहे,

$$\text{(अ+ब)(क+ड) = (अ+ब)क+(अ+ब)ड}$$

$$\text{परंतु (अ+ब)क=अक+बक आणि (अ+ब)ड=अड+बड}$$

$$\therefore \text{(अ+ब)(क+ड)=(अक+बक)+(अड+बड)}$$

$$\text{=अक+बक+अड+बड.}$$

अ+ब यांस क−ड यांणीं गुणायाचें असेल, तेव्हां अ+ब=प, घे, तर प(क−ड) = पक − पड हें होतें, अथवा

---

* या उदाहरणांत पद्धति शक्य किंवा अशक्यस्वरूपाची आहे कीं नाहीं, ही गोष्ट एथें लक्षांत आणिली नाहीं.

$$(अ+ब)(क-ड) = (अ+ब)क-(अ+ब)ड$$
$$= (अक+बक)-(अड+बड)$$
$$= अक+बक-अड-बड$$

अ-ब यांस क-ड यांणीं गुणायाचें असेल, तेव्हां अ-ब=प, घे, तर प(क-ड) = पक- पड, अथवा

$$(अ-ब)(क-ड) = (अ-ब)क-(अ-ब)ड$$
$$= (अक-बक)-(अड-बड)$$
$$= अक-बक-अड+बड$$

वरची कृति करण्याचा दोन रिती आहेत, परंतु शिकणारानें सद्य: पहिल्या रितीवर लक्ष्य द्यावें.

पहिली रीति. अ+ब-२क या गुण्यास ड-अ-क या गुणकानें गुणायाचें.

एथें, गुण्य ड वेळा घेऊन, त्या गुणाकारांतून, तो गुण्य अ वेळा, आणि क वेळा घेऊन, एकामागें एक वेगवेगळे वजा केले पाहिजेत; ह्मणजे गुण्य अ+क वेळा घेऊन, ड वेळांतून वजा करायाचा आहे.

गुण्य ड वेळा = अड + बड-२कड

यांची बेरीज { गुण्य अ वेळा = अअ + अब-२अक
गुण्य क वेळा = अक + बक-२कक

ह्मणजे, गुण्य, अ+क वेळा = अअ+अक+अब+बक-२अक-२कक, हें

गुण्य ड वेळांतून वजाकरून बाकी { अड + बड + २अक + २कक-२कड
-अअ-अक-अब-बक

दुसरी रीति. वरचीं उदाहरणें पाहिलीं असतां उघड दिसतें, कीं गुणाकाराची रीति या पुढीलप्रमाणें आहे; **गुण्यगुणकांचीं पहिलीं पदें यांस + हें चिन्ह आहे असें मनांत आण; नंतर गुण्याचें प्रत्येक**

पदाला अनुक्रमें गुणकाचे प्रत्येक पदानें गुण, आणि पदें एक जातीचे चिन्हाचीं असतील, त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी + हें चिन्ह कर, आणि जीं पदें भिन्न चिन्हांचीं असतील, त्याचे गुणाकारापूर्वी − हें चिन्ह कर. मागील उदाहरण एथें शिरस्त्याप्रमाणें वरचे रितीवरून वेगळाल्या पदापुढें योग्य चिन्हें मांडून, करून दाखविलें आहे.

अ+ब −२क

ड−अ−क

ड याणें गुणून. . . .	अड+बड−२कड	हा इच्छिला गुणाकार आहे.
अ याणें गुणून. . . .	−अअ−अब+२अक	
क याणें गुणून. . . .	−अक−बक+२कक	

जेव्हां वेगवेगळ्या ओळींमध्यें एकसारिखींच पदें येतात, तेव्हां मागून त्यांचा संक्षेप करायासाठीं, एक जातीचीं पदें एकाखालीं एक लिहायास सोईस पडतें, जसें या पुढील उदाहरणांत,

क्षक्ष−२क्ष+१ यांस

क्ष−४ यांणीं गुण

क्ष याणें गुणून. .	क्षक्षक्ष−२क्षक्ष+क्ष	हा इच्छिला गुणाकार आहे.
४ याणीं गुणून . .	−४क्षक्ष+८क्ष−४	
	क्षक्षक्ष−६क्षक्ष+९क्ष−४	हा अतिसंक्षेपरूप आहे.

परंतु सद्यः वरचा रितीपेक्षां ही पुढील रीति बरी आहे;

क्षक्ष−२क्ष+१ यांस

क्ष−४ यांणीं गुण

क्षवेळा गुणून यांतून. . .	क्षक्षक्ष−२क्षक्ष+क्ष	पहिले ओळींतून
४ वेळा गुणून वजा कर.	४क्षक्ष−८क्ष+४	दुसरी ओळ वजा कर

क्षक्षक्ष−६क्षक्ष+९क्ष−४ हा इच्छिला गुणाकार झाला.

हीं पुढील तीन उदाहरणें, मोठ्या उपयोगाचीं आहेत, यासाठीं शिकणारानें तीं आणि त्यांसारिखीं दुसरीं उदाहरणें पहातांच मांडावीं.

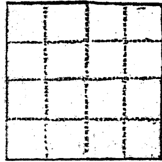
अ+ब यांस
अ+ब यांणीं गुण
अअ+अब यांशिं
अब+बब यांस मेळीव
अअ+२अब+बब हा गुणाकार आहे

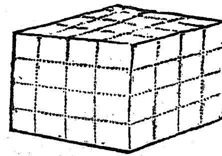
अ−ब यांस
अ−ब यांणीं गुण
अअ−अब यांतून
अब−बब यांस वजा कर.
अअ−२अब+बब हा गुणाकार आहे

अ+ब यांस
अ−ब यांणीं गुण
अअ+अब यांतून
अब+बब यांस वजा कर
अअ−बब हा गुणाकार

हा पुढील व्याख्या एथें सांगायास योग्य आहेत.

चौरस ह्मणजे चार बाजूंची आकृति आहे, त्या चार बाजूंची लांबी बरोबर आहे, आणि जवळ जवळचा बाजू परस्परांवर लंब आहेत.





घन ह्मणजे भरींव आकृति आहे, जिचा मर्यादा साहा समचौरसें आहेत, जसा घडलेला चौरस दगड जाची लांबी, रुंदी, आणि जाडी बरोबर आहे.

जें चौरस चार इंच लांबीचें आहे, त्यामध्यें एक एक इंच लांबीचीं

४×४ इतकीं चौरसें आहेत, जें चौरस क्ष इंच लांबीचें आहे, त्यामध्यें एक इंच लांबीचीं, अशीं क्षक्ष चौरसें आहेत. चौरस इंचांचा क्ष ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळीमध्यें क्ष चौरसें आहेत.

जो घन चार इंच लांबीचा आहे, त्यामध्यें एकेक इंच लांबीचे, असे, ४×४×४ इतके घन आहेत; जो घन क्ष लांबीचा आहे, त्यामध्यें एकेक इंच लांबीचे क्षक्षक्ष घन आहेत. घन इंचांचे क्ष थर आहेत, आणि प्रत्येक थरामध्यें क्षक्ष घनइंच आहेत.

वर दाखविलें कीं, क्ष एकं लांबीचा रेघेवर चौरस केलें असतां क्षक्ष असें ह्मणतात, आणि क्ष एकं लांबीचा रेघेवर घन केला असतां, क्षक्षक्ष असें ह्मणतात; अशा संबंधामुळें, क्षक्ष यांस क्ष याचें चौरस, अथवा वर्ग, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा घन, असें ह्मणण्याची नेहमीं रीति पडली आहे. परंतु क्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा चतुर्घात, आणि क्षक्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा पंचघात, इत्यादि ह्मणण्याची रीति आहे. अशानें क्ष नुसता असला तर त्यास क्षचा प्रथम घात, आणि क्षक्ष यांस क्षचा द्वितीय घात, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा तृतीयघात परंतु वर्ग आणि घन, हे दोन शब्द द्वितीय आणि तृतीय घात यांचे ठिकाणीं ह्मटल्यानें, सोईवार पडतें, यासाठीं असें ह्मणण्याची चाल सोडीत नाहीं.

वरचा तीन उदाहरणांचे गुणाकार या पुढीलप्रमाणें मांडतात.

१. (अ+ब)(अ+ब)=अअ+२अब+बब

अथवा, **दोन परिमाणांचे** बेरिजेचा **वर्ग, त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची** बेरीज, **त्याच** दोन **परिमाणांचे गुणाकाराचे दुपटीनें अधिक** वाढविली, **इतक्या बरोबर आहे.**

२. (अ–ब)(अ–ब)=अअ–२अब+बब

अथवा, **दोन परिमाणांचे** वजाबाकीचा **वर्ग, त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची** बेरीज **त्याच दोन परिमाणांचे गुणाकाराचे दुपटीनें** उणी केली, **इतक्या बरोबर आहे.**

३. (अ+ब)(अ−ब)=अअ−बब

अथवा दोन परिमाणांचे बेरिजेस, त्याच परिमाणांचे वजाबाकीनें गुणिलें, तर तो गुणाकार त्या दोन परिमाणांचे वर्गांचे वजाबाकी बरोबर आहे.

आतां. अब आणि २अ हीं दोन परिमाणें आहेत, असें मनांत आण. तर वर सांगीतल्यावरून याप्रमाणें होईल.

अब×अब = अअबब, आणि २अ×२अ = ४अअ

२(अब×२अ)=४अअब

(अब+२अ)(अब+२अ)=अअबब+४अअब+४अअ

(अब−२अ)(अब−२अ)=अअबब−४अअब+४अअ

(अब+२अ)(अब−२अ)=अअबब−४अअ

हीं पुढील उदाहरणें शिकणाराचे अभ्यासाकरितां फार उपयोगी आहेत.

$(\text{अ}\pm\frac{१}{\text{अ}})$ यांचा वर्ग =*$\text{अअ}\pm२+\frac{१}{\text{अअ}}$

$(\text{अ}+\frac{१}{\text{अ}})(\text{अ}-\frac{१}{\text{अ}}) = \text{अअ}-\frac{१}{\text{अअ}}$

(२अक्ष±ब)यांचा वर्ग =४अअक्षक्ष±४अबक्ष+बब

(२अक्ष+ब)(२अक्ष−ब)=४अअक्षक्ष−बब

(अ+ब+क)यांचा वर्ग =(अ+ब)(अ+ब)+२(अ+ब)क+कक

=अअ+बब+कक+२अब+२बक+२कअ

---

* समीकरणांत ± अशीं चिन्हें समीकरणांत, वारंवार आलीं, तर दोन समीकरणें एक ठिकाणीं जोडिलेलीं आहेत असें जाणावें. वरचें चिन्ह घेण्याचा अनुक्रम धरिला तर शेवटपर्यंत वरचें चिन्ह घ्यावें, आणि खालचाचा अनुक्रम धरिला तर शेवटपर्यंत खालचें चिन्ह घ्यावें, जसें,

अ±ब=क∓उ

हें अ+ब=क−उ अथवा अ−ब=क+उ याप्रमाणें होईल.

शिकणारानें अशा द्विरूप चिन्हांनीं काम करूं नये, परंतु या पुस्तकांत अशीं वारंवार येतात ह्मणून त्यांचा अर्थ कळायासाठीं मात्र एथें दाखविलीं आहेत.

(अ+ब+क)(अ+ब−क) = (अ+ब)(अ+ब)−कक

= अअ+बब−कक+२अब

(क+अ−ब)(ब+क−अ) = $(क+\overline{अ-ब})(क-\overline{अ-ब})$

= कक−(अ−ब)(अ−ब)

= २अब+कक−अअ−बब

= २अब−(अअ+बब−कक)

वरचे दोन शेवटील उदाहरणांवरून, या पुढील चार पद्धतींचा गुणाकार कर.

अ+ब+क, अ+ब−क, ब+क−अ, क+अ−ब,

२अअबब+ २बबकक+ २ककअअ−अअअअ−बबबब−कककक, हा गुणाकार आहे.

खालचे उदाहरणाचे साहाय्यानें वरचीं उदाहरणें करून दाखीव आणि खालचेंहि उदाहरण कर.

(प+क−र) याचा वर्ग = पप+कक+रर+२पक−२कर−२पर

हीं पुढील अनेक प्रकारचीं गुणाकाराचीं उदाहरणें, अभ्यासाकरितां केवळ तोंडानें सांगीतलीं पाहिजेत.

(अ+बक्ष)(अ+कक्ष) = अअ+अबक्ष+अकक्ष+बकक्षक्ष

(क्ष+अ)(क्ष+ब) = क्षक्ष+अक्ष+बक्ष+अब

(क्ष−अ)(क्ष−ब) = क्षक्ष−क्षक्ष−बक्ष+अब

(क्ष+१)(क्ष−३) = क्षक्ष−२क्ष−३

(क्ष−१)(क्ष−३) = क्षक्ष−४क्ष+३

(२क्ष+१)(क्ष−१) = २क्षक्ष−क्ष−१

हीं पुढील कृत्यें शिकणाराचे अभ्यासाकरितां लिहिलीं आहेत.

१. जर अ आणि ब हीं भलतीं दोन परिमाणें असतील, आणि त्यांत बपेक्षां अ मोठा असेल, आणि जर, **स** त्यांचे बेरिजेचा वर्ग, **ड** त्यांचे

वजाबाकीचा वर्ग, प त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांचा गुणाकार असेल तर याप्रमाणें होईल;

स+ड= २ (अअ+बब) स−ड= ४ अब

स+प = २अ(अ+ब) स−प = २ ब(अ+ब)

ड+प = २अ(अ−ब) प−ड= २ ब(अ−ब)

२. जर दोन अंकांची वजाबाकी केवळ एक एकं आहे, तर त्या अंकांचे वर्गांची वजाबाकी, त्या अंकांचा बेरिजेबरोबर आहे, आणि जर दोन वेगळाले अपूर्णांक एकत्र मिळून पूर्ण एक एकं होईल, जसें १/४ आणि ३/४, तर त्यांची वजाबाकी त्यांचे वर्गांचे वजाबाकी बरोबर आहे.

३. क्षक्ष−यय आणि २क्षय या दोन पद्धतींचे वर्गांची बेरीज, क्षक्ष+यय यांचे वर्गाबरोबर आहे.

रितीप्रमाणें, अ−ब याचा वर्ग आणि ब−अ याचा वर्ग हे दोन्ही बरोबर आहेत; कां कीं अ − ब याचा वर्ग अअ − २अब + बब आणि ब−अ याचा वर्ग बब−२ बअ+अअ हे दोन्ही बरोबर आहेत हें स्पष्ट दिसतें, १४ व्ये पृष्ठावर पहा, जेव्हां अ बरोबर ब असेल, तेव्हां ब−अ किंवा अ−ब शून्य आहे; परंतु असें नसेल तर अ−ब अथवा ब−अ, या दोहोंतील एक तरी अशक्य असावें; कां कीं तसें नसतां अ−ब अथवा ब−अ अशा उदाहरणामध्यें लाहानांतून मोठें वजा करायाचें अगत्य पडेल. परंतु त्याच कारणावरून, ब−अ अथवा अ−ब या दोहोंतून एक तरी अगत्य शक्य असावें; यामुळें त्यांतील शक्य पद्धतीचा वर्ग, अअ+बब−२अब, हाही अगत्य शक्य असावा. ह्मणून, जर अ अथवा ब या दोहोंतून एक दुसऱ्यापेक्षां अधिक आहे, तर २अब यापेक्षां अअ+बब अगत्य अधिक असावा. जरी बीज कृतीवरून समजण्याजोगें उत्तर निघतें तरी ती कृति समजायाजोगी असावी, असा निश्चय करवत नाहीं हेंही नजरेस येतें. (३−७) अशक्यरूप आहे तथापि (३−७)×(३−७) यांचा गुणाकार आणि (७−३)(७−३) यांचा गुणाकार बीजांतील गुणाकार रितीप्रमाणें सारखा आहे. ह्मणजे १६. हा दोष खरा आहे, परंतु त्याचा उपाय पुढें सांगण्यांत येईल; आणि या

ग्रंथांत एथपर्यंत सांगीतलें, त्यांत असें पाहण्यांत येतें, कीं जोंपर्यंत कृतीवरून अव्यक्त पद सांपडून त्याचा किमतीनें कृतीची तपासणी पुनः होई, तोंपर्यंत अव्यक्त परिमाणाची किंमत काढायास ती कृति खरी आहे किंवा नाहीं, हें जाणवत नाहीं.

भागाकार.

जे भागाकार करायास उघडे, व जे भागाकार करायास उघडे नाहींत, अशा दोन प्रकारांनीं सद्यः बीजांतील भागाकार सांगतों. उदाहरण. अब यास अ याणें भाग, ह्मणजे, अब यांत अ किती वेळा जातो, हें विचारिलें तर, बअ ह्मणजे अब अथवा ब वेळा अ घेतला हें उत्तर आहे; त्या कारणास्तव अब यांत अ हा ब वेळा जातो; यामुळें अब हा अनें भागिला तर भागाकार ब आहे. या प्रकारांत भागाकार करण्याची ही पुढील सांगितलेली रीति सर्वांपेक्षां सोपी आहे; जेव्हां भाज्यांत, भाजकांतील अक्षरें गुणक असतील तेव्हां तीं अक्षरें दोहोंकडे छेकावीं ह्मणजे भागाकार होतो.

या पुढील उदाहरणांत ही रीति उघड दिसती.

भाज्य	भाजक	भागाकार	भाज्य	भाजक	भागाकार
अब	अ	ब	१२अअक्ष	६अअक्ष	२
अबक	अब	क	२$\frac{1}{2}$बयज्ञ	$\frac{1}{4}$बय	१०ज्ञ
२अबक्ष	२क्ष	अब	अअअअ	अअअ	अ
अअबबक्ष	अब	अबक्ष	अअअअ	अअ	अअ
६अबकक	३अबक	२क	क्षयज्ञ	क्षयज्ञ	१

वजाबाकी आणि भागाकार यांचे कल्पनेचे धांदलीमुळें, नवे शिकणारे, ० आणि १ या दोहोंचे गुणांविषयीं बहुतकरून चुकतात. हें बहुतकरून भाषेचे फेरफारानें होतें. जर नवे शिकणारास असें विचारिलें की ७ यामध्यें ७ किती वेळा जातात, तर तो निःसंशय उत्तर देईल कीं कांहीं वेळा जात नाहीं; आणि हें उत्तर

एक अर्थी खरेंच आहे, कां कीं ७ मध्यें ७ अनेक वेळा जात नाहींत परंतु, केवळ एक वेळ जातात. आतां बीजांत ही गोष्ट सर्वदां लक्षांत ठेविली पाहिजे कीं वेळा ह्मटल्या असतां, एक वेळा, किंवा अनेक वेळा, किंवा एक वेळेचा भाग, किंवा एक वेळा आणि एक वेळेचा भाग, किंवा अनेक वेळा, आणि एक वेळेचा भाग, हा अर्थ वेळा या शब्दाचा आहे. यामुळें, जरी

क्ष यास क्ष याणें उणा केला असतां शून्य होतें,

तथापि क्ष यास क्ष याणें भागिला असतां एक होतो,

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ आणि $\frac{\text{मअ}}{\text{मब}}$ हे सारखेच आहेत, असा अपूर्णांकांतील सिद्धांत वर सांगितलेल्या उदाहरणास अनुसरून जवळ जवळ आहे. कां कीं $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ यास म याणें गुणिला असतां $\frac{\text{मअ}}{\text{ब}}$ होतो, आणि $\frac{\text{मअ}}{\text{ब}}$ यास म याणें भागिला असतां $\frac{\text{मअ}}{\text{मब}}$ होतो. परंतु गुणक आणि भाजक बरोबर असतील, तर गुणाकार करून लागलाच भागाकार केला असतां कोणतेंहि परिमाण पहिल्याच रूपासारिखें राहातें.

जर अनेक पदांची एक पद्धति आहे, आणि त्यांतील प्रत्येक पदांमध्यें एक किंवा अनेक अक्षरें साधारण आहेत, तर गुणाकाराचा रितीवरून दुसरी एक पद्धति त्याच साधारण एक अक्षरानें अथवा त्या अक्षरांचा गुणाकारानें गुणिली इतकी आहे हें स्पष्ट आहे. जसें, अब+अक हीं ब+क गुणिला अ याचे बरोबर आहे; आणि अअब–अबक ही अ–क गुणिला अब याचे बरोबर आहे. यावरून, जेव्हां भलत्ये पद्धतीस एक किंवा अनेक अक्षरांचे गुणाकारानें भागायाचें आहे, तेव्हां भाज्याचे प्रत्येक पदांतून तीं अक्षरें छेकून टाकावीं. परंतु जेथें कोणत्या एक पदाचीं सर्व अक्षरें छेकलीं जातात, त्या ठिकाणीं १ हा अंक लिहिण्याचें पक्कें स्मरण ठेविलें पाहिजे. उदाहरण, अ+अब, भागिला अ ह्मणजे १+ब याचे बरोबर आहे. आणि अक–अअक+अकक, भागिला अक ह्मणजे १–अ+क यांचे बरोबर आहे.

या गोष्टीविषयीं हीं पुढील उदाहरणें, वरचे उदाहरणाप्रमाणें, मांडिलीं आहेत.

भाज्य	भाजक	भागाकार
२अब—२बक+४अबक	२ब	अ—क+२अक
अअअ—अअ+अ	अ	अअ—अ+१
६अब—३अ+३ब	३	२अब—अ+ब
अअब—अबब	अब	अ—ब
अक्षक्षय—क्षक्षक्षयय	क्षक्षय	अ—क्षय

अब यांस अ याणें भागायाचें असल्यास या पुढील कृतीनें करावें. अशा कृतीचें फळ $\frac{\text{अब}}{\text{अ}}$ हा अपूर्णांक होतो ; जाचे, अंश आणि छेद यांस अ याणें भागिलें असतां त्यांचे किमतींत अंतर पडत नाहीं. परंतु त्याचा रूपभेद $\frac{\text{ब}}{१}$ ह्मणजे ब हा होतो.

वरचे उदाहरणांत अशी कृति अनुपयोगी आहे ; परंतु असें मनांत आण, कीं अब यास अक यांणीं भागायाचें आहे. या उदाहरणांत अ, ब, आणि क, हे कोणत्या अंकस्थानीं घेतले आहेत, हें कळल्याशिवाय यांचा भागाकार पूर्ण होण्यास अशक्य. परंतु त्या भागाकाराचें रूप $\frac{\text{अब}}{\text{अक}}$ अशा चिन्हानें दाखवितात. वरचे रितीप्रमाणें $\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ असें संक्षेपरूप होतें. या ठिकाणीं भागाकार पूर्ण होत नाहीं, परंतु त्यास संक्षेप देऊन भागाकार अधिक सरळ केला आहे.

$$\frac{\text{२ब}}{\text{२क}} = \frac{\text{ब}}{\text{क}} \qquad \frac{\text{अभब}}{\text{अक्ष}} = \frac{\text{अब}}{\text{क्ष}} \qquad \frac{\text{३अममन}}{\text{६अअम}} = \frac{\text{मन}}{\text{२अ}}$$

$$\frac{\text{प}}{\text{पक}} = \frac{१}{\text{क}} \qquad \frac{\text{३अब}}{\text{अअब}} = \frac{३}{\text{अ}} \qquad \frac{\text{२१अविब}}{\text{२८क्षब}} = \frac{\text{३अवि}}{\text{४क्ष}}$$

एक पदानें भागिलेल्या अनेक पदांचा पद्धतीस संक्षेपरूप देतां येतें. उदाहरण, क्षय+यज्ञ—ज्ञक्ष यांस क्षयय यांणीं भागिलें असतां या पुढील प्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{क्षय}}{\text{क्षयय}} + \frac{\text{यज्ञ}}{\text{क्षयय}} - \frac{\text{ज्ञक्ष}}{\text{क्षयय}} \text{ अथवा } \frac{१}{\text{य}} + \frac{\text{ज्ञ}}{\text{क्षय}} - \frac{\text{ज्ञ}}{\text{यय}}$$

$$\frac{\text{२वि—क्षक्ष+विक्ष}}{\text{विक्ष}} = \frac{२}{\text{क्ष}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{वि}} + १$$

$$\frac{\text{अ+ब+क}}{\text{अबक}} = \frac{१}{\text{बक}} + \frac{१}{\text{अक}} + \frac{१}{\text{अब}}$$

$$\frac{\text{अ+ब}}{\text{अअ}} = \frac{१}{\text{अ}} + \frac{\text{ब}}{\text{अअ}} \qquad \frac{\text{अअ+१}}{\text{अ}} = \text{अ} + \frac{१}{\text{अ}}$$

$$\frac{\text{क्ष+४य—३ज्ञ+२}}{६} = \frac{\text{क्ष}}{६} + \frac{\text{२य}}{३} - \frac{\text{ज्ञ}}{२} + \frac{१}{३}$$

वर जें सांगितलें आहे त्यांत भागाकाराचा उघड प्रकार आहे. जां-चीं उत्तरें काढण्यास अधिक कृति केली पाहिजे, त्यांतील एक उदाहरण सांगतों; **क्षक्षक्ष + ययय, यांमध्यें क्ष + य किती वेळा जातात?** कांहीं वेळपर्यंत अशा कृतींची गरज लागणार नाहीं, यास्तव ती तकुब ठेऊन तिचे योग्य जागीं पुढें सांगण्यांत येईल. तथापि कांहीं जातीचे उदाहरणांचीं उत्तरें मागील गुणाकाराचे कृत्यांपासून एकदांच निघतील. **३५ आणि ३६ पृष्ठ पाहा.** उदाहरण, उघड दिसतें कीं, क्षक्ष−९ यांमध्यें क्ष+३ हे क्ष−३ वेळा जातात.

किसेक अपूर्णांकांस नुसत्या दृष्टीनें संक्षेप देतां येतो त्याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें पाहा.

$$\frac{\text{अ+अब}}{\text{अ−अब}} = \frac{\text{१+ब}}{\text{१−ब}} \qquad \frac{\text{३क्ष+६क्षक्ष}}{\text{९क्षय−३क्ष}} = \frac{\text{१+२क्ष}}{\text{३य−१}}$$

$$\frac{\text{अ−अअ}}{\text{२अ+अज्ञ}} = \frac{\text{१−अ}}{\text{२+ज्ञ}} \qquad \frac{\text{अअ+३अब}}{\text{अब+१२अ}} = \frac{\text{अ+३ब}}{\text{ब+१२}}$$

बीजाचा पद्धतीस कांहीं मिळवून तें लागलेंच वजा केलें; आणि तीस कांहीं अंकानें गुणून तितक्यानें लागलेंच भागिलें; तसेंच जितकें वजा केलें, तितकें लागलेंच मिळविलें. आणि जितक्यानें भागिलें, तितक्यानें लागलेंच गुणिलें; अशा उलटसुलट कृतींनीं किंमत बदलल्यावांचून, बीजाचा पद्धती फिरवून निरनिराळ्या रूपानें मांडाव्या लागतात. जो क्ष खालीं चार प्रकारानीं लिहिला आहे त्यावरून ही वरचीं कृति समजेल.

$$\text{क्ष+अ−अ} \qquad \text{क्ष−अ+अ} \qquad \frac{\text{अक्ष}}{\text{अ}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}\times\text{अ}$$

जसें $\text{अ+क्ष} = \text{२अ+क्ष−अ} = (\text{१}+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}})\text{अ}$

$$\text{अअ+२अब−क} = \text{अअ+२अब+बब−(क+बब)}$$
$$= \text{(अ+ब)(अ+ब)−(क+बब)}$$
$$\text{बब−४अक} = \text{बब}(\text{१}-\frac{\text{४अक}}{\text{बब}}) = \text{अबक}(\frac{\text{ब}}{\text{अक}}-\frac{\text{४}}{\text{ब}})$$
$$\text{म+न} = \text{मन}(\frac{\text{१}}{\text{न}}+\frac{\text{१}}{\text{म}}) = \text{न}(\frac{\text{म}}{\text{न}}+\text{१}) = \text{म}(\text{१}+\frac{\text{न}}{\text{म}})$$
$$\text{क्ष} = \frac{\text{१}}{\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}} = \frac{\text{१+क्ष}}{\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}(\text{१+क्ष})} = \frac{\text{१+क्ष}}{\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}+\text{१}}$$

५ आणि ६ वें पृष्ठ पाहा.

अपूर्ण बीजाच्या संक्षेप करण्याच्या वेगळाल्या रिती ज्या पुढें येणार त्यांविषयीं खालीं उदाहरणें लिहिलीं आहेत. अंकगणितांत अपूर्णांकांविषयीं ज्या रिती सिद्ध झालेल्या आहेत, त्या बीजांतल्या मिळवणी इत्यादिकांचे रितीसहित लाविल्या आहेत. पुढील उदाहरणें चार प्रकारानीं दाखविलीं आहेत आणि प्रत्येक प्रकाराचे आरंभीं एक एक सोपें उदाहरण लिहिलेलें आहे. आणि त्या उदाहरणाच्या उलगडण्यास जी कृति लागती ती बाकी राहिलेल्या उदाहरणांवर लागू होईल.

प्रथम प्रकार.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{मअ}}{\text{मब}}$$

$$\frac{१+\frac{१}{\text{क्ष}}}{१+\frac{१}{\text{क्षक्ष}}} = \frac{(१+\frac{१}{\text{क्ष}})\text{क्षक्ष}}{(१+\frac{१}{\text{क्षक्ष}})\text{क्षक्ष}} = \frac{\text{क्षक्ष}+\text{क्ष}}{\text{क्षक्ष}+१}$$

$$\frac{\text{वि}+\frac{१}{२}}{\frac{२}{३}\text{वि}+\frac{१}{४}} = \frac{(\text{वि}+\frac{१}{२})१२}{(\frac{२}{३}\text{वि}+\frac{१}{४})१२} = \frac{१२\text{वि}+६}{८\text{वि}+३}$$

$$\text{य} = \frac{\text{य}(\text{य}-१)}{\text{य}-१} = \frac{\text{यय}-\text{य}}{\text{य}-१} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{अक्ष}+\text{भक्ष}}{\text{भक्ष}+\text{अभ}}$$

$$\frac{१}{\text{अ}+\text{ब}} = \frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अअ}-\text{बब}} = \frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अअ}+२\text{अब}+\text{बब}} = \frac{४}{४\text{अ}+४\text{ब}}$$

$$\frac{\text{क्ष}-४}{२\frac{१}{२}} = \frac{२\text{क्ष}-८}{५} = \frac{४\text{क्ष}-१६}{१०} = \frac{२\text{अक्ष}-८\text{अ}}{५\text{अ}}$$

$$\frac{७\text{क्ष}-४}{१०} = \frac{\frac{१}{२}(७\text{क्ष}-४)}{\frac{१}{२}(१०)} = \frac{३\frac{१}{२}\text{क्ष}-२}{५}$$

$$\frac{\frac{१}{\text{अ}}+\frac{१}{\text{अब}}}{\text{ब}-\text{अ}+\frac{१}{\text{ब}}} = \frac{\text{अब}(\frac{१}{\text{अ}}+\frac{१}{\text{अब}})}{\text{अब}(\text{ब}-\text{अ}+\frac{१}{\text{ब}})} = \frac{\text{ब}+१}{\text{अबब}-\text{अअब}+\text{अ}}$$

दुसरा प्रकार.

$$\text{अ}+\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{अय}+\text{क्ष}}{\text{य}} \qquad \text{अ}-\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{अय}-\text{क्ष}}{\text{य}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}-\text{अ} = \frac{\text{क्ष}-\text{अय}}{\text{य}}$$

$$१-\frac{१}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्ष}-१}{\text{क्ष}} \qquad \text{क्ष}-\frac{१}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्षक्ष}-१}{\text{क्ष}}$$

$$\text{२}-\frac{\text{य}-\text{१}}{\text{य}+\text{१}}=\frac{\text{२य}+\text{२}-(\text{य}-\text{१})}{\text{य}+\text{१}}=\frac{\text{य}+\text{३}}{\text{य}+\text{१}}$$

$$\text{अ}-\frac{\text{अअ}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}} \qquad \text{अ}-\frac{\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{\text{अअ}}{\text{अ}+\text{ब}}$$

$$\text{अ}+\text{ब}-\frac{\text{अअ}-\text{२अब}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{\text{४अब}+\text{बब}}{\text{अ}+\text{ब}}$$

$$\text{अ}+\text{ब}+\frac{\text{अअ}-\text{२अब}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{\text{२अअ}+\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}}$$

$$\frac{\text{य}+\text{१}}{\text{य}-\text{१}}+\text{य}+\text{१}=\frac{\text{य}+\text{यय}}{\text{य}-\text{१}}=\text{य}\ \frac{\text{य}+\text{१}}{\text{य}-\text{१}}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}-\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}-\text{२}=\frac{\text{ब}-\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}-\text{क्ष}=\frac{\text{क्ष}-\text{क्षय}}{\text{य}}$$

$$\frac{\text{अब}+\text{बक}+\text{कअ}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}}-\text{क}=\frac{\text{अब}-\text{कक}}{\text{अ}+\text{ब}+\text{क}}$$

तिसरा प्रकार.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}+\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}=\frac{\text{अय}+\text{बक्ष}}{\text{बय}} \qquad \frac{\text{अ}}{\text{ब}}-\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}=\frac{\text{अय}-\text{बक्ष}}{\text{बय}}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अ}-\text{ब}}-\frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})-(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})}{(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})}=\frac{\text{४अब}}{\text{अअ}-\text{बब}}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{१}}{\text{य}}=\frac{\text{क्ष}+\text{य}}{\text{क्षय}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}+\frac{\text{य}}{\text{क्ष}}=\frac{\text{क्षक्ष}+\text{यय}}{\text{क्षय}}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{क}+\text{ड}}-\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{कब}-\text{अड}}{\text{कक}+\text{कड}} \qquad \frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{क}-\text{ड}}-\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{अड}-\text{बक}}{\text{कक}-\text{कड}}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}+\text{य}}-\frac{\text{य}}{\text{क्ष}-\text{य}}=\frac{\text{क्षक्ष}-\text{२क्षय}-\text{यय}}{\text{क्षक्ष}-\text{यय}} \qquad \frac{\text{प}}{\text{क}}+\frac{\text{क}}{\text{पप}}=\frac{\text{पपप}+\text{कक}}{\text{पपक}}$$

चवथा प्रकार.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}=\frac{\text{अक्ष}}{\text{बय}} \qquad \frac{\text{अ}}{\text{ब}}\div\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}=\frac{\text{अय}}{\text{बक्ष}}$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{१}}{\text{क्ष}+\text{१}}\times\frac{\text{क्ष}+\text{२}}{\text{क्ष}-\text{१}}=\frac{(\text{क्ष}-\text{१})(\text{क्ष}+\text{२})}{(\text{क्ष}+\text{१})(\text{क्ष}-\text{१})}=\frac{\text{क्ष}+\text{२}}{\text{क्ष}+\text{१}}$$

$$\frac{\text{२अब}}{\text{अ}+\text{ब}}\div\frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{३अ}}=\frac{\text{६अअब}}{\text{अअ}-\text{बब}} \qquad \frac{\text{३अक्ष}}{\text{यय}}\times\frac{\text{यवि}}{\text{२क्ष}}=\frac{\text{३अवि}}{\text{२य}}$$

$$\frac{\text{म}}{\text{अन}}\div\frac{\text{२म}}{\text{३बन}}=\frac{\text{३ब}}{\text{२अ}} \qquad \frac{\text{पक}}{\text{क}}\times\frac{\text{३कक}}{\text{ककई}}=\frac{\text{३पक}}{\text{कई}}$$

वर चार प्रकारांनीं जितकीं उदाहरणें सांगितलीं आहेत, त्यांचा नव्या शिकणारांनीं स्वतां दृढ अभ्यास करून, त्यांशीं अगत्य पक्कें माहित व्हावें; सद्यः यापेक्षां अधिक उदाहरणांचा अभ्यास करण्याचें

प्रयोजन नाहीं; कां कीं दुसरे उदाहरणांविषयीं यापेक्षां चांगली रीति पुढें येईल.

वर जें सांगीतलें, तें केवळ निखालस अंकगणितानुरूप आहे, जीं अक्षरें घेतलीं तीं केवळ अंकांचीं संक्षेप चिन्हें आहेत असें मानावें, आणि सर्व एकरूप समीकरणें हीं केवळ गणितांतील प्रतिज्ञांचीं संक्षेपरूपें आहेत, असेंहि मानावें. जसें,

(अ+ब)(अ+ब)=अअ+२अब+बब

ही पद्धति या पुढील वाक्याचा अर्थ दाखविती; जर दोन अंकांची मिळवणी घेतली, आणि ती त्याच बेरिजेनें गुणली तर जें फळ उत्पन्न होतें, तें आणि प्रत्येक अंक त्यांणीं तेच गुणावे आणि त्या गुणाकारांचे बेरिजेस त्या अंकांचे गुणाकाराची दुप्पट मिळवावी, हीं दोन्हीं बरोबर आहेत.

जर कांहीं अंक देऊन, त्यांशीं कांहीं एक कृति करायास सांगीतली असेल, तर त्यास **अंकगणितानुरूप** कृत्य ह्मणतात; ह्मणजे कांहीं दिलेल्या अंकांशीं सांगीतलेली कृति केली, तर काय अंक उत्पन्न होईल. जसें २५ आणि ३०० यांचे गुणाकाराचा पंनासावा भाग काय आहे.

बीज गणितानुरूप कृत्यांत अंक दिलेले असतात, अथवा दिले आहेत अशी कल्पना असती हें पुढें समजण्यांत येईल; आणि त्यांत असा प्रश्न असतो ज्याचें इछाफळ कोणते कृतीवरून उत्पन्न होईल. हें एकदांच लक्षांत येत नाहीं, तशे जातीचा प्रश्न एथें खालीं सांगीतला आहे; ३, आणि, १७ हे दोन अंक दिलेले आहेत; तर तो अंक काय आहे, कीं जितक्यानें त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें त्याची दुप्पट १७ पेक्षां उणी आहे? या उदाहरणांत हे पुढील प्रश्न केले आहेत. १. असा अंक आहे कीं काय? २. जर आहे, तर ३ आणि १७ यांशीं कोणती कृती केल्यानें तो अंक निघेल? ३. त्या कृतीचें फळ अथवा इच्छिलेला अंक काय आहे? पुढें शिकणाराचे लक्षांत येईल, कीं त्या प्रश्नांस हीं उत्तरें आहेत, कीं असा अंक आहे खरा, आणि तो ३ आणि १७ यांचे बेरिजेचे दोन पंचमांश घेतल्यानें सांपडतो, आणि यामुळें तो अंक ८ आहे.

जर पहिल्या दोन प्रश्नांनींच निर्वाह झाला असता, तर प्रश्नांमध्यें ३ आणि १७ हे दोन अंक आहेत, असें सांगण्याचें प्रयोजन पडलें

नसतें; कारण कीं, तेंच कृत्य कोणत्याहि दुसऱ्या अंकांवर लावतां आलें असतें; आणि ते अंक कोणतेहि असोत, ते उलगडण्याची रीति एकसारिखीच रहाती, हें पुढें दिसेल, ह्मणजे जर हा पुढील प्रश्न केला; अ आणि ब, हे दोन अंक दिले आहेत, त्यांत ब मोठा आणि अ लहान, तर तो अंक काय आहे, कीं जितक्यानें त्याचें अर्ध अपेक्षां अधिक आहे तितक्यानें त्याची दुप्पट ब पेक्षां उणी होईल? याचें उत्तर $\frac{२}{५}$ (अ+ब) आहे, आणि याचा ताळा या पुढीलप्रमाणें आहे.

$\frac{२}{५}$ (अ+ब) याची दुप्पट $\frac{४}{५}$ (अ+ब), अथवा $\frac{४}{५}$ अ+$\frac{४}{५}$ ब याचे बरोबर आहे. हें ब पेक्षां ब–($\frac{४}{५}$अ+$\frac{४}{५}$ब) इतक्यानें उणें आहे, अथवा ब – $\frac{४}{५}$अ – $\frac{४}{५}$ब, अथवा $\frac{१}{५}$ ब–$\frac{४}{५}$ अ राहातात; परंतु $\frac{२}{५}$ (अ+ब) याचें अर्ध $\frac{१}{५}$ (अ+ब) आहे, हें अहून $\frac{१}{५}$ (अ+ब) – अ इतक्यानें अधिक आहे, अथवा $\frac{१}{५}$ अ+$\frac{१}{५}$ब – अ, अथवा $\frac{१}{५}$ ब – $\frac{४}{५}$ अ राहातात, हें, $\frac{२}{५}$ (अ+ब) याची दुप्पट जितक्यानें ब पेक्षां कमी आहे, तितक्याबरोबर आहे हें सिद्ध. आतां, पहा, कीं वरचे उदाहरणावरून हें कृत्य उलगडण्याची सामान्य रीति कळेल असेंच केवळ नाहीं, तर तें उदाहरण, कोणकोणत्या पक्षांनीं अशक्य आहे, हेंहि त्यापासून कळतें; कारण कीं, जर $\frac{१}{५}$ ब हा $\frac{४}{५}$ अ यापेक्षां अधिक किंवा उणा तरी नसला, ह्मणजे जर ब हा, ४अ, यापेक्षां अधिक नसला, तर वरचें उत्तर $\frac{१}{५}$ ब – $\frac{४}{५}$ अ हें, वरचे गोष्टीचा अधिकपणा किंवा उणेपणा दाखवितें, तेव्हां तें विरुद्ध आहे. जेथें ब बरोबर १७, आणि अ, बरोबर ३ घेतले, तेथेंच अशी विरुद्ध गोष्ट घडली जर असें नसेल तर हें कृत्य अशक्य आहे, असें आणावें; उदाहरण, शिकणारानें शोधून पहावें, कीं असा कांहीं पूर्ण किंवा अपूर्ण अंक आहे कीं काय, कीं ज्याची दुप्पट ११ हून जितक्यानें कमी आहे, तितक्यानें त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक आहे. या कृत्यांत विरोध अगत्य असावा; विरोध खचित कळल्यानंतर, तो कसकसा घडतो याचा विचार केला, तर या पुढील रितीनें स्पष्ट दिसतें; इच्छिलेल्या अंकाचें अर्ध ३ यापेक्षां अधिक असावें, ह्मणून तो, ६ पेक्षां अधिक असावा. आणि त्याची दुप्पट ११ हून उणी असावी ह्मणजे ती संख्या ५$\frac{१}{२}$ पेक्षां उणी असावी. परंतु जी संख्या ६ पेक्षां अधिक आहे, ती ५$\frac{१}{२}$ पेक्षां उणी होत नाहीं; यामुळें दोन भागांत परस्पर विरोध येतो.

यावरून समजण्यांत येतें, कीं जें कांहीं कृत्य सांगण्यांत येईल, तें अशक्य किंवा विरुद्ध असतें किंवा त्यास उलगडवत नाहीं. परंतु, दुसऱ्ये पक्षीं, असें कृत्य सांगण्यांत येतें, कीं ज्याचीं अनंत उत्तरें असतात ह्मणून अशांस अनंत कृत्यें ह्मणतात. अशक्य कृत्यांमध्यें, कित्येक अशीं येतात, कीं त्यांचा अशक्यपणा उघड असतो; जसें याप्रमाणें, **असा पूर्णांक काढ कीं जो ७ यांचे अर्धा बरोबर होईल**; परंतु दुसरीं उदाहरणें अशीं आहेत, कीं ज्यांचा अशक्यपणा शोधून काढावा लागतो; जसें, **१० यांस पूर्ण किंवा अपूर्ण भागांत विभाग, असें कीं त्या भागांचा गुणाकार ३० होईल.** तसें अनंत कृत्यांमध्यें अशीं असतात, कीं त्यांचे उत्तरांचा अनंतपणा उघड असेल, आणि दुसऱ्यामध्यें त्यांचा अनंतपणा उघड दिसत नाहीं. उदाहरण, **असे दोन विषम अंक काढ कीं ज्यांची बेरीज सम अंक होईल**? याचें उत्तर **कोणतेहि दोन विषम अंक**, हें उघड आहे; आणि ते **दोन अंक काय आहेत, कीं ज्यांचे बेरिजेचें अर्ध त्यांचे वजाबाकीचे अर्धांशीं मिळविलें असतां, मोठ्ये अंकाबरोबर होईल.** याचें उत्तर जरी पहिल्येप्रमाणें स्पष्ट नाहीं, तरी **कोणतेहि दोन अंक**, हें उत्तर आहे. कृत्यांचे, वरच्ये सांगितल्ये दोन प्रकारांमध्यें, अशे जातीचीं कृत्यें असतील, कीं कित्येकांस १००० उत्तरें, दुसऱ्यांस, ९९९ इत्यादि, उतरत उतरत, एक उत्तरपर्यंत असतील, अशी गोष्ट मनांत आणतां येईल. आणि एकादें कृत्य अशक्य आहे, असें जाणल्यावर त्याचा अशक्यपणा कां होतो, हें विचारायास आपणास योग्य दिसेल? कृत्यांतील कोणते दोन भाग परस्परांस विरुद्ध आहेत, आणि त्यांचा विरोध कशामुळें येतो? ह्मणजे कृत्यास, शक्यरूप देण्यासाठीं, संकेतांमध्यें कोणकोणत्या तऱ्हेचा, आणि किती रूपभेद करावा लागेल?

ह्या सर्व प्रश्नांस, अंकगणितानें उत्तर देण्यास कांहींच साधन नाहीं; याजकरितां, अंकगणिताहून बीजगणित भिन्न जातीची विद्या आहे, असें मानावें लागतें, आणि बीजांत जे विषय आहेत, ते अंकगणितांत नाहींत; यामुळें बीजगणितांमधील बोलण्याची सरणी, आणि कृत्य करण्याची रीति, आणि अर्थ सांगण्याची चाल, हीं तीनहि अंकगणितांत नाहींत.

शिकणारा, ज्यासमयीं बीजगणित विद्या शिकायास आरंभ करितो, त्यासमयीं, किंवा त्याचे अगोदर त्याणें भूमितिविद्येचा थोडा अभ्यास

केला असतां, बरें पडेल. असें केल्यानें त्यास हें समजेल, कीं भूमितीचे सर्व प्रश्न, अगोदरच, त्यासाठीं तयार केलेले आहेत, ह्मणजे, सर्व कारणें, इत्यादि, त्याचे दृष्टीपुढेंच ठेविलेलीं आहेत, आणि क्रमाक्रमानें प्रश्न पक्का समजून कबूल करावा, इतकेंच मात्र त्यास करावें लागेल. यास **एकीकरण**, ह्मणजे, एकत्र करण्याची रीति; आणि त्या रितीचे विपरीत कृतीस, **पृथक्करण**, ह्मणजे वेगळेंवेगळें करण्याची रीति ह्मणतात. पृथक्करण ह्मणजे कृत्याचे अवयव वेगळेवेगळे करणें, ह्मणजे सर्व कृत्याचें मनन करून, त्याचीं पदें अधिक अधिक सरळ रूपांत आणून, शेवटीं तें कृत्य उलगडण्यास, किंवा त्याचे सत्यतेचा ताळा पाहाण्यास, कोणकोणत्या कल्पना केल्या पाहिजेत, हा विचार करावा लागतो.

आतां पृथकरण रूपानें बीजगणितार्ची मूळ प्रकरणें, किंवा सिद्धता स्थापून दाखविण्याविषयीं पुढें चालवितों; बीजाची रचना नवीं नावें, किंवा, नवीं मुळें घेऊन, सद्यः करावी; त्याचे जागीं जें अंकगणित आपणास माहित आहे, त्यापासून आरंभ करितों; आणि जोंपर्यंत दुसरे सर्व विचारांचे कामाची गरज पडे, तोंपर्यंत त्यांस सोडून देतों. यापासून पाहाण्यांत येईल, कीं, जे पहिल्यानें कधींहि मनांत आले नवते, असे एकामागें एक नवे नवे निश्चितार्थ उत्पन्न होतील, आणि तेणेंकरून एक नवी भाषा बोलण्याची गरज पडेल, आणि चिन्हांस नवे नवे अर्थ द्यावे लागतील, हें कसें करावें, आणि तें कोणत्या परिणामास आईल, हें समजण्याविषयीं, शिकणारानें पुढील प्रथम अध्याय शिकावा; याशिवाय दुसरा कांहीं मार्ग दाखवितां येत नाहीं.

बीजगणित मूळ पीठिका.

पहिला अध्याय.

एकवर्ण समीकरणांविषयीं.

आतां एकवर्ण समीकरणें उलगडण्याची रीति दाखवितों. एकवर्ण समीकरण काय आहे, त्याचा अर्थ अगोदर सांगितला पाहिजे.

बहुतकरून, पदाचा वर्ण जाणायास, त्या पदांतील अक्षरें मोज. जसें, अबक, हें पद तीन वर्णांचें आहे; अअबक, हें पद चार वर्णांचें आहे; कां कीं, जरी त्यांत केवळ तीन वेगळाल्या जातीचीं अक्षरें आहेत, तथापि त्यांतलें एक अक्षर दोन वेळा येतें. हीं पुढील उदाहरणें आहेत;

अ, ब, क, क्ष, ज्ञ, य, इत्यादि, एकवर्णांचीं पदें आहेत.

अअ, बब, कक्ष, बक, यज्ञ, इत्यादि, दोन वर्णांचीं पदें आहेत.

अअअ, अअब, अबब, अबक, पअक, इत्यादि, तीन वर्णांचीं पदें आहेत. आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

कोणत्याहि सांगितलेल्या अक्षरांविषयीं, पदाचा वर्ण काढायाचा असल्यास, केवळ तींच अक्षरें मोज. जसें २अअक्षक्षय, हें पांच वर्णांचें पद, क्ष आणि य, या दोन अक्षरांविषयीं, तीन वर्णांचें आहे; अ आणि क्ष, यांविषयीं, चार वर्णांचें आहे, नुसते क्ष याविषयीं दोन वर्णांचें आहे, नुसते य विषयीं, एक वर्णांचें आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जर कांहींएक पदांत क्ष अगदी नाहीं, तर तें पद, क्ष विषयीं, कांहींच वर्णांचें नाहीं, ह्मणजे क्षचे संबंधावांचून आहे.

समीकरणाचा कोणत्याहि पदामध्यें जा एके अक्षराचा मोठा वर्ण असेल, त्या अक्षराविषयीं, त्या समीकरणाचाहि वर्ण, तोच आहे. असें हें पुढील समीकरण.

क्षक्ष–ज्ञक्षक्षक्ष = यज्ञ–ययक्ष

हें समीकरण क्षविषयीं तीन वर्णाचें, यविषयीं दोन वर्णाचें, आणि ज्ञविषयीं एक वर्णाचें आहे.

संकेत समीकरण उलगडण्याचें हें पुढील कृत्य आहे; एक संकेत समीकरण दिलें आहे, त्यांत एक अक्षराची किंमत अव्यक्त आहे; जा अंकाचा स्थळीं तें अव्यक्त अक्षर आहे, तो अंक कोणता; असा कीं तें समीकरण खरें होईल? असे एकापेक्षां अधिक अंक आहेत कीं काय? जर आहेत, तर ते किती, आणि कोणकोणते? अथवा असा अंक नाहीं कीं काय, ह्मणजे, तें समीकरण अशक्य आहे कीं काय? अशक्य असलें, तर त्याचा अशक्यपणा कशानें कळेल?

कांहीं उदाहरणांपासून या गोष्टीची अटकळ चांगली समजण्यांत येईल, जांचा खरेपणा शिकणारानें ताडून पाहावा.

२क्ष–१=५क्ष–१९

जेव्हां क्ष=६ असतील, तेव्हांच मात्र हें समीकरण खरें आहे.

२क्ष–१=५क्ष+१२

यांत क्ष कोणत्याहि अंकस्थळीं असला तर हें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं.

१६क्ष=४८+क्षक्ष

हें समीकरण जेव्हां क्ष=४ असतील, तेव्हां खरें आहे, आणि क्ष=१२ असतील, तेव्हांही खरें आहे; परंतु दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षीं खरें नाहीं.

१२क्ष=४८+क्षक्ष

यांत क्षची किंमत कोणताहि अंक असो, तरी हें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं.

क्षक्षक्ष+११क्ष=६क्षक्ष+६

जेव्हां क्ष=१, किंवा २, किंवा ३, असें असेल, तेव्हां हें समीकरण खरें आहे; परंतु दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षीं खरें नाहीं.

खरेपणा जाणायासाठीं वरचे उदाहरणांत, क्ष=४, असें समजून उलगडून पहा. तर

क्षक्षक्ष=६४	६क्षक्ष=९६
११क्ष =४४	+६=६
क्षक्षक्ष+११क्ष=१०८	६क्षक्ष+६=१०२

परंतु १०८=१०२ हें खरें नाहीं; यास्तव क्षक्षक्ष+११ ही पद्धति ६क्षक्ष+६ यांबरोबर नाहीं; ह्मणून क्ष=४ हे या समीकरणास स्थापीत नाहींत.

आतां कांहीं उघड खऱ्या गोष्टी सांगतों;

१. बरोबर अंकांशीं बरोबर अंक मिळविले असतां, त्यांची बेरीज बरोबर होईल. ह्मणजे जर अ=ब आणि क=ड, तर अ+क=ब+ड. जर अ=ब−क, आणि क्ष=प−क, तर अ+क्ष=(ब−क)+(प−क)=ब+प −क−क. जर अ=क्ष−य, आणि ब=क्ष+य, तर अ+ब=(क्ष−य)+(क्ष+य) =क्ष−य+क्ष+य=२क्ष. जर अ=ब+क, तर अ+ब= ब+क+ब.

२. बरोबर अंकांतून बरोबर अंक वजा केले, तर, त्यांची वजाबाकी बरोबर होईल. ह्मणजे, जर अ=ब आणि क=ड, तर अ−क=ब−ड. जर अ=प−क आणि ब=प−२क, तर अ−ब=(प−क)−(प−२क)=प −क−प+२क=क. जर अ=ज्ञ+य, तर अ−म=ज्ञ+य−म.

३. बरोबर अंक बरोबर अंकांनीं गुणिले, तर, त्यांचे गुणाकार बरोबर होतील. ह्मणजे, जर अ=ब आणि क=ड, तर अक=बड. जर अ=ब+क आणि ज्ञ=न तर, अज्ञ=न(ब+क)=नब+नक. जर ड=ल−व, तर २ड=२ल−२व.

$$\text{जर } \frac{\text{क्ष}}{२}+\frac{\text{क्ष}}{३}=१$$

$$\text{तर } २\frac{\text{क्ष}}{२}+२\frac{\text{क्ष}}{३}=२, \text{ अथवा क्ष}+\frac{२\text{क्ष}}{३}=२$$

$$३\text{क्ष}+३\frac{२\text{क्ष}}{३}=६$$

$$\text{अथवा } ३\text{क्ष}+२\text{क्ष}=६$$

४. बरोबर अंक बरोबर अंकांनीं भागिले, तर त्यांचे भागाकार बरोबर होतील. ह्मणजे, जर अ=ब आणि क=ड, तर $\frac{\text{अ}}{\text{क}}=\frac{\text{ब}}{\text{ड}}$. जर म=न, तर $\frac{\text{म}}{७}=\frac{\text{न}}{७}$. जर अ=ब−क आणि प+क=ज्ञ, तर $\frac{\text{अ}}{\text{प+क}}=\frac{\text{ब−क}}{\text{ज्ञ}}$. जर ७क्ष=१४, तर $\frac{७\text{क्ष}}{७}=\frac{१४}{७}$ अथवा क्ष = २.

समीकरणें उलगडतेसमयीं वारंवार मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करायास सांगण्याचें प्रयोजन पडेल, ह्मणून संक्षेपानें दाखविण्यासाठीं या पुढीलप्रमाणें चिन्हें करितात.

(+)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंस अ मिळवायाचा आहे.

(−)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्हीं बाजूंतून अ वजा करायाचा आहे.

(×)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंस अनें गुणायाचें आहे.

(÷)अ याचा अर्थ हाच आहे, कीं वरील समीकरणाचे दोन्हीं बाजूंस अ याणें भागायाचें आहे.

(+)(−)(×) आणि (÷) जेव्हां यांतील नुसतें एक चिन्ह अक्षरावांचून मांडिलें असेल, तेव्हां त्याचा अर्थ हाच होईल, कीं वरचे दोन समीकरणांची, मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करायाची आहे.

वर सांगितलेले संक्षेप या पुढील उदाहरणावरून समजतील.

१. अ = ब−क   अ−ब = क+क्ष

(+)क अ+क = ब   (+)ब अ = क+क्ष+ब

२. क−ड = ल−म   २क्ष−३ = ९

$(+)\overline{\text{ड+म}}$ क+म = ल+ड   (+)३ २क्ष = १२

३. प+क = अ−ब   ११क्ष+१८ = १००

(−)क प = अ−ब−क   (−)१८ ११क्ष = ८२

४. प+क−ज्ञ = ३अ+४

$(-)\overline{\text{क−ज्ञ}}$ प = ३अ+४−क+ज्ञ

५. $\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}-\frac{\text{क्ष}}{\text{३}}+\frac{\text{२७}}{\text{४}} = \frac{\text{७क्ष}}{\text{६}}-\frac{\text{५क्ष}}{\text{१२}}+\frac{\text{३}}{\text{४}}$

(×)१२ $\frac{\text{१२क्ष}}{\text{२}}-\frac{\text{१२क्ष}}{\text{३}}+\frac{\text{३२४}}{\text{४}} = \frac{\text{८४क्ष}}{\text{६}}-\frac{\text{६०क्ष}}{\text{१२}}+\frac{\text{३६}}{\text{४}}$

अथवा ६क्ष−४क्ष+८१ = १४क्ष−५क्ष+९

६. अक्ष = ब   (अ+ब)क्ष = क

(÷)अ क्ष = $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ $(\div)\overline{\text{अ+ब}}$ क्ष = $\frac{\text{क}}{\text{अ+ब}}$

७. अ−ब+२क−३ड = क्ष−अ+ब

ब+३क−२ड = ४क्ष−अ−२ब

(+) अ+५क−५ड = ५क्ष−२अ−ब

८. २अक्ष = ब−ज्ञ

अ = ब+ज्ञ

(÷) २क्ष = $\frac{\text{ब−ज्ञ}}{\text{ब+ज्ञ}}$

(५१ आणि ५२) या दोन पृष्ठांतील गोष्टी आणि वर सांगितलेल्या कृती यांवरून, एक अव्यक्त पदाचा एकवर्ण समीकरणाचें उलगडणें सांगतों.

१. या समीकरणाच्या खरेपणा स्थापायास, क्षची किंमत काय असावी.

$३क्ष-७ = क्ष+१९$

(+)७ $३क्ष = क्ष+२६$

(−)क्ष $२क्ष = २६$

(÷)२ $क्ष = १३$

ताळा जर $क्ष = १३$, तर $३क्ष-७ = ३२$

$क्ष+१९ = ३२$

२. $३क्ष+१६ = १०क्ष+९$

(−)३क्ष $१६ = ७क्ष+९$

(−)९ $७ = ७क्ष$

(÷)७ $१ = क्ष$

ताळा जर $क्ष = १$ तर $३क्ष+१६ = १९$

$१०क्ष+९ = १९$

३. $२०क्ष-१३ = १०२\frac{१}{२}-क्ष$

(+)१३ $२०क्ष = ११५\frac{१}{२}-क्ष$

(+)क्ष $२१क्ष = ११५\frac{१}{२}$

(÷)२१ $क्ष = \frac{२३१}{२\times२१}$

$= \frac{२३१}{४२} = ५\frac{१}{२}$

ताळा जर $क्ष = ५\frac{१}{२}$ तर $२०क्ष-१३ = ९७$

$१०२\frac{१}{२}-क्ष = ९७$

४. $\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३} = १-\frac{क्ष}{४}$

(×)२ $क्ष+\frac{२क्ष}{३} = २-\frac{क्ष}{२}$

(×)२ $२क्ष+\frac{४क्ष}{३} = ४-क्ष$

(×)३ $६क्ष+४क्ष = १२-३क्ष$

(+)३क्ष $६क्ष+४क्ष+३क्ष = १२$

म्हणजे $१३क्ष = १२$

(÷)१३ $क्ष = \frac{१२}{१३}$

ताळा जर क्ष $=\frac{१२}{१३}$ तर, $\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}$ अथवा $\frac{५}{६}$ क्ष $=\frac{१२}{१३}$ चे $\frac{५}{६}=\frac{१०}{१३}$

आणि $१-\frac{क्ष}{४}=१-(\frac{१२}{१३}$ चे $\frac{१}{४})=१-\frac{३}{१३}=\frac{१०}{१३}$

या समीकरणाचे दोन्हीं बाजूंस २, ३, ४, या अंकांचे कोणत्याहि साधारण गुणाकारानें गुणिलें असतां, सहज उलगडा होतो. याविषयीं लघुतम गुणाकार फार उपयोगी आहे. ही गोष्ट समजण्यासाठीं मागलें उदाहरण करून पाहिलें असतां, ध्यानांत येईल;

$$\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$$

आतां २, ३, आणि ४, यांचा साधारण गुणाकार ३६ आहे.

(×)३६ $\quad \frac{३६क्ष}{२}+\frac{३६क्ष}{३}=३६-\frac{३६क्ष}{४}$

अथवा $\quad$ १८क्ष+१२क्ष = ३६−९क्ष

(+)९क्ष $\quad$ १८क्ष+१२क्ष+९क्ष = ३६

ह्मणजे, $\quad$ ३९क्ष = ३६

(÷)३९ $\quad$ क्ष $=\frac{३६}{३९}$

अतिसंक्षेपेंकरून $\quad$ क्ष $=\frac{१२}{१३}$

आतां लघुतम गुणाकारानें कृति करून पहा.

२, ३, ४, यांचा लघुतम गुणाकार १२ आहे.

$$\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$$

(×)१२ $\quad \frac{१२क्ष}{२}+\frac{१२क्ष}{३}=१२-\frac{१२क्ष}{४}$

अथवा $\quad$ ६क्ष+४क्ष = १२−३क्ष

(+)३क्ष $\quad$ ६क्ष + ४क्ष+३क्ष = १२

$\quad$ १३क्ष = १२

(÷)१३ $\quad$ क्ष $=\frac{१२}{१३}$

यांत वरप्रमाणें संक्षेपकरण्याचें प्रयोजन नाहीं.

५. अब+अ−ब=१

या उदाहरणांत, आणि वरचे सर्व उदाहरणांत, भेद हाच आहे, कीं वरचांत एक अव्यक्त परिमाण आहे, आणि यांत दोन अव्यक्त परिमाणें आहेत. याचें खरें उत्तर हेंच, कीं या समीकरणास स्थापित करायासाठीं, अ आणि ब यांचा पुष्कळ किमती आहेत. ब ची भलती किंमत घेतली, तर त्या घेतलेले किमतीचे सहाय्यानें, अची किंमत काढितां येईल. या दोन किमतीनीं, हें समीकरण स्थापिलें जाईल. जसें, ब=१२ असें होऊं शकतें कीं नाहीं ? असें विचारिलें तर वरचे समीकरणांत बचे स्थळीं १२ मांडून पहा, तेव्हां याप्रमाणें होईल.

१२अ+अ−१२=१

अथवा १३अ−१२=१

(+)१२ १३अ=१३

(÷)१३ अ=१

उत्तर हेंच, कीं, जर अ=१, तर ब=१२ होऊं शकतात. यापक्षीं अब=१२. आणि १२+१−१२=१.

ब ची कांहीं विशेष किंमत घेतल्याशिवाय, मनांत आणावें, कीं त्याची किंमत दिलेली आहे; तर समीकरणाचे पहिले बाजूचा व्यक्त ब त्याच समीकरणाचे दुसरे बाजूस व्यक्त एकं आहे, त्याशीं कशे तऱ्हेनें संयोग करावा, ह्मणजे बला भलती कांहीं विशेष किंमत दिल्यावर, अची किंमत काढायाची रीति समजेल. वरचें समीकरण पुनः मांड.

अब+अ−ब=१

(+)ब अब+अ=१+ब

परंतु, अब+अ हे, अ एक अधिक ब वेळा घेतला, याचे बरोबर आहेत; ह्मणजे अब+अ=(१+ब)अ.

याजकरितां, (१+ब) अ=१+ब

$(\div)\overline{1+ब}$ $\qquad$ $अ=\frac{1+ब}{1+ब}=१$

तर, उत्तर हेंच, कीं, अ=१ असें असेल, तर बची किंमत हवी ती होईल.

ताळा $\qquad$ जर अ = १, तर

अब+अ−ब = ब+१−ब = १.

जांची अगा नसत्ये, अशीं फळें बीजगणित रितीनें, किती त्वरेनें उत्पन्न होतात, तीं दाखविण्यासाठीं, हें उदाहरण दिलेलें आहे. आतां पुढें एक दुसरें उदाहरण देतों.

६. $\qquad$ क्षय = क्ष+य+१

यांत यची किंमत व्यक्त आहे, असें जाणून, क्षची किंमत काढायाची आहे.

(−)क्ष $\qquad$ क्षय−क्ष = य+१

परंतु, क्षय−क्ष ही पद्धति क्ष, य−१ एक वेळा घेतला, इतकी आहे; अथवा

(य−१)क्ष. याजकरितां (य−१)क्ष = य+१

$(\div)\overline{य-1}$ $\qquad$ $क्ष=\frac{य+1}{य-1}$

विशेषपक्ष. $\qquad$ य = ५ हे घे, तर

$क्ष=\frac{5+1}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ताळा $\qquad$ $क्षय=\frac{3}{2}\times 5=\frac{15}{2}$

$क्ष+य+१=\frac{3}{2}+5+1=\frac{3}{2}+\frac{10}{2}+\frac{2}{2}=\frac{15}{2}$

सामान्य ताळा $क्ष = \frac{य+१}{य-१}$ तर $क्षय = \frac{य(य+१)}{य-१}$

$$क्ष+य+१ = \frac{य+१}{य-१} + य + १$$
$$= \frac{य+१}{य-१} + \frac{य(य-१)}{य-१} + \frac{य-१}{य-१}$$
$$= \frac{(य+१)+य(य-१)+(य-१)}{य-१}$$
$$= \frac{य+१+यय-य+य-१}{य-१}$$
$$= \frac{यय+य}{य-१} = \frac{य(य+१)}{य-१}$$

७. दोन मजुरांतून, एकजण एक शेत ४ दिवसांत, आणि दुसरा ७ दिवसांत, कापितो. त्यांणीं तें शेत बरोबर कापायास आरंभ केल्यावर दुसरे दिवशीं तिसरा मजूर त्या कामांत मिळाला, तो एकटा तें शेत १० दिवसांत कापील असा होता. तो मजूर त्या दोन मजुरांचे संगतीं कांहीं वेळ काम करून, त्यांस सोडून गेला; सोडितेसमयीं असें कळलें, कीं त्या शेताचे चार पंचमांश कापले गेले. तेव्हां झालेल्या कामास किती दिवस लागले?

अंकगणितांतील कठीण उदाहरणें, बीजगणिताचे चिन्हांनीं उलगडायास, केवढे सोपें पडतें, हें दाखवायासाठीं हें उदाहरण घेतलें आहे.

प्रथम आणि दुसरा मजूर, यांणीं जे शेताचे अंश एक दिवसांत कापिले, ते $\frac{१}{४}$ श आणि $\frac{१}{७}$ आहेत. तर दिवसांची संख्या दाखविण्यासाठीं क्ष घे, अथवा, दिवस अव्यक्त आहेत, ह्मणून ते व्यक्त होतपर्यंत त्यांचे ठिकाणीं क्ष मांड. आतां पहिला मजूर, एक दिवसांत, एक चतुर्थांश कापितो, दोन दिवसांत दोन चतुर्थांश कापितो, इत्यादि, तर तो क्ष दिवसांत क्षच्या चतुर्थांश कापील, अथवा सर्व शेताचे $\frac{क्ष}{४}$ इतके कापील. तितकेच वेळांत दुसरा मजूर $\frac{क्ष}{७}$ इतके कापील; परंतु तिसरा मजूर, एक दिवस उणें काम करतो, आणि तो एक दिवसांत शेताचा एक दशांश कापितो, तर, तो आपले वेळांत $\frac{क्ष-१}{१०}$ इतकें कापील. यामुळें, तिघां मिळून झालेलें काम या पुढीलप्रमाणें आहे,

परंतु, प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें, वरचे तिघांचें सर्व काम मिळून, शेताचे $\frac{४}{५}$ कापले गेले, तर,

$$\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{७} + \frac{क्ष-१}{१०} = \frac{४}{५}$$

४, ७, १०, ५, या अंकांचा लघुतम गुणाकार १४० आहे

$$(\times)१४० \quad \frac{१४०क्ष}{४} + \frac{१४०क्ष}{७} + \frac{१४०}{१०}(क्ष-१) = \frac{४\times१४०}{५}$$

$$\text{अथवा} \quad ३५क्ष + २०क्ष + १४(क्ष-१) = ११२$$

$$\text{अथवा} \quad ३५क्ष + २०क्ष + १४क्ष - १४ = ११२$$

$$\text{यामुळें,} \quad ६९क्ष - १४ = ११२$$

$$(+)१४ \quad ६९क्ष = १२६$$

$$(\div)६९ \quad क्ष = \frac{१२६}{६९} = \frac{४२}{२३} = १\frac{१९}{२३}$$

ताळा. एक दिवसांत आणि एक दिवसाचे $\frac{१९}{२३}$ शांत, पहिले मजूरानें शेताचे $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ चे $\frac{१९}{२३}$ श कापले, अथवा $\frac{१}{४}$ चे $\frac{४२}{२३}$, अथवा शेताचे $\frac{२१}{४६}$ कापले; दुसरे मजुरानें $\frac{१}{७}$ शाचे $\frac{४२}{२३}$ श अथवा $\frac{६}{२३}$, ह्मणून शेताचे $\frac{१२}{४६}$ श कापले; आणि तिसरा मजूर, जाणें दुसरे दोघांपेक्षां १ दिवस उणें काम केलें, अथवा $\frac{१९}{२३}$ श दिवस काम केलें, त्याणें त्या वेळांत $\frac{१}{१०}$ चे $\frac{१९}{२३}$ श अथवा $\frac{१९}{२३०}$, ह्मणजे $\frac{३८}{४६०}$ शेताचे कापणीचें काम केलें. तर सर्वांचें काम याप्रमाणें झालें,

$$\frac{२१}{४६} + \frac{१२}{४६} + \frac{३८}{४६०} = \frac{३६८}{४६०} = \frac{४}{५} \text{ संकेताप्रमाणें.}$$

८. $$\frac{क्ष-३}{२\frac{१}{२}} - \frac{क्ष-४}{६\frac{१}{३}} = ३ - \frac{क्ष+१}{५}$$

$२\frac{१}{२}$ आणि $६\frac{१}{३}$, यांचा साधारण गुणाकार ५७० आहे यांत $२\frac{१}{२}$ हे २२८ वेळा जातात, आणि त्यांत $६\frac{१}{३}$ हे ९० वेळा जातात. हें ५ चांचें

गुणित आहे. परंतु ५७० हा लघुतम गुणाकार नव्हे, तर यांचा लघुतम गुणाकार ९५ आहे, हा घेऊन शिकणारानें उदाहरण उलगडावें, परंतु ५७०, या साधारण गुणाकारानें, हें उदाहरण उलगडितों.

(×)५७० $\frac{\text{५७०}}{\text{२}\frac{\text{१}}{\text{२}}}(\text{क्ष}-\text{३})-\frac{\text{५७०}}{\text{६}\frac{\text{१}}{\text{३}}}(\text{क्ष}-\text{४})=\text{१७१०}-\frac{\text{५७०}}{\text{५}}(\text{क्ष}+\text{१})$

अथवा २२८ (क्ष−३)−९०(क्ष−४)=१७१०−११४(क्ष+१)

परंतु २२८ (क्ष−३)=२२८क्ष−६८४ इत्यादि

यामुळें(२२८क्ष−६८४)−(९०क्ष−३६०)=१७१०−(११४क्ष+११४)

अथवा २२८क्ष−६८४−९०क्ष+३६०=१७१०−११४क्ष−११४

(+)६८४+११४क्ष−३६० तर २२८क्ष−९०क्ष+११४क्ष=१७१०−११४+६८४−३६०

अथवा २५२क्ष=१९२०

(÷)१२ २१क्ष=१६०

(÷)२१ $\text{क्ष}=\frac{\text{१६०}}{\text{२१}}=\text{७}\ \frac{\text{१३}}{\text{२१}}$

ताळा जर $\text{क्ष}=\frac{\text{१६०}}{\text{२१}}$ तर

$$\frac{\text{क्ष}-\text{3}}{\text{२}\frac{\text{१}}{\text{२}}}=\frac{\frac{\text{९७}}{\text{२१}}}{\text{२}\frac{\text{१}}{\text{२}}}=\frac{\frac{\text{९७}}{\text{२१}}}{\frac{\text{५}}{\text{२}}}=\frac{\text{१९४}}{\text{१०५}}=\frac{\text{१९४}}{\text{५}\times\text{२१}}$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{४}}{\text{६}\frac{\text{१}}{\text{३}}}=\frac{\frac{\text{७६}}{\text{२१}}}{\frac{\text{१९}}{\text{३}}}=\frac{\text{२२८}}{\text{३९९}}=\frac{\text{२२८}}{\text{१९}\times\text{२१}}$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{3}}{\text{२}\frac{\text{१}}{\text{२}}}-\frac{\text{क्ष}-\text{४}}{\text{६}\frac{\text{१}}{\text{३}}}=\frac{\text{१९४}}{\text{५}\times\text{२१}}-\frac{\text{२२८}}{\text{१९}\times\text{२१}}=\frac{\text{२५४६}}{\text{५}\times\text{१९}\times\text{२१}}=\frac{\text{१३४}}{\text{५}\times\text{२१}}$$

$$\frac{\text{क्ष}+\text{१}}{\text{५}}=\frac{\frac{\text{१८१}}{\text{२१}}}{\text{५}}=\frac{\text{१८१}}{\text{५}\times\text{२१}}$$

$\text{३}-\frac{\text{क्ष}+\text{१}}{\text{५}}=\frac{\text{१३४}}{\text{५}\times\text{२१}}$ हें वरचे बरोबर आहे.

समीकरणांतील अपूर्णपदांचा अपूर्णपणा काढायाचा असेल, तर सर्व पदांचे छेदांचा कोणत्याहि साधारण गुणाकारानें समीकरणाचा दोनहि बाजू गुण; बहुतकरून या कृतीस, लघुतम गुणाकार, दुसरे सर्व साधारण गुणाकारांपेक्षां, सोईस पडतो.

हीं वरची रीति या पुढील उदाहरणावर लागू करून दाखवितों.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}} \quad (\times)\text{बड} \quad \frac{\text{अबड}}{\text{ब}} = \frac{\text{कबड}}{\text{ड}}, \text{ अथवा अड} = \text{बक}$$

या समीकरणापासून शिकणारानें हीं पुढील समीकरणें उलगडावीं.

$$\text{अ} = \frac{\text{कब}}{\text{ड}}, \quad \text{ब} = \frac{\text{अड}}{\text{क}}, \quad \text{क} = \frac{\text{अड}}{\text{ब}}, \quad \text{ड} = \frac{\text{बक}}{\text{अ}}$$

$$\frac{1}{\text{अ}} = \frac{\text{ड}}{\text{कब}}, \quad \frac{1}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{अड}}, \quad \frac{1}{\text{क}} = \frac{\text{ब}}{\text{अड}}, \quad \frac{1}{\text{ड}} = \frac{\text{अ}}{\text{बक}}$$

या पुढील समीकरणांतले, पहिले समीकरणावरून, शिकणारानें दुसरीं सर्व समीकरणें उलगडावीं.

$$\frac{\text{अब}}{\text{क्षय}} = \frac{\text{कड}}{\text{पक}}, \text{ अ} = \frac{\text{कडक्षय}}{\text{पकब}}, \text{ क्ष} = \frac{\text{अबपक}}{\text{कडय}}, \frac{\text{अ}}{\text{य}} = \frac{\text{कडक्ष}}{\text{पकब}},$$

$$\frac{\text{अब}}{\text{क}} = \frac{\text{डक्षय}}{\text{पक}}, \text{ अबपक} = \text{क्षयकड}, \frac{\text{ब}}{\text{डय}} = \frac{\text{कक्ष}}{\text{अपक}},$$

२. **समीकरणांतील कोणतेंहि पद, एका बाजूंतून काढून, दुसरे बाजूस त्याचें चिन्ह बदल केल्यानें नेता येतें. यास स्थळांतर करणें ह्मणतात.** हीं गोष्ट जर वरचे उदाहरणापासून आढळली नसली, तर या पुढें लिहिल्यावरून स्पष्ट कळेल.

	$\text{अ}+\text{ब} = \text{क}+\text{ड}-\text{ई}$
$(-)\text{ब}$	$\text{अ} = \text{क}+\text{ड}-\text{ई}-\text{ब}$
$(+)\text{ई}$	$\text{अ}+\text{ई} = \text{क}+\text{ड}-\text{ब}$

समीकरणांतील अपूर्ण पदांचा अपूर्णपणा काढण्याकरितां रीति लावतेसमयीं, संभाळलें पाहिजे कीं, छेद काढल्यावर, जें चिन्ह पूर्वी अपूर्ण पदाचे पुढें असतें, तें अंशांचें चिन्ह होतें; यामुळें तें अंशपद कुंडलीमध्यें ठेविलें पाहिजे, नाहीं तर लागलीच मिळवणी किंवा वजाबाकी करून मांडलें पाहिजे. या सांगण्याचा अर्थ या पुढील उदाहरणावरून समजेल.

$$क्ष+\frac{क्ष-अ}{ब}-\frac{क+क्ष}{अब}=ड-\frac{क्ष-ई}{अ}$$

(×)अब अबक्ष+अ(क्ष−अ)−(क+क्ष)= अबड−ब (क्ष−ई)

अथवा अबक्ष+(अक्ष−अअ)−(क+क्ष)= अबड−(बक्ष−बई)

अथवा अबक्ष+ अक्ष−अअ − क−क्ष = अबड−बक्ष+बई

नवा शिकणारा, अशी चूक बहुतकरून करितो. ह्मणजे, −क−क्ष यांचे स्थळीं आणि−बक्ष+बई यांचे स्थळीं−क+क्ष आणि−बक्ष−बई, असें लिहितो.

वरचा दुसऱ्या रितीवरून उदाहरण,

अबक्ष+अक्ष+बक्ष−क्ष = अबड+अअ+क+बई

अथवा (अब+अ+ब−१)क्ष = अबड+अअ+क+बई

$$(\div)\overline{अब+अ+ब-१} \qquad क्ष=\frac{अबड+अअ+क+बई}{अब+अ+ब-१} \quad \ldots\ldots (१)$$

$$\text{ताळा} \qquad क्ष-अ=\frac{अबड+अअ+क+बई}{अब+अ+ब-१}-अ$$

$$=\frac{अबड+अअ+क+बई-अ(अब+अ+ब-१)}{अब+अ+ब-१}$$

$$=\frac{अबड+अअ+क+बई-अअब-अअ-अब+अ}{अब+अ+ब-१}$$

$$=\frac{अबड+अ-अब-अअब+क+बई}{अब+अ+ब-१}$$

$$\frac{क्ष-अ}{ब}=\frac{अबड+अ-अब-अअब+क+बई}{ब(अब+अ+ब-१)} \quad \ldots\ldots\ldots (२)$$

आणि तशाच रितीप्रमाणें

$$\frac{\text{क}+\text{क्ष}}{\text{अब}} = \frac{\text{अबक}+\text{अक}+\text{बक}+\text{अबड}+\text{अअ}+\text{बई}}{\text{अब}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)} \ldots\ldots (३)$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{ई}}{\text{अ}} = \frac{\text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}-\text{अबई}-\text{अई}+\text{इ}}{\text{अ}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)} \ldots\ldots (४)$$

(१)(२)(३) आणि (४) या सर्वांस समछेद कर. ते याप्रमाणें होतील, (१) याचे अंश आणि छेद अब यांणीं गुण, (२) याचे अंश आणि छेद अनें गुण, (४) याचे अंश आणि छेद बनें गुण. नंतर हें समीकरण करून मांड

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}} - \frac{\text{क}+\text{क्ष}}{\text{अब}}, \text{ अथवा } (१)+(२)-(३)$$

अशी कृति केल्यानें याप्रमाणें निघेल

$$\frac{\text{अअबबड}+\text{अअबड}+\text{अबबई}+\text{अबई}-\text{अअब}-\text{अबड}-\text{बक}-\text{बई}}{\text{अब}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)}$$

अथवा याचे अंश आणि छेद बनें भागून } $= \frac{\text{अअबड}+\text{अअड}+\text{अबई}+\text{अई}-\text{अअ}-\text{अड}-\text{क}-\text{ई}}{\text{अ}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)}$

तशे रितीनेंहि,

$\text{ड} - \frac{\text{क्ष}-\text{ई}}{\text{अ}}$ अथवा ड −(४), वरचे (१)+(२)−(३) याचे किमती बरोबर होईल.

नवे शिकणारानें वरचीं समीकरणें कागदावर पुस्तकावांचून उलगडून मांडण्याविषयीं निपुण व्हावें.

मनांत आण, कीं वरचे समीकरणांत, क आणि ई, हीं दोन्हीं शून्य आहेत, तर त्या समीकरणाचें याप्रमाणें रूप होईल

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अब}} = \text{ड} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}$$

त्यावरून क्षची किंमत पुढील आहे.

$$क्ष = \frac{अबड+अअ}{अब+अ+ब-१}$$

आणि यावरून मागें काढिलेली समीकरणाचा दोन बाजूंची किंमत

$$\frac{अअबड+अअड-अअ-अड}{अ(अब+अ+ब-१)}$$

अथवा अंश आणि छेद अनें भागून $= \frac{अबड+अड-अ-ड}{अब+अ+ब-१}$

या सर्व पद्धती शिकणारानें समीकरणापासून काढाव्या.

वर सामान्य कृतीविषयीं सांगीतलें. आतां कांहीं विशेष कृतीं-विषयीं शोध केला पाहिजे; ह्मणून त्या समजायासाठीं, कसे कसे अर्थ केले पाहिजेत त्याचा आतां विचार करितों. पूर्वीं मनांत आलीं नवतीं अशीं तऱ्हेतऱ्हेचीं उदाहरणें पहाण्यांत येतील, आणि हरएक उदाहरण उलगडून सांगतां येईल, आणि जी गोष्ट हरएक उदाहरणांत अगोदर पहाण्यांत नाहीं, तिचें कारण दाखविण्याविषयीं, हरएक उदाहरणास एक एक कृत्य लाविलें आहे.

१ **उलटा विषय.** अ=२,ब=३,ड=$\frac{१}{६}$, असें असलें तर वरचें समीकरण याप्रमाणें होतें

$$क्ष+\frac{क्ष-२}{३}-\frac{क्ष}{६}=\frac{१}{६}-\frac{क्ष}{२}$$

$$तर\ क्ष=\frac{२\times३\times\frac{१}{६}+२\times२}{२\times३+२+३-१}=\frac{५}{१०}=\frac{१}{२}$$

वरचे समीकरणाचा ताळा पाहिला असतां, विपरीत गोष्ट त्वरेनें नजरेंत येती. या उदाहरणांत क्ष=$\frac{१}{२}$ आहे, आणि समीकरणाचे दुसरे पदामध्यें क्ष−२, ह्मणजे $\frac{१}{२}$ उणें २ करायास अशक्य. यावरून असें दिसून येतें, कीं समीकरणाचें उत्तर शक्य निघून त्या उत्तरानें त्याचा ताळा पाहूं गेल्यास, तें समीकरण त्या रितीनें अशक्य, असें

दृष्टीस येतें. तर हाच प्रश्न केला पाहिजे, कीं कांहीं कृत्यापासून असें समीकरण उत्पन्न होऊं शकतें कीं काय? जर होऊं शकतें, तर तें कृत्यच खोटें आहे, अथवा उलगडण्याची रीति खोटी आहे? उलगडण्याची रीति खोटी असल्यास ती नीट कशी करावी?

दृष्टांतार्थ उदाहरण. बशीं अ याप्रमाणें करार करितो, कीं तुझी सर्व मालमत्ता घेऊन, तुझें सर्व कर्ज मी चुकवीन, मग दैवगतीनें नफा होऊं, किंवा तोटा होऊं. शोध केल्यावर असें समजण्यांत आलें, कीं ब ची मालमत्ता, कर्जसहित, अचे मालमत्तेचे बरोबर आहे, आणि ब दुसरे पुरूषाशीं भागीदार आहे, आणि ब आणि त्याचा भागीदार, या दोघांनीं मिळून, तिसरे क पुरूषाशीं, वरप्रमाणेंच, करार केला होता. नंतर कचें सर्वस्व तपासल्यावर, असें समजण्यांत आलें, कीं तो १०० रुपयांचा कर्जदार आहे. या सर्व व्यवहाराचा सारांश हाच कीं, अची मुळची मालमत्ता होती, ती दुप्पट होण्यास ७५ रुपये उणे आहेत. तेव्हां अची मुळची मालमत्ता काय होती?

अची असलची मालमत्ता दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांची मालमत्ता, कचे व्यवहारसंबंधीं जो त्यांचा भाग, तो खेरीजकरून, अचे मालमत्ते बरोबर आहे. या वरचे उदाहरणाचे शेवटील गोष्टी वरून असें मानलें पाहिजे कीं या व्यवहारापासून अला नफा झाला. तो असा कीं ब आणि त्याचा सर्कती यांणीं कशीं करार केल्यावरून जो तोटा होणार, त्यापेक्षां त्यांचे क्ष रुपये अधिक आहेत. ती गोष्ट तशीच आहे, असें मनांत आण; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांस क्ष–१०० रुपये राहातात; ह्मणून ब याचा भाग $\frac{1}{2}$(क्ष–१००) आहे. हा संकेताप्रमाणें ब कडून अचेकडे गेला, ह्मणून अचे जवळ या बरोबर होईल,

$$क्ष+\frac{क्ष-१००}{२}$$

हें अचे मालमत्तेचे दुपटी बरोबर होण्यास, ७५ रुपयांनीं उणें आहे, यास्तव हे २क्ष–७५ यांचेही बरोबर आहेत.

$$\text{यामुळें}\quad क्ष+\frac{क्ष-१००}{२}=२क्ष-७५$$

$$(\times)२\quad २क्ष+क्ष-१००=४क्ष-१५०$$

$$४क्ष-२क्ष-क्ष=१५०-१००$$

$$क्ष=५०$$

जा उलट्या विषयाचा विचार चालला आहे, तोच अशानें या समीकरणांत येतो; कां कीं $\frac{५०-१००}{२}$ हें अशक्य आहे. आणि क्ष हा १०० पेक्षां अधिक आहे, या कल्पनेवरून तें निघालें; त्या कल्पनेस विरोध येतो. यामुळें अशे उलगडण्यावर कांहीं भरंवसा ठेववत नाहीं. तर दुसरी कल्पना कर, ह्मणजे १०० यांपेक्षां क्ष अधिक नाहीं. असें असतां, ब आणि त्याचा सर्कती यांस १०० रुपये द्यावे लागतील. परंतु त्यांतून त्यांचे क्ष रुपये मात्र रहातील; बाकी अथवा १००- क्ष यांतून अला बचा भाग अथवा $\frac{१}{२}$ (१००-क्ष) इतकें मिळेल. तो भाग अनें बला कराराप्रमाणें द्यावा; ह्मणून अला इतका तोटा होईल; अजवळ पहिले क्ष रुपये होते, तर इतका तोटा झाल्यानें.

$$क्ष-\frac{१००-क्ष}{२}\quad \text{इतकें राहील;}$$

हें तरी अची मालमत्ता दुप्पट करण्यास ७५ रुपयांनीं कमी असावें. असें बोललें असतां उदाहरणाचा एक भाग दुसरे भागास विरोध आणितो. तर याचप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं अचे पहिल्ये मालमत्तेचे दुपटींत ७५ कमी इतकी त्याजवळ हार्लीं झाली.

$$\text{ह्मणून}\quad क्ष-\frac{१००-क्ष}{२}=२क्ष-७५$$

$$(\times)२\quad २क्ष-(१००-क्ष)=४क्ष-१५०$$

$$\text{अथवा}\quad २क्ष-१००+क्ष=४क्ष-१५०$$

$$\text{अथवा}\quad २क्ष+क्ष-१००=४क्ष-१५०$$

हेंहि वरचे समीकरणाचे बरोबर आहे, तथापि या रूपानें खोटें नाहीं; कां, जरी यापासून क्ष = ५० असें निघतें, आणि त्याप्रमाणें

क्ष−१०० अशक्य आहेत, तथापि २क्ष+क्ष−१०० हें शक्य आहे. यावरून असें दिसतें, कीं क्ष− $\frac{१}{२}$(१००−क्ष) याचे ठिकाणीं खोटे कल्पनेवरून, क्ष+$\frac{१}{२}$ (१००−क्ष) याप्रमाणें लिहिलें, त्यापासून जो खोटा परिणाम होणार, तो समीकरण उलगडल्यावर नाहींसा होतो, आणि नीट रितीनें केल्याप्रमाणें उत्तर निघतें.

असा उलटा विषय या जातीचे चुकीनें उत्पन्न होतो. जर कपेक्षां ब मोठा असेल, तर स्पष्ट आहे, कीं,

$$अ-(ब-क) = अ-ब+क$$

परंतु जर अ−ब+क अशी पद्धति असेल, आणि जर असें इच्छिलें, कीं ब आणि क एकत्र करून कुंडलींत यावे तर, ब आणि क यांत मोठा कोणता, तो समजेपर्यंत त्यास शुद्ध रितीनें मांडवत नाहीं. ब मोठा असला तर वरची पद्धति याप्रमाणें होईल.

$$अ-(ब-क);$$

परंतु क मोठा असला, तर याप्रमाणें होईल,

$$अ+(क-ब);$$

जेव्हां ब=क आहे, तेव्हां एक पक्षीं अ−० होतें, आणि दुसरे पक्षीं अ+० होतें, अथवा दोहोंपक्षीं अ मात्र रहातो, असें नसल्यास त्या दोहोंतून एक तरी खचीत अशक्य होईल.

वर सांगीतल्ये गोष्टीवरून हेंच दिसतें, कीं जर अ−ब+क या पद्धतीचें अ+(क−ब) हें शुद्धरूप चुकून, त्याचे ठिकाणीं अ−(ब−क) असें लिहिलें असतां, शेवटले उत्तरांत कांहीं अंतर पडत नाहीं. एथें खालीं त्यासारिखींच दोन उदाहरणें लिहून दाखवितो

$$क्ष-\frac{अ-क्ष}{ब} = क+\frac{क्ष-ब}{ब} \qquad क्ष+\frac{क्ष-अ}{ब} = क-\frac{ब-क्ष}{ब}$$

$$बक्ष-(अ-क्ष) = बक+(क्ष-ब) \qquad बक्ष+(क्ष-अ) = बक-(ब-क्ष)$$

$$बक्ष-अ+क्ष = बक+क्ष-ब \qquad बक्ष+क्ष-अ = बक-ब+क्ष$$

या दोन्हीं उदाहरणाचें उलगडणें जें बाकी राहिलें तें एकसारिखेंच आहे. ह्मणून

$$वक्ष = वक+अ-ब$$

$$क्ष = \frac{वक+अ-ब}{ब}$$

२ उलटा विषय.

उदाहरण

$$अक्ष+ब = कक्ष+ड$$

$$अक्ष-कक्ष = ड-ब$$

$$(अ-क)क्ष = ड-ब$$

$$क्ष = \frac{ड-ब}{(अ-क)}$$

मनांत आण, कीं ब पेक्षां ड उणा आहे, परंतु क पेक्षां अ अधिक आहे. जसा या उदाहरणांत

$$३क्ष+४ = २क्ष+१$$

तर उत्तराचे अंशस्थळीं अशक्यरूप वजाबाकी आहे; आणि दुसरे कारणास्तव स्पष्ट आहे, कीं हें समीकरण अशक्यरूप आहे; कां कीं जर क पेक्षां अ अधिक आहे तर कक्ष पेक्षां अक्ष अधिक आहे; त्यावरून, जर ड पेक्षां ब अधिक आहे, तर अक्ष+ब ही पद्धति कक्ष+ड यापेक्षां अगत्य अधिक असावी, ह्मणून ह्या परस्पर बरोबर होऊं शकत नाहींत.

१. कृत्य. सन् १८३० या वर्षांत, अचें वय ५० होतें आणि बचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा समय सांग. तर ही गोष्ट सन् १८३० यांचे पूर्वीं किंवा यानंतर असावी. यांत दुसरा पक्ष पहा, ह्मणून इच्छिला समय १८३०+ क्ष होईल असें मनांत आण.

आणि २५+क्ष हें बचें वय होईल,

तर ५०+क्ष = २(२५+क्ष)

अथवा ५०+क्ष = ७०+२क्ष

२क्ष−क्ष = ५०−७०

या उदाहरणांत अशक्य रूपाची वजाबाकी दिसती. आणि स्पष्ट आहे, कीं २क्ष+७० ही पद्धति क्ष+५० हिजपेक्षां अधिक आहे. आतां १८३० यांचे पूर्वीचा समय पहा ह्मणजे १८३०−क्ष

तेव्हां ५०−क्ष हें अचें वय होतें,

२५−क्ष हें बचें वय होतें,

तर ५०−क्ष = २(२५−क्ष)

अथवा ५०−क्ष = ७०−२क्ष

२क्ष−क्ष = ७०−५०

क्ष = २०

हें स्पष्ट खरें उत्तर आहे; कां कीं १८३०−२०, अथवा १८१०, या समयांत अचे वयाचीं वर्षें ३० होतीं आणि बचे वयाचीं वर्षें १५ होतीं. यावरून दिसतें, कीं भलते कांहीं सांगितले सनाचा नंतरचा समय घेतला, तर, ही अशक्य रूपाची वजाबाकी होती, ह्मणून त्याचे पूर्वीचा समय असावा हें खरें आहे, अथवा याचे उलटेंहि होतें.

२. कृत्य. अ आणि ब यांचें परस्पर खातें आहे. त्याची स्थिती अशी आहे, कीं अचा खात्याची रकम त्यांचे परस्परांचे व्यवहारांत, ५०० रुपयांचे किमतीची व्हावयास, जें लागेल त्याचें अर्ध अला आणि १०० रुपये बला देऊन, परस्परांचे खात्याचा फडशा केल्यानंतर, प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल. तर त्यांचें खातें कसें आहे?

शिलक बाकी, बला किंवा अला घेणें असेल. मनांत आण, कीं



अला घेणें आहे, आणि त्यास क्ष रुपये घ्यावयाचे, तर या व्यवहारापासून अचे जवळ ५००—क्ष, हे ५०० रुपयांचे किमतीचे बरोबर करतील, कां कीं

$$क्ष+(५००-क्ष)=५००$$

त्यांतील $\frac{१}{२}$(५००—क्ष) एवढे अला दे. नंतर ब याणें शिलक बाकी पैका दिल्यावर, अ जवळ याप्रमाणें होईल

$$क्ष+\frac{५००-क्ष}{२}$$

आतां, बला १०० रुपये मिळाल्यानंतर, अ यास क्ष रुपये शिलक बाकी द्यावे लागतील, ह्मणून, त्याजवळ (१००—क्ष) एवढे रुपये होतील. परंतु असें खातें चुकल्यावर प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल; यामुळें

$$क्ष+\frac{५००-क्ष}{२} = १००-क्ष$$

$$(\times)२ \quad २क्ष+५००-क्ष = २००-२क्ष$$

$$\text{अथवा} \quad २क्ष+५००-क्ष = २००-२क्ष$$

$$२क्ष+२क्ष-क्ष = २००-५००$$

$$\text{अथवा} \quad ३क्ष = २००-५००$$

हें अशक्य आहे. आतां दुसरा पक्ष पहा, ह्मणजे असें मनांत आण कीं शिलक बाकी बला घेणें आहे, आणि त्यास क्ष रुपये घ्यावे लागतात, तर अजवळ ५०० रुपये असावयासाठीं, अगोदर बची शिलक बाकी चुकविली पाहिजे, आणि याशिवाय त्याजवळ ५०० रुपये झाले पाहिजेत; ह्मणजे, त्याला ५००+क्ष इतके मिळाले पाहिजेत. परंतु यांतून केवळ अर्धे मिळायाचे, अथवा $\frac{१}{२}$(५००+क्ष) यांतून बला क्ष रुपये दिल्यानंतर, त्याजवळ याप्रमाणें राहील

$$\frac{५००+क्ष}{२}-क्ष$$

आतां बला १०० रुपये, आणि याशिवाय अ पासून शिलक बाकी क्ष रुपये एवढे मिळतात, यामुळें त्याजवळ १००+क्ष रुपये होतील. असें झाल्यावर दोघांचा ऐवज बरोबर आहे.

$$\text{ह्मणून} \qquad \frac{५००+क्ष}{२} - क्ष = १००+क्ष$$

$$(\times)\ २ \qquad ५००+क्ष-२क्ष = २००+२क्ष$$

$$२क्ष+२क्ष-क्ष = ५००-२००$$

$$\text{अथवा} \qquad ३क्ष = ३०० \text{ आणि } क्ष = १००$$

यामुळें अ याणें बचे १०० रुपये शिलक बाकी देणें आहे हें खरें उत्तर आहे.

३. **कृत्य.** कोणी एक वाटसरू रस्त्यानें पुढें चालत आहे, त्या रस्त्यावर, जागोजागीं निरनिराळ्या अंतरानें दिक्‌दर्शन खांब* होते, त्यांतील कित्येक खांबांवर उत्तरदिशा दाखविणाऱ्या, व कित्येकांवर दक्षिणदिशा दाखविणाऱ्या खुणा होत्या. तो वाटसरू पहिल्ये खांबाशीं पोंचल्यावर, त्या खांबावरचे दाखविल्ये खुणेप्रमाणें जात असतां, दुसरे खांबाशीं पोंचतो. याप्रमाणें पुढेंहि. तो निघाल्यापासून उत्तरेकडे १६ मैल चालल्यावर तो पहिल्ये दिक्‌दर्शन खांबाशीं पोंचला, आणि पहिले दिक्‌दर्शन खांबाशीं पोंचल्यानंतर† बाकीचे प्रत्येक खांबाशीं चालण्याची दिशा फिरती असें त्यास कळलें; प्रत्येक दोन खांबांचें अंतर त्याचे पूर्वीचे खांबाचे अंतराचे दुप्पट आहे, आणि पांचव्ये खांबाशीं पोंचल्यावर, तो आपले निघालेल्या स्थळापासून, उत्तर दिशेस, ८६ मैल दूर गेला, हेंहि त्यास कळलें. तर त्या खांबांची रचना आणि स्थिति कशी आहे.

उत्तरेकडे १६ मैल चालून, तो पहिल्ये खांबाशीं पोंचतो, परंतु तेथें,

* कित्येक प्रांतामध्यें रस्त्यावर जागोजागीं दगडी, किंवा लांकडी खांब असतात, जांवर गांवोगांवचे रस्त्यांचा दिशा, व त्यांचीं अंतरें वाटसरूंस कळण्यासाठीं लिहिलीं असतात.

† पहा या कृत्यामध्यें पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यानंतर, त्याचे चालण्याची दिशा फिरती किंवा नाहीं, हें कांहीं सांगीतलें नाहीं.

पोंचल्यावर, त्या दिशेस पुढें चालायाचें, किंवा मागें फिरायाचें, तें सांगीतलें नाहीं. मनांत आण कीं पुढें उत्तरेकडे चालायाचें आहे, आणि पहिल्या आणि दुसऱ्या खांबाचें अंतर दाखविण्यासाठीं क्ष घे, तर दुसऱ्या खांबाशीं पोंचल्यावर तो त्याचे पहिल्या स्थितीपासून १६+क्ष मैल उत्तरेकडे होईल. दुसऱ्या खांबापासून तिसऱ्याखांबाशीं पोंचायास त्याला मागें दक्षिणेकडे २क्ष मैल जावें लागतें. या कल्पनेपासून दोन पक्ष उत्पन्न होतात. जर २क्ष, हे १६+क्ष, यांपेक्षां उणें असतील, तर तिसरा खांब त्याचे निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडेस १६+क्ष −२क्ष एवढे मैल होईल; परंतु जर २क्ष हे, १६+क्ष, यांपेक्षां अधिक असतील, तर तिसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून दक्षिणेकडेस २क्ष−(१६+क्ष) मैल होईल. मनांत आण, कीं पहिला पक्ष आहे; तिसऱ्या खांबापासून चौथ्ये खांबाशीं पोंचावयास, त्याला उत्तरेकडे ४क्ष मैल जावें लागतें, ह्मणून चौथा खांब, निघालेल्या स्थळापासून, उत्तरेकडे, १६+क्ष−२क्ष+४क्ष, इतके मैल आहे. चौथ्या खांबापासून, दक्षिणेकडे फिरून, ८ क्ष मैल चालल्यावर, पांचव्या खांबाशीं पोंचतो, १६+क्ष−२क्ष+४क्ष−८क्ष एवढे मैल पांचव्या खांबापावेतों तो चालला. हें अंतर, कृत्याचे संकेताप्रमाणें, निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडे ८६ मैल असावें. यामुळें

$$१६+क्ष-२क्ष+४क्ष-८क्ष = ८६$$

अथवा $$८क्ष-४क्ष+२क्ष-क्ष = १६-८६$$

अथवा $$५क्ष = १६-८६$$

यावरून, हीं अशक्यरूप वजाबाकी आहे. आतां दुसरा पक्ष तपासून पाहा, आणि मनांत आण, कीं वाटसरू पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यावर, त्याची दिशा मागें फिरण्याची आहे, ह्मणून त्याला दक्षिणेकडेस क्ष मैल, जावें लागतें. जर क्ष हा १६ पेक्षां उणा असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडे १६−क्ष मैल होईल. जर क्ष, हा १६ पेक्षां अधिक असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून, दक्षिणेकडे, क्ष−१६ मैल, होईल. कृत्याचे संकेतावरून, याप्रमाणें समीकरण होईल.

$$१६-क्ष+२क्ष-४क्ष+८क्ष = ८६$$
$$८क्ष-४क्ष+२क्ष-क्ष = ८६-१६$$
$$५क्ष = ७०$$
$$क्ष = १४$$

यामुळें खांबांची स्थिति या पुढीलप्रमाणें आहे.

दक्षिण——————उत्तर

(४)☜		(२)☜	☞(१)	☞(३)	(५)
२६	+	२	१६	३०	८६

(+ : वाटसरू निघालेले स्थळ.)

वाटसरू निघालेले स्थळापासून, प्रत्येक खांबांचे अंतराचे मैल त्या त्या खांबाखालीं लिहिले आहेत.

मागील तीन कृत्यांतील खरीं आणि खोटीं समीकरणें, एकापुढें एक मांडून पाहिलीं असतां, पुढीलप्रमाणें होईल;

१. कृत्य.

खोटें समीकरण, $५०+क्ष=२(३५+क्ष)$ अथवा $क्ष=५०-७०$ वर्षें सन् १८३० याचे नंतर.

खरें समीकरण, $५०-क्ष=२(३५-क्ष)$ अथवा $क्ष=७०-५०$ वर्षें सन् १८३० याचे पूर्वीं.

२. कृत्य.

खोटें समीकरण, $\frac{५००-क्ष}{२}+क्ष=१००-क्ष$ अथवा $क्ष=\frac{२००-५००}{३}$ ब याणें अला द्यावे.

खरें समीकरण, $\frac{५००+क्ष}{२}-क्ष=१००+क्ष$ अथवा $क्ष=\frac{५००-२००}{३}$ अ याणें बला द्यावे.

३. कृत्य.

खोटें समीकरण, १६+क्ष−२क्ष+४क्ष−८क्ष=८६ अथवा क्ष=$\frac{१६-८६}{५}$ मैल उत्तरेकडे.

खरें समीकरण, १६−क्ष+२क्ष−४क्ष+८क्ष=८६ अथवा क्ष=$\frac{८६-१६}{५}$ मैल दक्षिणेकडे.

वरचे, आणि त्यासारिखे दुसरे उदाहरणापासून, ही पुढील गोष्ट स्पष्ट होती;

कांहीं समीकरणें उलगडल्यावर, जर क्षचा किमतींत अशक्यरूप वजाबाकी असेल, तर तें समीकरण आणि क्षचा अर्थ हीं दोन्हीं समजांत आलीं नाहींत असें जाणावें, तर त्यांस फिरवून तीं नीट केलीं पाहिजेत.

१. समीकरणास खरें रूप द्यावयासाठीं, याप्रमाणें केलें पाहिजे, ज्या पदामध्यें क्ष नुसता एक वर्ण येतो, त्या प्रत्येक पदाचीं चिन्हें बदल कर.

ज्या समीकरणांचा पूर्वीं विचार झाला, तीं सर्व एकवर्ण समीकरणें आहेत, याजकरितां ज्या समीकरणांमध्यें, क्षक्ष, क्षक्षक्ष, इत्यादि येतात, त्यांविषयीं ही गोष्ट लागू नाहीं, असें शिकणारानें पक्कें ध्यानांत ठेवावें.

२. समीकरणाचे उत्तराला खरें रूप द्यावयासाठीं, याप्रमाणें केलें पाहिजे. अशक्यरूप वजाबाकीचीं पदें फिरवून, उलटीं मांड, ह्मणजे जसें ५०−७० हे, ७०−५० असे मांड, आणि जो गुण खोट्या रितीनें उत्तरामध्यें येतो, त्याचा उलटा अर्थ कर. जसें जीं वर्षें नंतरचीं आहेत, तीं पूर्वींचीं असें मान; जो ऐवज घेणें आहे तो देणें असें मान; ज्या दिशेस जाण्याचें आहे, ती दिशा उलटी असें मान; याप्रमाणें पुढेंहि. ह्मणून क्षचे क्रिमतीचे कल्पनेविषयीं, कितीहि पक्ष असोत, आणि जर त्यांतून एक पक्ष दुसऱ्याचे विरुद्ध आहे, तर त्या पक्षांतून, जर एकाचे उत्पन्नावरून क्षची किंमत अशक्यरूप वजाबाकी होत आहे, तर असें जाणावें, कीं दुसरा पक्ष स्वीकारायास योग्य आहे.

कृत्याचा अर्थ त्याचे शब्दावरून जो मनांत येतो, त्यामध्यें सर्व अर्थाची एकरूपता नसती, असें वारंवार घडतें, ह्मणून, कोणतेंहि कृत्य त्याचे

केवळ शब्दाचे सरळ अर्थानें समजांत येत नाहीं, यामुळें कृत्यप्रश्नाचा अर्थ अधिक विस्ताररूपानें कल्पिला पाहिजे.

मागल्ये कृत्यांचे प्रश्न सांगण्यांत अशी तजवीज ठेविली आहे, कीं प्रश्नाचे सर्व शक्यरूप पक्षांतून, पाहिजे तो पक्ष घेण्यास मोकळा मार्ग ठेविला आहे. ह्मणजे, **प्रथम कृत्यामध्यें** असे शब्द आहेत कीं, **अचें वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा समय सांग.** परंतु **अचें वय बचे वयाचे दुप्पट कोणत्या समयीं होईल ? असे शब्द नाहींत.** अशा शब्दांनीं मनांत अशी कल्पना येती, कीं, ही गोष्ट पुढें येण्याची आहे; परंतु समीकरणानें शोध केला असतां, असें कळतें कीं ही गोष्ट पूर्वीं घडून गेली; आणि प्रश्न अशे शब्दांनीं सांगितला, ही चूक आहे. या प्रश्नाची खरी आणि खोटी सांगण्याची रीति खालीं लिहून दाखवितों.

खरी रीति.

सन् १८३० या वर्षांत अचें वय ५० होतें, आणि बयाचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा **समय** सांग,

उत्तर.

सन् १८३० याचे **पूर्वीं** २० वर्षें अथवा सन् १८१० त.

खोटी रीति.

सन् १८३० या वर्षांत अचें वय ५० होतें, आणि ब याचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट केव्हां **होईल** ?

उत्तर.

या **पुढें कधींही होणार नाहीं**; परंतु २० वर्षांपूर्वीं अचें वय बचे वयाचे दुप्पट होतें.

वरचा प्रश्न या दोनहि रितीनें सांगीतल्यानें, अशक्यरूप वजाबाकी होण्याची संभावना घडेल; परंतु पहिल्या तऱ्हेचे सांगण्यावरून, शिकणारापुढें मोहगम प्रश्न टाकिला आहे, तेव्हां कदाचित् तो खोटाही पक्ष स्वीकारील; आणि दुसरे तऱ्हेचे सांगण्यानें, अशक्यरूप वजाबाकी होण्याचें कारण हेंच, कीं कृत्याचे प्रश्नांत त्याच शब्दांचे सरळ अर्थावरून खोटा पक्ष शिकणाराचे मनांत सहज येतो.

कृत्यांत किती पक्ष आहेत, हें बहुतकरून सहज समजण्यांत येतें; परंतु, तें जर न येई, तर तें समजायास त्यांस, बहुतकरून, समीकरण साधन होतें.

३ उलटा विषय

उदाहरण.

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$
$$३क्ष-२क्ष = १०-८$$
$$क्ष = २$$

वरचा समीकरणाची सत्यता जाणल्यावरून, असें दिसतें, कीं, त्याचे प्रत्येक बाजूस अशक्य वजावाकी आहे, ह्मणजे ३क्ष-१० हे ६-१० आहेत, आणि २क्ष-८ हे ४-८ आहेत. मागील उदाहरणांविषयीं कांहीं जें लिहिलें आहे त्यानंतर या पक्षीं एथें फार सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. पुढे या समीकरणासारिखें कृत्य सांगितलें आहे. उत्तर अपूर्णांक असेल, तर त्याचे अंश आणि छेदांमध्यें, अशक्य वजावाकी जा कृतीनें येती, त्या कृतींत वरचे सारिखी कांहीं चूक असती. जर अक्ष+ब=कक्ष+ड, हें याप्रमाणें उलगडलें ह्मणजे, अक्ष-कक्ष=ड-ब, अथवा $क्ष=\frac{ड-ब}{अ-क}$ असें रूप होतें, त्यानंतर असें कळतें, कीं कपेक्षां अ उणा आहे, आणि बपेक्षां ड उणा आहे, तर यापासून अशी सूचना होती कीं, याचे उलगडण्याचे रितींत चूक झाली, आणि नीट उलगडण्याची रीति हीच आहे, ह्मणजे कक्ष-अक्ष=ब-ड. वरची चूक केवळ कृतीचे क्रमांत आहे, आणि कृत्याचे कल्पनेंत कांहीं चूक नाहीं.

कृत्य. १३ या अंकाचे दोन भाग कर, अशे रितीनें कीं, पहिल्या भागाची तिप्पट जितक्यानें दुसऱ्या भागाचे अर्धापेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें पहिला भाग ४ पेक्षां अधिक असावा.

असें सांगितल्यावरून, जर पहिला भाग क्ष असेल, तर हें पुढील समीकरण होतें.

$$३क्ष-\frac{१३-क्ष}{२} = क्ष-४$$

यास उलगडून, क्ष=१ निघतो, यामुळें १३ चे दोन भाग, १ आणि १२ असावे. परंतु अशे तऱ्हेनें, हें कृत्य अशक्य आहे, कां कीं पहिल्याचीं तिप्पट दुसऱ्याचे अर्धापेक्षां अधिक नाहीं. परंतु कृत्यामध्यें सर्व ठिकाणीं, **अधिक** या शब्दाचे स्थळीं, उणें मांडिलें, तर या पुढील-प्रमाणें समीकरण होईल,

$$\frac{१३-क्ष}{२} - ३क्ष = ४-क्ष$$

या समीकरणाचें उत्तर पूर्वींचे समीकरणाचे बरोबर आहे, ह्मणजे, क्ष=१, आणि कृत्य शक्यरूप आहे; कां कीं ३क्ष अथवा ३ हे, $\frac{१}{२}$(१३-क्ष), अथवा ६, यांपेक्षां जितक्यानें उणें आहेत तितक्यानें क्ष अथवा १, हा ४ पेक्षां उणा आहे.

आतां विचार केला पाहिजे, कीं समीकरणास उलगडून उत्तर सत्यरूप धरितें, परंतु त्या उत्तरानें तपासून, समीकरणाचा असत्यपणा प्रगट होतो, तर ही गोष्ट कशी घडती? आणि जोंपर्यंत समीकरणास उत्तरानें तपासून त्याची सत्यता स्थापिली जाई, तोंपर्यंत कोणतेंहि उत्तर त्याला स्थापीत नाहीं, असें समजावें कीं काय? वरचा उलट्या विषयाचें पहिलें रूप पहा. समीकरण हेंच आहे,

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$

याचें उत्तर क्ष=२. हें समीकरणांत लावलें असतां,

$$६-१० = ४-८$$

समीकरणाचे उलगडण्याचे रितीवरून हीच गोष्ट घडती कीं, या पुढील दोन समीकरणाचें उत्तर एकच आहे;

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$

$$१०-३क्ष = ८-२क्ष$$

ही गोष्ट कशी घडती, हें, या पुढील, उदाहरणापासून दिसेल ;

अक्ष−ब = कक्ष−ड　　ब−अक्ष = ड−कक्ष

अक्ष−कक्ष= ब−ड　　ब−ड = अक्ष−कक्ष

क्ष = $\frac{ब-ड}{अ-क}$ हें दोहोंचें उत्तर आहे.

यावरून, जेव्हां अशे उलट्ये जातीचा विषय आढळतो, तेव्हां असें जाणावें, कीं कृत्याचे पहाण्याचे शुद्ध रितीची उलटी समजूत आहे, परंतु अशे उलट्ये समजुतीपासून उत्तरामध्यें कांहीं फेर पडत नाहीं.

४ उलटा विषय.

उदाहरण.

अक्ष+ब=कक्ष+ड यास उलगडण्यानें

क्ष = $\frac{ड-ब}{अ-क}$

उलगडते समयीं दृष्टी चुकून, असें जर घडलें, कीं अ=क अथवा अ−क=०, तर या पुढील रूपाचें उत्तर सांपडेल.

क्ष = $\frac{ड-ब}{०}$

असें उत्तर समजाया जोगें नाहीं; कां कीं ड−ब यामध्यें ० किती वेळा जातें, असे प्रश्नास कांहीं उत्तर देववत नाहीं. जर कांहीं उत्तर दिलें, तर तें हेंच आहे कीं, शून्य कितीहि वेळा वारंवार घेतलें, तथापि कांहीं होत नाहीं; यामुळें ड−ब या बरोबर होण्यासाठीं, ० वारंवार घेतलें, तरी पुरत नाहीं. समीकरणावर पुनः लक्ष्य ठेव; जर अशी कल्पना केली, कीं अ=क, तर अक्ष=कक्ष होईल; ह्मणून, जेव्हां ब=ड, तेव्हां हें समीकरण नेहेमी खरें आहे; परंतु ब आणि ड बरोबर नसले, तर हें समीकरण, कधींहि, खरें होऊं सकत नाहीं. परंतु जा कृत्यापासून अशे

… पाहिजे; त्या रितीची सत्यता स्पष्ट आहे.

वरचे समीकरणामध्यें अशी कल्पना केली कीं, अ=क, ह्मणून अशे तऱ्हेचे कल्पनेपासून, जर, चालते रितीचीं उत्तरें समजायाजोगीं नसतील, तर अ केवळ कचे बरोबर करूं नये, परंतु फार जवळ जवळ करून, उलगडून, त्याचें उत्तर पहावें; नंतर अ पूर्वीपेक्षां कचे किमतीचे अधिक, जवळ जवळ, आहे असें मनांत आणावें, याप्रमाणें पुढें. या वेगळाले उत्तरावरून अ=क अशे कल्पनेचे उत्तराचा खरा अर्थ आहे कीं नाहीं, हें समजण्यांत येईल. जामध्यें अशी अवघड गोष्ट आहे, त्या जातीचें एक कृत्य तपासून पहातों.

कृत्य. व्यापाराचा तीन मंडळ्या आहेत, आणि त्यांतील एकेक मंडळीचा ४०००, ५०००, आणि ९००० याप्रमाणें पांत्या आहेत, ह्या तीन मंडळ्यांचा व्यापार एकदांच बंद झाला असतां, ते आपआपल्या पांत्यांविषयीं वांटे बरोबर करतील; परंतु जर दुसऱ्यांत प्रत्येक पांतीदारानें आपआपले पांतीविषयीं, मंडळीचे पुंजीला १० रुपये प्रमाणें अगाऊ पैसा भरला असेल, आणि त्याप्रमाणें तिसऱ्यांत प्रत्येक पांतीदारानें १२ रुपये प्रमाणें अगाऊ दिले असतील, तर बंद होते समयीं पहिले आणि दुसरे मंडळीचा ऐवज, एकत्र मिळून, तिसऱ्या मंडळीचे ऐवजाचे बरोबर होईल; असें झालें, तर प्रत्येक मंडळींतल्या प्रत्येक पांतीचे वांट्यास काय मिळेल?

प्रत्येक पांतीचे वांट्याचे रुपये दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तेव्हां, कृत्याचे कल्पनेप्रमाणें अगाऊ पैका भरल्यावर, ह्या तीन मंडळ्यांनीं आपआपल्या पांतीदारास पांतीचा वांटा याप्रमाणें देऊं सकतात, ह्मणजे पहिली मंडळी, एकएक पांतीस, क्ष रुपये देऊं सकेल, दुसरी मंडळी, क्ष+१० रुपये, देऊं सकेल, आणि तिसरी मंडळी, क्ष+१२ रुपये, देऊं सकेल; तर वेगळाल्या मंडळ्यांचे पांतीची संख्या नजरेंत आणून, या वरचे कल्पनेनें ४०००क्ष,५००० (क्ष+१०), आणि ९०००(क्ष+१२), हे त्यांचे वेगवेगळाले ऐवज आहेत; तर कृत्याचे शेवटील, संकेताप्रमाणें, हें पुढील समीकरण होतें,



$$४०००क्ष+५०००(क्ष+१०) = ९०००(क्ष+१२)$$

$$(\div)१००० \quad ४क्ष+५(क्ष+१०) = ९(क्ष+१२)$$

$$अथवा \quad ९क्ष+५० = ९क्ष+१०८$$

या कलमामध्यें उलटें विषयाविषयीं जी गोष्ट सांगीतली, तो उलटेपणा यांत दिसतो ७५ आणि ७६ व्ये पृष्ठावर जी गोष्ट सांगीतली, कीं कृत्याचे शब्दाचा अर्थ बरोबर समजला नसेल, ही गोष्ट या उदाहरणाचे अशक्यतेविषयीं लाक्तां येत नाहीं, कां कीं अशे गोष्टीकरून अशी कल्पना केली पाहिजे, कीं व्यापार बंद होण्याचे समयीं, तिन्ही मंडळ्या नादार आहेत, आणि प्रत्येक पांतीविषयीं कर्जदारहि आहेत; अशी कल्पना केली असतां, प्रत्येक पांतीचें कर्ज दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर पूर्वीं पाहिल्याप्रमाणें, शेवटचें समीकरण या पुढीलप्रमाणें होईल. शिकणारानें यास मांडून उलगडून पहावें.

$$५०-९क्ष=१०८-९क्ष$$

हेंहि समीकरण पूर्वींप्रमाणेंच अशक्य आहे. तर आतां, वर सांगितल्यावरून, कृत्याचे संकेतामध्यें, किंचित् भेद करून, त्याचें उत्तर पहा. अशी कल्पना कर, कीं तिसऱ्या मंडळींत ९००० एवढ्या पांत्या नाहींत, परंतु ८९९९ मात्र पांत्या आहेत. अशी कल्पना केली असतां, समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$४०००क्ष+५०००(क्ष+१०) = ८९९९(क्ष+१२)$$

$$अथवा\ ४०००क्ष+५०००क्ष+५०००० = ८९९९क्ष+१०७९८८$$

$$अथवा\ ४०००क्ष+५०००क्ष-८९९९क्ष = ५७९८८$$

$$अथवा \quad क्ष = ५७९८८$$

यामुळें उत्तर हेंच, कीं आरंभीं प्रत्येक मंडळी, पांतीप्रमाणें, ५७९८८ इतके रुपये देऊं शकली. आतां वरपेक्षां अणखी थोडा भेद कर,

आणि अशी कल्पना धर, कीं तिसऱ्या मंडळीचा ९००० पांत्यांमध्यें, केवळ एक पांतीचा एक शंभरांश कमी आहे, ह्मणजे, असें समजावें कीं त्या मंडळींत $\text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}$ इतक्या पांत्या आहेत. तर समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$\text{४०००क्ष}+\text{५०००}(\text{क्ष}+\text{१०}) = \text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}(\text{क्ष}+\text{१२})$$

$$\text{४०००क्ष}+\text{५०००}+\text{५००००} = \text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}\text{क्ष}+\text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}\times\text{१२}$$

$$\text{४०००क्ष}+\text{५०००क्ष}-\text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}\text{क्ष} = \text{८९९९}\frac{\text{९९}}{\text{१००}}\times\text{१२}-\text{५००००}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{१००}}\text{क्ष} = \frac{\text{८९९९९९}}{\text{१००}}\times\text{१२}-\text{५००००}$$

$(\times)\text{१००}$

$$\text{क्ष} = \text{८९९९९९}\times\text{१२}-\text{५००००००}$$

$$\text{क्ष} = \text{५७९९९८८}$$

अथवा, प्रत्येक मंडळी दरपांतीस ५७९९९८८ इतके रुपये देऊं शकेल. अशाच रितीनें, जर तिसऱ्ये मंडळीचा $\text{८९९९}\frac{\text{९९९}}{\text{१०००}}$ इतक्या पांत्या असल्या, तर, समीकरणापासून वरपेक्षां अधिक मोठें उत्तर निघेल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ४००० आणि ५००० पांत्यांचे मंडळ्यांतील एकाची पांती वाढविली असतां, वर सांगितल्याप्रमाणें उत्तरें येतील. यामुळें, वरचे प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं, कितीहि मोठे अंक घेतले, तरी संकेतास पुरत, असे होत नाहीं; परंतु संकेतामध्यें किंचित् फेर केला असतां, उत्तर सांपडेल, आणि तो फेर जसा जसा कमी कमी करावा, तसे तसे उत्तराचे अंक अधिक वाढत जातील. बीजगणित लागू केल्यानें, वरचा सारिखे उलटेविषय उत्पन्न होतात, ते कळायासाठीं, एथें वरचें कृत्य घेतलें आहे. तर आतां ही गोष्ट सोडून देऊन वरचे सारिखे समीकरणाचा कांहीं विचार करितों.

उदाहरण.

$$\text{अक्ष} = \text{बक्ष}+\text{क}$$

घास उलगडून $\quad \text{क्ष} = \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{ब}}$

यांत, अ = व असें झालें, तर उत्तर $\frac{क}{०}$ होईल. हें समजायाजोगें नाहीं, आणि समीकरण अशक्य आहे, कां कीं त्याचें हें पुढील रूप होतें.

$$अक्ष = अक्ष + क$$

परंतु जर व पेक्षां अ अति लहान परिमाणानें मोठा असला, तर तें समीकरण आणि त्याचें उत्तर, हीं दोन्हीं खरीं होतील. तें लहान परिमाण दाखविण्यासाठीं $\frac{१}{म}$ हें घे, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$(व+\frac{१}{म})क्ष = वक्ष+क$$

अथवा $$वक्ष+\frac{क्ष}{म} = वक्ष+क$$

(−)वक्ष $$\frac{क्ष}{म} = क$$

(×)म $$क्ष = मक$$

ही क्षची किंमत वरचे उत्तरापासूनहि निघेल, कां कीं

$$अ = \frac{क}{अ-व} = \frac{क}{\frac{१}{म}} = मक$$

व पेक्षां अ कांहीं लहान परिमाणानें अधिक करायासाठीं $\frac{१}{म}$ हा लहान असला पाहिजे, म्हणून, म मोठा असला पाहिजे; या रितीनें एक समीकरण उत्पन्न होईल, ज्याचें उत्तर इच्छेप्रमाणें मोठें होईल. उदाहरण, क=१ असें घे आणि मनांत आण, कीं वरचे रूपाचें समीकरण पाहिजे, ज्याचें उत्तर १००००००० इतकें होईल. म = $\frac{१}{१००००००}$ असें घे. तर क्ष = १०००००० असें उत्तर या पुढचे सारिख्ये समीकरणापासून निघेल.

$$७\frac{१}{१००००००}क्ष = ७क्ष + १$$

जरी एकादा अंक समीकरणास बरोबर स्थापीत नाहीं, तरी तो त्यास जवळ जवळ स्थापील, अशी कल्पना करितां येती. परंतु, जवळ

जवळ, हा शब्द मोहगम अर्थाचा आहे. यासाठीं आपले कामास पडत नाहीं, हें दाखविण्यासाठीं हें पुढें उदाहरण देतों, मनांत आण कीं, ७क्ष=२क्ष+३ याप्रमाणें समीकरण आहे. क्ष=१ असें असलें, तर शोधून पहा कीं, अशे किमतीनें, वरचें समीकरण स्थापिलें जातें कीं नाहीं? तो अंक समीकरण स्थापीत नाहीं; कां कीं क्ष=१, तर समीकरणाची एक बाजू ७ आहे, आणि दुसरी बाजू ५ आहे; ह्मणून पहिली बाजू दुसऱ्ये बाजूचे बरोबर नाहीं, परंतु २ इतक्यानें त्यापेक्षां अधिक आहे. तसेंच उत्तर, तशेच शब्दांनीं या पुढील समीकरणास लागतें.

७क्ष=५क्ष+१९९८. यांत, क्ष=१००० असें कल्पून, त्याणें समीकरण स्थापिलें जातें कीं नाहीं हें पहा. येणेंकरून समीकरणाची पहिली बाजू ७००० होती आणि दुसरी बाजू ६९९८ होती. जेव्हां क्ष=१, पहिले समीकरणास जितके जवळ जवळ स्थापितो, तितके क्ष=१००० हे दुसऱ्ये समीकरणास जवळ जवळ स्थापितात, असें ह्मणतां येतें कीं काय? ७००० हे ६९९८ यांचे जितके जवळ आहेत, तितके ७ हे ५ यांचे जवळ होतील कीं काय? अंकांचीं अंतरें मात्र पाहिलीं असतां, होय, असें उत्तर देतां येतें, कां कीं

७−५=२

७०००−६९९८=२

परंतु, जवळ जवळ*, हे शब्द सरळ अर्थानें समजले असतां, असें बोलवेल, कीं ७ आणि ५ हे जितके परस्पर जवळ आहेत, त्यांपेक्षां ७००० आणि ६९९८ हे दोन परस्पर अधिक जवळ जवळ आहेत. पहिल्ये पक्षीं ७ या लहान अंकापासून २ अंतर निघतें; दुसऱ्यापक्षीं ७००० या मोठ्या अंकांतहि २ अंतर निघतें, परंतु जवळ जवळ, या शब्दाचा अर्थ, वर सांगीतल्याप्रमाणें, लक्षांत घेऊन, क्षची किंमत लहान असेल, त्यापेक्षां जेव्हां ती किंमत मोठी असेल, तेव्हां अक्ष आणि अक्ष+क हे

* साटें करिते समयीं ६९९८ रुपये, यत्किंचित् अंतरानें, ७००० यांचे बरोबर असें मानण्यांत येईल, परंतु कांहीं वस्तू ५ रुपयांचे किमतीनें घेतली, तशीच वस्तू ७ रुपयांचे किमतीनें घेतली, तर फार महाग दिसेल.

अधिक जवळ जवळ होतील, याविषयीं पुढें विचार करूं. तर अशे अर्थानें असें ह्मणतां येतें कीं, जेव्हां एकादे कृत्यावरून असें समीकरण निघतें. ह्मणजे

$$अक्ष = अक्ष + क$$

तेव्हां त्याचें उत्तर हेंच आहे, कीं अशे कृत्याचे उत्तरास कोणताहि अंक, कसाहि मोठा असला, तरी पुरत नाहीं. परंतु जितका जितका अंक मोठा असेल, तितकें तितकें उत्तर जवळ जवळ येईल.

सरळ रितीनें वरचें समीकरण उलगडल्यानें, या पुढीलप्रमाणें उत्तर निघतें.

$$क्ष = \frac{क}{अ-अ} \text{ अथवा } \frac{क}{०}$$

$\frac{क}{०}$ याचा अर्थ अनंत अंक आहे, आणि यामुळें समीकरणाचें उत्तर अनंत मोठें आहे, असें ह्मणण्याची चाल आहे. अशा बोलण्याचा चाली शब्दांचे मूळ अर्थानें समजत नाहीं, कां कीं अनंत मोठा, अशा अंकाचा बोध होऊं शकत नाहीं, ह्मणजे असा अंक एवढा मोठा, कीं तो गणायास किंवा मोजायास येत नाहीं, परंतु अनंत, हा शब्द बहुतकरून कामांत आणितात; यास्तव या पुढील सांगितलेल्या अर्थानें हा शब्द स्वीकारितों;

क=० असलें तर $\frac{१}{क}$ अनंत आहे. असें ह्मटलें असतां, असें समजावें कीं, ही पुढील गोष्ट सांगण्याचे संक्षेप रितीवांचून, यांत दुसरा कांहीं अर्थ नाहीं. जेव्हां क लहान आहे, तेव्हां $\frac{१}{क}$ मोठा आहे; जर क अधिक लहान होईल तर $\frac{१}{क}$ अधिक मोठा होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणून क, हवा तेवढा लहान केला असतां, $\frac{१}{क}$ हा, दुसरा कोणता अंक कसाहि मोठा दिलेला असेल, त्यापेक्षां अधिक करितां येतो. आणि जेव्हां असें ह्मणतो कीं कृत्याचें उत्तर अनंत आहे, तेव्हां असें समजावें, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं कोणताहि अंक, कितीहि मोठा असला, तरी पुरेसा होत नाहीं; परंतु कोणताहि मोठा अंक जवळ जवळ पुरतो, त्यापेक्षां अधिक

मोठा अंक, अधिक जवळ जवळ पुरतो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणून यद्यपि कृत्याचे उत्तराचा खरेपणा बरोबरच निघत नाहीं, तथापि यथेच्छ मोठा अंक घेतल्यानें, उत्तर इच्छेप्रमाणें खरेपणाचे जवळ जवळ येईल.

५ उलटा विषय.

उदाहरण.

अक्ष+ब=कक्ष+ड यास उलगडण्यानें

$$क्ष=\frac{ड-ब}{अ-क}$$

आतां पूर्वीचे विषयाप्रमाणें, या समीकरणाचें उलगडणें झाल्यानंतर असें जरी घडेल कीं, अ बरोबर क, आणि याशिवाय ब बरोबर ड, अशी कल्पना करण्याची गरज पडेल, तर उत्तर

$\frac{ड-ब}{अ-क}$ हें, $\frac{०}{०}$ असें मांडिलें पाहिजे.

यांत कांहीं अर्थ नाहीं. तर समीकरणाकडे लक्ष्य लावलें असतां, क्षला कांहीं निश्चित किंमत देण्याचें प्रयोजन नाहीं, असें दिसतें; कां कीं, जर अ=क, आणि ब=ड, तर क्षची कशीहि किंमत असली, तर अक्ष+ब=कक्ष+ड आहे. यामुळें प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे; कीं क्ष ला कशीहि किंमत दिली, तरी समीकरणाचे संकेत स्थापितां येतात. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावर लावून दाखवितों.

कृत्य. असा कांहीं अंक आहे कीं काय, कीं, तो अंक एकानें उणा करून अ वेळा घेतला, आणि तोच अंक दोहोंनीं अधिक करून ब वेळा घेतला, या दोहोंची बेरीज, तोच अंक क वेळा घेतला, याचे बरोबर होईल; अ,ब,क, हे व्यक्त अंक, पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत ?
इच्छिला अंक क्ष आहे, असें मनांत आण, तर

$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२) = कक्ष$$

$$अक्ष-अ+बक्ष+२ब = कक्ष$$

$$अक्ष+बक्ष-कक्ष = अ-२ब$$

$$(अ+ब-क)क्ष = अ-२ब$$

$$क्ष = \frac{अ-२ब}{अ+ब-क}$$

ताळा.

$$क्ष-१ = \frac{क-३ब}{अ+ब-क} \qquad अ(क्ष-१) = \frac{अक-३अब}{अ+ब-क}$$

$$क्ष+२ = \frac{३अ-२क}{अ+ब-क} \qquad ब(क्ष+२) = \frac{३अब-२बक}{अ+ब-अ}$$

$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२) = \frac{अक-२बक}{अ+ब-क} = \frac{क(अ-२ब)}{अ+ब-क}$$

$$= क\times\frac{अ-२ब}{अ+ब-क} = कक्ष$$

कल्पना कर, कीं अ=८,ब=४,क=१२, असें असेल, अथवा कृत्य पुढीलप्रमाणें असेल; तो अंक काय आहे, कीं त्यास एकानें उणा करून बाकी ८ नीं गुणिली, तो गुणाकार, आणि त्याच अंकास २ मिळवून, ती बेरीज ४ होंनीं गुणिली, या दोहोंची बेरीज त्या इच्छिलेल्या अंकाचे १२ पट होईल? यांत असें दिसतें, कीं अ-२ब=०, आणि अ+ब-क=०; तर यावरून वरचें उत्तर हेंच रूप धरितें, $\frac{0}{0}$ हें असें उत्तर कसें घडतें, तें समजायासाठीं, हा पक्ष तपासून पहातां हें पुढील समीकरण येतें.

$$८(क्ष-१)+४(क्ष+२) = १२क्ष$$

$$८क्ष-८+४क्ष+८ = १२क्ष$$

$$१२क्ष = १२क्ष$$

ही गोष्ट नेहेमी खरी आहे, यामुळें वरचे सारिखे प्रश्नाला हेंच उत्तर, कीं हरएक पूर्ण किंवा अपूर्णांक, जो १ पेक्षां मोठा आहे, तो

कृत्याचे संकेत स्थापितो; $\frac{0}{0}$ या रूपास जो अर्थ देण्याची कल्पना केली होती, त्यासारिखें हें उत्तर आहे.

समीकरणाचा रितीविषयीं आणि त्यांचे मूळपीठिकेविषयीं ज्या गोष्टी वर सांगितल्या, त्यांचा साहाय्यानें, आतां कांहीं कृत्यें उलगडितो. पदार्थविज्ञानाचे निरनिराळ्ये भागांतून उदाहरणें घेतलीं आहेत, तीं अनुक्रमानें वेगवेगळ्या भागांत येतील, आणि ज्या अनुभविक गोष्टींवरून उलगडणें होतें, त्या गोष्टी प्रत्येक भागाचा आरंभीं सांगितल्या आहेत.

उदाहरणें, १ भाग. **स्पिसिफिक् ग्राविटीविषयीं.*** कांहींएक पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणजे पदार्थाचें आकारमान तितकेंच पाण्याचे आकारमानाबरोबर असेल, तर त्या पाण्याचें वजन जितके वेळा पदार्थाचे वजनांतून जातें, त्यास त्या पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणतात. जसें, **इटेची** स्पिसिफिक् ग्राविटी दोन आहे, असें ह्मटलें तर त्याचा अर्थ हाच, कीं इटेचें आकारमान एक घनफूट असलें, तर, त्याचें वजन एक घनफूटपाण्याचे वजनाचे दुप्पट आहे असें जाणावें. पाण्याचे घनफुटीचें वजन सुमारें १०००† आवारड्युपाईसचे औंसांबरोबर आहे.

१ **कृत्य.** दुधाची स्पिसिफिक् ग्राविटी १.०३ आहे, तर एक पैंट पाणी तीन पैंट दुधांत मिळविलेलें असतां त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय आहे?

जर एक पैंट पाण्याचें वजन किती औंस आहे, हें दाखविण्यासाठीं म घेतला, तर दुधाचे एक पैंटाचें वजन १.०३×म इतके औंस होईल, तर त्या सर्व चार पैंटांचे मिश्राचें वजन म+(१.०३म)३, अथवा म+३.०९म औंस, यांजबरोबर आहे. परंतु पाण्याचें चार पैंटाचें

* स्पिसिफिक् ग्राविटी, हे दोन इंग्रेजी शब्द आहेत, यांचा अर्थ विशिष्टगुरूत्व किंवा संबंधी वजन, ह्मणजे दोन समान आकाराचे जे दोन पदार्थ, त्यांचा परस्पर वजनाचा संबंध या इंग्रेजी शब्दांचें बरोबर भाषांतर होण्यास कठिण, यामुळें इंग्रेजी शब्दच कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांचा अर्थ वर सांगितलेले गोष्टीवरून त्वरेनें मनांत येईल.

† पदार्थविज्ञानाविषयीं वजनाची कांहीं गोष्ट आली, तर इंग्लिश वजनें कामांत घेतलीं पाहिजेत; त्यांचे सर्व कोष्टक अंकगणित पुस्तकांत दाखविले आहेत.

वजन ४म औंस आहे; यास्तव, वरची अनुभविक गोष्ट सांगीतल्यावरून, मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी याप्रमाणें आहे.

$$\frac{\text{म}+३\cdot०९\text{म}}{४\text{म}}=\frac{४\cdot०९\text{म}}{४\text{म}}=\frac{४\cdot०९}{४}=१\cdot०२२५$$

सोपें पडण्याकरितां या उदाहरणांत म असें एक परिमाण घेतलें, परंतु उलगडण्याची कृति केल्यानें तें नाहींसें होतें. हें उदाहरण इतकें सोपें आहे कीं त्याला समीकरणरूप देऊन उलगडण्याचें प्रयोजन नाहीं.

२ **कृत्य.** कांहींएका पदार्थाचे म घनफुट आहेत, आणि त्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी अ आहे, तर दुसऱ्या कांहीं ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचे न घनफुट त्यांत मिळविले, तर त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय होईल?

स्पष्ट दिसतें कीं मिश्राचे म+न घनफुटींचें वजन पाण्याचे मअ+नब घनफुटींचे वजनाबरोबर होईल. यामुळें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी $\frac{\text{मअ}+\text{नब}}{\text{म}+\text{न}}$ याजबरोबर होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरण. $\frac{\text{मअ}+\text{नब}}{\text{म}+\text{न}}$ हे अ आणि ब यांचे मध्यें अवश्य आहेत असें सिद्ध करून दाखीव.

३ **कृत्य.** १० स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा २० घनफुटी आहेत, त्याशीं २ स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी ५ होईल?

त्या पदार्थाचा इच्छिलेल्या घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर २०+क्ष या सर्व मिश्राचा घनफुटींचें वजन, २०×१०+क्ष×२, अथवा २००+२क्ष इतक्या पाण्याचे घनफुटींचे वजनाबरोबर आहे. यामुळें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी $\frac{२००+२\text{क्ष}}{२०+\text{क्ष}}$ या बरोबर होईल. आणि

$\frac{२००+२\text{क्ष}}{२०+\text{क्ष}}=५$, अथवा, $२००+२\text{क्ष}=५(२०+\text{क्ष})\ \therefore \text{क्ष}=३३\frac{१}{३}$

वरचे उदाहरणावरून सर्व साधारण रीति. ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा म घनफुटी आहेत, तर त्यास अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल?

इच्छिलेल्या पदार्थाचा घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर

अचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा क्ष घनफुटी, पाण्याचे अक्ष घनफुटींचे वजनाबरोबर होतील, आणि ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घनफुटी, पाण्याचे बम घनफुटींचे वजनाबरोबर होतील. यावरून मिश्राचा म+क्ष घनफुटी, पाण्याचे बम+अक्ष घनफुटींचे वजनाबरोबर होतील. ह्मणून, वरचे विशेष उदाहरणाप्रमाणें,

$$\frac{\text{बम}+\text{अक्ष}}{\text{म}+\text{क्ष}} = \text{क} \qquad \text{बम}+\text{अक्ष} = \text{क}(\text{म}+\text{क्ष})$$

$$\text{बम}+\text{अक्ष} = \text{कम}+\text{कक्ष}$$

$$\therefore \text{बम}-\text{कम} = \text{कक्ष}-\text{अक्ष} \text{ अथवा } (\text{ब}-\text{क})\text{म} = (\text{क}-\text{अ})\text{क्ष}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ब}-\text{क}}{\text{क}-\text{अ}} \cdot \text{म}$$

यांत जर कपेक्षां ब अधिक आहे, आणि अपेक्षां क अधिक आहे; ह्मणजे, जेव्हां ब–क आणि क–अ हीं दोन शक्यरूप आहेत, तर हें उत्तर खरें आहे. आणि ब–क आणि क–अ हीं दोन अशक्यरूप असतांहि हें उत्तर खरें; कां कीं, या पक्षीं, जो खोटेपणा दृष्टीस येतो तो या पुढील उलट्या मांडण्यानें होतो, ह्मणजे

$$\text{बम}+\text{अक्ष} = \text{कम}+\text{कक्ष}$$

याची खरी मांडण्याची रीति कम–बम = अक्ष–कक्ष अशी आहे. परंतु चुकून त्याचे जागीं बम–कम = कक्ष–अक्ष असें मांडितात. तर खरें उत्तर याप्रमाणें आहे, $\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{ब}}{\text{अ}-\text{क}} \cdot \text{म}$. या पक्षीं कपेक्षां अ अधिक, आणि बपेक्षां क अधिक आहे. ह्मणजे, जेव्हां क हा अ आणि ब या दोहोंचेमध्यें आहे, तेव्हां हें कृत्य शक्यरूप आहे. जर क हा अ आणि ब या दोहोंचेमध्यें नाहीं, तर, ६९ आणि ७० व्ये पृष्ठांवर जी रीति दाखविली, त्याप्रमाणें क्षच्या जो पहिला अर्थ कल्पिलेला होता, त्यास अगदीं उलटा फिरवून, शक्यरूपाचें कृत्य होतें; ह्मणजे, जर अशी कल्पना केली, कीं बचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घनफुटी यांतून अचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ वजा होतो, अथवा जर अशी कल्पना

केली, कीं त्या ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थामध्यें अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ पूर्वींच मिश्रित आहे तेव्हां, खरे रूपाचें कृत्य होतें. ही गोष्ट या पुढील कृत्यास-उलगडल्यानें समजेल; प्रश्न. ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे **म घनफुटींतून** अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल? क हा अ आणि ब या दोहोंपेक्षां जसजसा अधिक किंवा या दोहोंपेक्षां कमी असेल, तसतसें या पुढीलप्रमाणें उत्तर होईल.

$$क्ष = \frac{क-ब}{क-अ} \cdot म \qquad अथवा \quad क्ष = \frac{ब-क}{अ-क} \cdot म$$

परंतु पूर्वीं जो उलटा विषय दाखविला त्यासारिखाच या वरचे उदाहरणावरून निघेल. उदाहरण, असें मनांत आण कीं ब (=६) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म(=२०) घनफुटींतून अ(=१०) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी, क (=१२) होईल? **हें कृत्य दाखवायासाठीं अ घे.** एथें, जरी कृत्य अशक्यरूप असें उघड दिसतें, तरी उत्तर शक्यरूप होईल, ह्मणजे,

$$क्ष = \frac{क-ब}{क-अ} \cdot म = \frac{१२-६}{१२-१०} \cdot २० = \frac{६}{२} \cdot २० = ६०$$

उत्तराचे रूपावरून, याचा अशक्यपणा ओळखला जात नाहीं, परंतु कृत्यावर चांगला विचार केला असतां दिसण्यांत येईल, कीं याशीं उत्तर असंगत आहे; कां कीं ६० घनफुटी २० घनफुटींतून काढायास अशक्य. ज्या समीकरणावरून असें उत्तर सांपडतें तें हेंच आहे.

$$\frac{१२०-१०क्ष}{२०-क्ष} = १२ \quad अथवा \quad १२०-१०क्ष = २४०-१२क्ष$$

यांत, उत्तर क्ष = ६० असें असतां, ७८व्ये पृष्ठांतल्ये तिसरे **उलटे विषयाप्रमाणें** घडतें. ७९ व्ये पृष्ठावरचे गोष्टीवरून, या समीकरणास नीट करून, याप्रमाणें होईल.

$$१०क्ष-१२० = १२क्ष-२४० \quad अथवा \quad \frac{१०क्ष-१२०}{क्ष-२०} = १२$$

हें उत्तर या पुढील कृत्यावरून निघतें; अ (=१०) या स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती असावा कीं जांतून, ब (=६) स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म(=२०) घनफुटी वजा केल्या असतां, बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क(=१२) बरोबर होईल ? **हें कृत्य दाखविण्यास ब घे.**

क्ष= ६० हें उत्तर शक्यरूप किंवा अशक्यरूप असें ह्मणणें, या पुढील प्रश्नांचे उत्तरांचे आधारावर आहे. जेव्हां (अ) कृत्य सांगितलें तेव्हां (ब) कृत्याचा कांहीं भास आपल्ये मनांत आला होता कीं नाहीं? ह्मणजे. (अ) आणि (ब) या दोहोंतून जें खरें होईल त्यास घ्यावयाचें होतें कीं काय; आणि कृत्यांचा तपास केल्याचे पूर्वींच, तें कृत्य खरें आहे असें समजून घेतलें कीं काय ? अथवा शब्दांचे सरळ अर्थावरूनच (अ) कृत्याचें मनन झालें कीं काय ? तर, पहिल्या पक्षीं उत्तर हेंच, कीं खोटी कल्पना घेतली, आणि दुसरी कल्पना घेण्यास योग्य होती, आणि उत्तर क्ष= ६० असें आलें; दुसरे पक्षीं, उत्तर हेंच कीं कृत्य अशक्य रूप आहे.

४ कृत्य. सोन्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी १९$\frac{1}{4}$, आणि रुप्याची १०$\frac{1}{2}$, आहे; आणि एक सोनार $\frac{1}{4}$ घनफुटीचा तुकडा विकायास आणितो, आणि सांगतो कीं, तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा आहे, आणि त्याचें वजन २६० पौंड आहे. तर तो शुद्ध सोन्याचा असेल कीं काय ? जर नसला, तर त्यांत रुप्याची भेळ असेल कीं काय ? त्यापक्षीं रुपें आणि सोनें हीं कोणकोणत्या प्रमाणानें मिळविलेलीं आहेत तें सांग.

पाण्याचे एक घनफुटीचें वजन १००० औंस आहे, आणि सोनें १९$\frac{1}{4}$ वेळा पाण्यापेक्षां भारी ह्मणून, सोन्याचे एक घनफुटीचें वजन १९२५० औंस होईल, आणि एक घनफुटीचे $\frac{1}{4}$ शाचें वजन ४८१२$\frac{1}{2}$ औंस होईल, अथवा ३०० पौंड आणि १२$\frac{1}{2}$ औंस आहे. यामुळें तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा नाहीं असें कळतें. पुनः रुप्याचे एक घनफुटीचें वजन १०५०० औंस, आणि एक घनफुटीचे $\frac{1}{4}$ चें वजन १६४ पौंड आणि १ औंस आहे. यामुळें त्या तुकड्याचें वजन तितक्ये शुद्ध रुप्याचे तुकड्यापेक्षां अधिक आहे, परंतु तितक्येच शुद्ध सोन्याचे तुकड्यापेक्षां कमी आहे, यामुळें तो तुकडा या दोन धातूंचे मिश्राचा आहे. या पक्षीं, त्यांतील सोन्याचा भाग दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ह्मणून या जागीं

क्ष हा घनफुटीचा अपूर्णांक आहे; तेव्हां $\frac{१}{४}$ − क्ष, बाकी रूप्याचा भाग आहे, आणि १९२५०क्ष औंस हें सोन्याचें वजन आहे, आणि १०५०० ($\frac{१}{४}$−क्ष) औंस हें रूप्याचें वजन आहे. परंतु तुकड्याचें सर्व वजन २६० पौंड, अथवा ४१६० औंस आहे; यामुळें,

$$१९२५०क्ष + १०५०० (\frac{१}{४} - क्ष) = ४१६०$$

अथवा $क्ष = \frac{१५३५}{८७५०} = \frac{३०७}{१७५०} = \frac{३}{१७}$ जवळ जवळ, अथवा $\frac{१}{४}$ चे $\frac{१२}{१७}$

∴ १७ भागांतून १२ भाग सोन्याचे आणि बाकी भाग रूप्याचे आहेत.

आर्किमिदीज् याणें जें नामांकित कृत्य पहिल्यानें उलगडलें तें कृत्य हेंच, आणि तें कृत्य या रितीनें सर्व साधारण होईल; अ आणि ब अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचे दोन पदार्थ कोणत्या प्रमाणानें मिळवावे, कीं मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल? इच्छिलें मिश्र करायासाठीं, त्याचें प्रमाण याप्रमाणें घे, ह्मणजे पहिल्याचा १ घनफुटीस दुसऱ्याचा क्ष घनफुटी असाव्या. अशानें पहिल्याचे १ घन फुटीचें वजन, पाण्याचे अ घनफुटी बरोबर होईल, आणि दुसऱ्याचे क्ष घनफुटींचें वजन पाण्याचे बक्ष घनफुटीं बरोबर होईल; ह्मणून मिश्राचे १+क्ष घनफुटींचे वजन पाण्याचे अ+बक्ष घनफुटींचे वजना बरोबर होईल. परंतु संकेताप्रमाणें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क असावी, तर त्या मिश्राचें वजन पाण्याचे क(१+क्ष) घनफुटींचे वजना बरोबर आहे; यामुळें

$$अ + बक्ष = क(१ + क्ष) \text{ अथवा } क्ष = \frac{अ - क}{क - ब},$$

यास ९० आणि ९१ व्ये पृष्ठावर सांगितलेली गोष्ट लागू पडती.

उदाहरणें. २ भाग. तरफेविषयीं. एक दांडी, दोन शेवटांमध्यें कोणताहि बिंदू धरून टांगिली असतां, ती एका स्थितींत मात्र स्थिर राहील, ह्मणजे आडवी सारखी लोंबत राहील; परंतु तिजवर यथायोग्य वजनें ठेविलीं असतां, ती कोणत्याहि स्थितींत स्थीर राहील असें करितां येईल, असें केलें असतां तीस बरोबर तोललेली दांडी अथवा

तरफ असें ह्मणतात. याविषयीं रिती याप्रमाणें आहेत; पहिल्यानें, असें मनांत आणावें कीं दांडीचें सगळें वजन तिचे मध्यबिंदूवर एकत्र होतें. दुसऱ्यानें, एकादे वजनांत जितके **पौंड*** असतील, त्यांस अटीपासून जितक्या **फुटी** अंतर असेल त्या फुटींनीं गुणून, त्या गुणाकारास त्याच वजनाचें **मोमेंट†** असें ह्मणावें; यावरून जर अटीचे एक बाजूचे वजनाचे मोमेंटांची बेरीज दुसऱ्ये बाजूचे वजनाचे मोमेंटांचे बेरिजे बरोबर असेल, तर ती दांडी बरोबर तोललेली राहील. जर दांडी तिचे मध्यबिंदूवर टांगिली नसेल, तर दांडीचें सर्व वजन मध्यबिंदूमध्यें एकत्र आहे, असें जाणलें पाहिजे. जर अटीचे एक्ये बाजूचे मोमेंटांची बेरीज दुसऱ्या बाजूचे बेरिजेचे बरोबर नसली, तर जिची बेरीज मोठी आहे ती बाजू दबेल.

१. **कृत्य.** १८ फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन ४० पौंड आहे; तिचे एक शेवटावर १२ पौंडांचें आणि दुसरे शेवटावर २० पौंडांचें वजन ठेविलें आहे. तर अट कोठे असावी, कीं ती दांडी त्या अटीवर सारखी तोललेली राहील.

अ	क	ड	ब
१२पौंड	४०पौंड		२०पौंड

दांडीचें वजन ४० पौंड ह्मणून, हें **क** मध्यबिंदूवर एकत्र आहे असें मनांत आण. तर **अक**=**कब**=९ फुटी. आतां ६६ वे पृष्ठावरचे १ उलट्ये विषयासारिखा खोटेपणा उत्पन्न होईल, ह्मणून, **क** चे कोणत्ये बाजूस अट ठेवावी हें अगोधर निश्चयें कळत नाहीं, असें असलें तरी उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं. आतां मनांत आण कीं, **ब** आणि **क** चे मध्यें कोठेहि अटीचें ठिकाण **ड** असो, ह्मणजे **अ** ठिकाणीं १२ पौंड आणि **क** ठिकाणीं ४० पौंड हीं दोन मिळून **ब** ठिकाणाचे २० पौंडांशीं समतोल असावीं. **अड**=क्ष फुटी घे. तर **कड**=(क्ष−९)

* पौंड आणि फुटी यांचे जागीं दुसरे कोणतेंहि जातीचे एकं कामांत घेतां येतील; परंतु कृत्यांत सर्व ठिकाणीं एकच जातीचे एकम् घेण्याविषयीं जपलें पाहिजे.

† मोमेंट हा इंग्लिश शब्द आहे त्याचा अर्थ बहुतकरून भारमान किंवा गतिमान आहे.

फुटी, आणि **डब** = (१८–क्ष) फुटी. आतां वेगवेगळे वजनांचीं **मोमेंटें** याप्रमाणें आहेत, **अ** चें मोमेंट = १२ क्ष, **क** चें मोमेंट = ४०(क्ष–९), आणि **ब**चें मोमेंट = २०(१८–क्ष); तर वर सांगितल्ये गोष्टीवरून, समतोल असायासाठीं, याप्रमाणें होईल.

$$१२क्ष+४०(क्ष-९)=२० (१८-क्ष), \text{ अथवा } क्ष=१०;$$

यामुळें अटीचें ठिकाण **क** मध्यबिंदूपासून १ फुट उजवेकडे आहे, अशानें या कृत्याचा अर्थ बरोबर ध्यानांत घेतला, कां कीं उत्तरावरून ताडिलें असतां, क्ष–९ आणि १८–क्ष हीं दोन्ही शक्य आहेत. आतां **ड** हा **क** चे डाव्या बाजूस आणि वरप्रमाणें **अड** = क्ष आहे, असें मनांत आणलें असतां, पूर्वीं सांगीतल्याप्रमाणें **क** आणि **ब** यांचे वजनाची बेरीज **अ** चे वजनाशीं समतोल असावी; आणि यावरून, **डब** = १८–क्ष असावा, परंतु **कड** = क्ष–९ याचे जागीं ९–क्ष असें होतें. अशे संकेतानें समीकरण याप्रमाणें झालें असतें.

$$१२क्ष= ४०(९-क्ष)+२०(१८-क्ष)$$

अथवा १२क्ष–४०(९–क्ष) = २०(१८–क्ष), अथवा क्ष = १०

या आणि पहिल्ये पक्षांत इतका भेद आहे कीं,

यांत +४०(९–क्ष) यांचे जागीं–४०(–क्ष) आहे.

या पक्षींचें उत्तर क्ष = १० यावरून ६६ व्ये पृष्ठावरचा पहिला उलटा विषय दृष्टीस पडता,

हें कृत्य या रितीनें सर्व साधारण होतें. दांडीची लांबी (ल) तिचें वजन व.* आणि उजव्ये व डाव्येकडचे दोन शेवटांवर वजनें **प** आणि **क** अशीं घे, आतां **अड** = क्ष घे, आणि मनांत आण कीं अटीचें ठि-

* व हा वजनांतील पौंड, अथवा दुसरे कांहीं जातीचे एकंमाचा वजनाची संख्या दाखवितो, आणि ल फुटींची संख्या, अथवा दुसरे कांहीं लांबीचे एकंमाची संख्या दाखवितो.

काण **क** मध्याचे उजव्येकडे आहे. यावरून **कड** = क्ष $-\frac{1}{2}$ल, **डब** = ल–क्ष. तर समीकरण याप्रमाणें होतें,

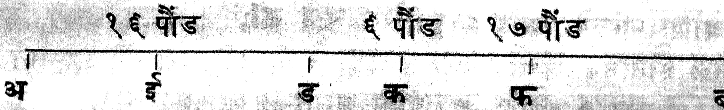
$$\text{प क्ष} + \text{व}\,(\text{क्ष} - \tfrac{1}{2}\text{ल}) = \text{क}\,(\text{ल} - \text{क्ष})$$

$$\text{यावरून क्ष} = \frac{\text{वल} + २\text{कल}}{२\text{प} + २\text{क} + २\text{व}} = \frac{\text{व} + २\text{क}}{\text{प} + \text{क} + \text{व}} \times \frac{\text{ल}}{२}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. जी वर क्षची किंमत काढिली तीपासून ही गोष्ट सिद्ध करून दाखीव, कीं जसा जसा **क** हा **प** पेक्षां अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षां कमी असेल, तसा तसा क्ष हा $\frac{1}{2}$ल यापेक्षां अधिक किंवा त्याचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां कमी आहे.

स्टीलयार्ड† या नावाचा तोलाचा कांटा या वरचे कृत्याचे आधारावरून झाला आहे.

२ **कृत्य.** एक २० फुटी लांबीची दांडी आहे, तिचें वजन ६ पौंड आणि तिचे डाव्ये शेवटापासून उजव्येकडे ९ फुटींवर तिची अट आहे, तर ७ फुटींचे अंतरानें १६ आणि १७ पौंडांचीं दोन वजनें कोठकोठे ठेवावीं, असें कीं तीं सर्व समतोलांत होतील; यांत अशी कल्पना कर, कीं १६ पौंडांचें वजन डाव्येकडे आहे ?



क दांडीचा मध्यबिंदु, **ड** अटीची जागा, **ई** आणि **फ** या दोन वजनाचा जागा आहेत, अशी कल्पना कर. तर **अड** = ९ फुटी, **बड** = ११ फुटी, **अक** = १० फुटी, **ईफ** = ७ फुटी, आणि **डक** = १ फुट. आतां **अई** = क्ष घे ; तर **ईड** = ९–क्ष, **डफ** = **अफ**–**अड** = **अई** + **ईफ** – **अड** = क्ष + ७ – ९ = क्ष – २. तर याची रचना याप्रमाणें होईल.

† हें एका तऱ्हेचे तोलायाचे कांट्याचें इंग्रेजी नाव आहे.

१६ पौंड, अटीपासून $\overline{९-क्ष}$ फुटी लांब आहेत; ह्मणून याचें मोमेंट १६(९–क्ष), हें ६ पौंड, अटीपासून १ फुट लांब आहेत; ह्मणून याचें मोमेंट ६×१ अथवा ६ याचे बरोबर होईल.

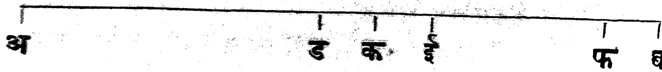
१७ पौंड अटीपासून $\overline{क्ष-२}$ फुटी लांब आहे; ह्मणून याचें मोमेंट १७(क्ष–२) यामुळें १६(९–क्ष) = ६+१७ (क्ष–२) क्ष=५ $\frac{७}{३३}$ फुटी.

हें समीकरण खऱ्या रितीनें मांडिलें आहे, कां कीं, ९–क्ष आणि क्ष–२ हीं दोनीं शक्यरूप आहेत. जर अशी कल्पना केली, कीं ई आणि फ हीं दोन वजनें ड चे एक्ये बाजूस आहेत, तर त्यावरून या पुढीलप्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल,

$$१६(९-क्ष)+१७(२-क्ष)=६$$

अथवा १६ (९–क्ष) = ६–१७(२–क्ष) क्ष = ५$\frac{७}{३३}$ फुटी;

यावरून ही क्षची किंमत वरचेप्रमाणेंच आहे, परंतु, २–क्ष हें अशक्यरूप आहे. डचे जा बाजूस क आहे, त्याच बाजूस ई आणि फ आहेत, अशी कल्पना केल्यानें. ई, फ, आणि क, हीं वजनें अटीचा एके बाजूस असून, अटीचा दुसरे बाजूस कांहींच वजन नाहीं, तरी समतोल होतात; अशी खोटी कल्पना केली तरी, त्या संकेतापासून जें समीकरण उत्पन्न होतें, त्यास चालत्या रिती लाविल्या असतां, उत्तर समीकरणाशीं ताडून पाहिल्या पावेतों त्याचा अशक्यपणाचें रूप कांहीं एक दिसत नाहीं. या पक्षीं,



जर अई=क्ष, तर डक=१, डई=क्ष–९, डफ=(क्ष–९)+७=क्ष–२; यामुळें, क, ई आणि फ, या वजनांचीं मोमेंटें याप्रमाणें आहेत, ६, १६ (क्ष–९), आणि १७ (क्ष–२). वरचे कल्पनेप्रमाणें, ह्मणजे, डचे

डाव्ये बाजूस कांहीं वजन नाहीं, यापासून काय होईल तें शोधायास हें पुढील समीकरण शक्यरूप असें मानून काय होईल तें पहा.

$$६+१६(क्ष-९)+१७(क्ष-२)=०$$

यापासून

$$६+१६क्ष-१४४+१७क्ष-३४=० \text{ असें होतें.}$$

$$३३क्ष-१७२=०, \quad ३३क्ष=१७२, \quad क्ष=५\frac{७}{३३}$$

हेंहि वरचे उत्तरासारिखें आहे. परंतु हें समीकरण अशक्यरूप आहे, कां कीं कोणत्येहि तीन परिमाणांची बेरीज शून्यापेक्षां अगत्य अधिक असावी. अणखी क्ष-९ हें अशक्यरूप आहे असें दिसतें.

६८ आणि ६९ व्ये पृष्ठावर जी गोष्ट सांगीतली, त्याचप्रमाणें एथें कांहीं गोष्ट सांगीतली पाहिजे.

$$क्ष-(क-ब)=०, \text{ अथवा } क्ष+ब-क=०$$

हें समीकरण शक्यरूप आहे, कां कीं क्ष=क-ब. परंतु

$$क्ष+(ब-क)=०$$

हें अशक्यरूप आहे. तथापि, जेव्हां क पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां क्ष+(ब-क) आणि क्ष+ब-क या दोन पद्धती एकसारिख्याच आहेत; परंतु जेव्हां क पेक्षां ब कमी आहे, तेव्हां असा रूपभेद केल्यानें, हें पुढील अशक्यरूप कदाचित् घडेल,

$$क्ष+(ब-क)=०,$$

याचे जागीं हें पुढील शक्यरूप समीकरण घेण्यास योग्य होतें,

$$क्ष-(क-ब)=०.$$

याजवरून जर,

$$क्ष+प = ०,$$

असें समीकरण कधीं आलें, तर निश्चय जाणावें, कीं प हें परिमाण क-रितेसमयीं, कांहीं एक वजाबाकीचीं पदें उलटीं केलीं गेलीं; ह्मणजे, क–ब याचे जागीं ब–क अशी पची किंमत कल्पिली गेली. आतां क–ब हीं शुद्ध कल्पना क याचे बरोबर आहे असें मनांत आणलें; तर याप्रमाणें होईल,

$$क्ष-क = ०, \text{ अथवा } क्ष = क.$$

९७ व्ये पृष्ठावर दुसरे कृत्याचें प्रथम उदाहरण साधारण रितीनें याप्रमाणें होतें. ल फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन व पौंड आहे, आणि डाव्ये शेवटापासून ती अ फुटी इतक्ये अंतरावर टेंकिली आहे, अशी कल्पना कर. तर प आणि क पौंडांचीं दोन वजनें आ-हेत, त्यांतून एक वजन प, अटीचे डाव्येकडेस असावें, आणि क उज-व्येकडेस, आणि त्या दोन वजनांचे मध्यें अंतर म फुटी असावें. तर ह्यांची रचना कशी करावी कीं दांडी समतोल होईल? याचें समीक-रण याप्रमाणें होईल,

$$प(अ-क्ष) = व\ (\tfrac{1}{2}ल-अ) + क\ (क्ष+म-अ)$$

$$क्ष = \frac{पअ+कअ+वअ-\frac{1}{2}वल-कम}{प+क}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरण. अ शेवटापासून डाव्येकडे, आणि ब शेवटापासून उजव्येकडे, अशी दोहोंकडे दांडी वाढविली आहे अशी कल्पना कर, परंतु अशे वाढविलेल्या दोन तुकड्यांस कांहीं वजन नाहीं असें मनांत आण. तर व = २० पौंड, ल = ५० फुटी, अ = ५ फुटी, प = ४ पौंड, क = ७ पौंड, म = १० फुटी, अशा वेगवेगळ्या

किमती घेऊन, त्या ९८ व्ये पृष्ठाचे उदाहरणावर लाऊन उलगडून दाखीव.

उदाहरण. ३ भाग. अनेक प्रकारचा गोष्टींविषयीं. १ कृत्य. १० इंच लांबीची एक **अब** सरळ रेघ आहे, ती दोहोंकडेस वाढविली आहे. ती रेघ **अ** पासून उजव्येकडेस ७ इंचांवर **क** बिंदूवर छेदिली आहे. तर **ड** बिंदू कोठें असावा, असा कीं जा प्रमाणानें* **अड** हा **डब** यास त्याच प्रमाणानें **अक** हा **कब** यास होईल ?

अ क ब ड

यांत **अक** = ७ इंच, आणि **कब** = ३ इंच आहेत. तर **ड** बिंदू **अ** आणि **ब** यांचे मध्यें, अथवा **ब** चे उजव्येकडेस, अथवा **अ** चे डाव्येकडेस असावा. अथवा कदाचित् एकापेक्षां अधिकहि बिंदू असतील; ह्मणजे, **ड** दोन जागीं असला, तर एक बिंदू **अ**चे उजव्येकडेस, आणि दुसरा **अ** चे डाव्येकडेस येईल. परंतु कृत्याचे संकेतावर चांगला विचार केला असतां, स्पष्ट दिसेल, कीं **ब**चे उजव्येकडे असल्या शिवाय **ड** दुसऱ्या कोणत्याहि स्थळीं असण्यास अशक्य आहे. कां तर, असें मनांत आण कीं **ड** हा **अ** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठेंहि येतो, ह्मणजे **क** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठेंहि येतो; तेव्हां, कृत्याप्रमाणें, **अक** ७ इंच यांत **बक** ३ इंच जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातो. तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग ७ इंचांपेक्षां अधिक **अड** यांत ३ इंचांपेक्षां कमी **बड** जाईल. हें तरी किंचित् विचारानें अशक्य आहे, असें उघड दिसेल. शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावें, कीं वरचे कारणावरून, **ड** बिंदू **अ** आणि **क** यांचे मध्यें कोठे असण्यास अशक्य. आणि **ड** हा **अ**चे डाव्येकडेसहि असण्यास अशक्य; कां कीं असें असलें, तर जितक्या वेळा **डब** मोठा भाग **अड** या लहान भागांत जातो तितक्या वेळा **कब** ३ इंच, **अक** ७ इंचांत गेले पाहिजेत. ह्मणजे $२\frac{१}{३}$ वेळा, हेंहि अशक्य. तेव्हां मनांत आण, कीं **ड** बिंदू **ब**चे उजव्येक-

* जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ हे अपूर्णांक बरोबर आहेत तेव्हां अ जसा ब ला प्रमाण, तसा क हा ड ला प्रमाण होईल.

डेस आहे, आणि अड = क्ष इंच घे; तर बड = क्ष−१० इंच. कृत्याचे संकेतानें, जा प्रमाणानें ७ हे ३ यांस आहेत त्या प्रमाणानें क्ष हा क्ष−१० यांस आहे; ह्मणजे,

$$\frac{क्ष}{क्ष-१०} = \frac{७}{३} \qquad (\times)३(क्ष-१०) \qquad ३क्ष = ७(क्ष-१०)$$

$$यापासून\ क्ष = \frac{३५}{२} = १७\frac{१}{२}\ इंच.$$

जरी अशी कल्पना केली असती कीं ड बिंदू अ आणि ब यांचे मध्यें कोठेहि आला, ह्मणजे क आणि ब यांचेमध्यें कोठेहि आला तर, अड = क्ष असें असतां, डब = १०−क्ष होईल, आणि यावरून समीकरण याप्रमाणें झालें असतें.

$$\frac{क्ष}{१०-क्ष} = \frac{७}{३},\ अथवा\ क्ष-७क्ष = ७;$$

ह्मणजे ड आणि क हे दोन बिंदू एकाजागीं येतात. उलटा विषय असें जास नांव दिलें त्यामध्यें हा वरचा पक्ष लिहिला नाहीं. कां कीं उत्तर असें येईल, असें जरी पूर्वी लक्षांत आलें नव्हतें, तरी कांहीं अधिक समजावल्यावांचून सहज समजायाजोगें आहे. यापासून बोध होतो, कीं जर ड हा अ आणि ब या दोहोंचे मध्यें कोठेहि ठेवायाचा असेल, असा कीं जा प्रमाणानें अक हा कब यास आहे त्याप्रमाणानें अड हा डब ला होईल, तेव्हां ड हा क चे स्थळीं अगत्य असावा. परंतु ड हा अ चे डाव्येकडेस आहे अशी कल्पना केली असतां, आणि अड = क्ष असें घेतलें, तर डब= १०+क्ष होईल, आणि समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$\frac{क्ष}{१०+क्ष} = \frac{७}{३},\ अथवा\ ३क्ष-७क्ष = ७०$$

६८ पासून ७८ पर्यंत पृष्टांवर जो उलटा विषय आहे त्याप्रमाणें हें आहे. यावरून उघड होतें कीं अड ह्मणजे क्ष हा खोल्ये दिशेकडे घेतला, आणि जर अचे उजव्येकडे घेतला, तर समीकरण याप्रमाणें झालें असतें

हें वर निघाल्याप्रमाणें आहे.

आतां कृत्य फिरवून याप्रमाणें रूप देऊन पहा; मनांत आण, कीं **क** हा **अ** आणि **ब** यांचे बरोबर मध्यस्थळीं आहे, ह्मणजे, अशी कल्पना कर, कीं **अब**=१२ इंच, आणि **अक** आणि **कब** हे प्रत्येक ६ इंचां बरोबर आहेत. तर जा प्रमाणानें **कब**ला **अक** आहे, त्याच प्रमाणानें **डब** ला **अड** होईल तर कोणताहि **ड** बिंदू **क** बिंदूवर न पडेल, असा आहे कीं काय ? खचित् नाहीं; कां कीं **अक** यांत **कब** बरोबर १ वेळा जातो परंतु जर **ड** बिंदू **ब**चे उजव्येकडे किंवा **अ**चे डाव्येकडे असेल, तेव्हां **डब** पेक्षां **अड** एक पक्षीं अधिक होईल, आणि दुसरे पक्षीं कमी होईल. परंतु जर **ड** बिंदू **अ**चें डाव्येकडे किंवा **ब**चे उजव्येकडे फारच लांब ठेविला असेल, तेव्हां **अड** यांत **डब** एक वेळेचे जवळ जवळ जातो; **८४ आणि ८५ पृष्ठ पहा**, अशे रितीनें **ड** पाहिजे तितका लांब ठेविला असेल, तेव्हां **अड** यांत **डब** इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा एक वेळा जवळ जाई असें करितां येईल.* यापक्षीं समीकरणानें **ड**चें स्थळ जाणण्याविषयीं यत्न केला, तर **८० पृष्ठावरचा** उलटा विषय, ज्याचा अर्थ **८४ पृष्ठावर** समजाविला आहे तसा विषय एथें घडेल असें मनांत येईल. मनांत आण कीं **ड** बिंदू **ब**चे उजव्येकडे ठेविला असतां, या कृत्याचे संकेत तो स्थापितो. **अड**=क्ष घे. तेव्हां **डब**=क्ष−१२, **अक**=६, आणि **कब**=६. यामुळें कृत्याचें समीकरण याप्रमाणें होईल

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१२}=\frac{६}{६}=१ \text{ अथवा क्ष}=\text{क्ष}-१२.$$ **८० पृष्ठ पहा.**

साधारण रितीनें वरचें कृत्य याप्रमाणें होईल. मनांत आण कीं, **अब**=अ, **अक**=ब, आणि **अड**=क्ष असे घे, आणि **ड** बिंदू **ब**चे उजव्येकडे असला, तर समीकरण याप्रमाणें होईल

---

* ह्मणजे, **अ** पासून जेवढा **ब** लांब आहे तितक्याचे हजार पट अंतरावर **ब**चे उजव्येकडे **ड** बिंदू ठेव, तेव्हां १००१ यांस जसे १००० तसा **डब** ला, **अड** अथवा $१+\frac{१}{१०००}$ जसें १ स; हें प्रमाण १ स १ याप्रमाणाचे जवळ आहे.



$$\frac{क्ष}{क्ष-अ}=\frac{ब}{अ-ब} \quad अथवा\ क्ष=\frac{अब}{२ब-अ}$$

जे जे वेगळाले पक्ष बीज गणित लागू करतेसमयीं आढळतात, त्या सर्वांवर लागू होई असें आतां एक कृत्य सांगतों हें कृत्य सांगतेसमयीं उत्तराविषयींची जी कल्पना मनांत येईल तिचे बाहेर त्याचें उत्तर जातें याचें कारण, केवळ कृत्य करण्याचा अशक्यपणा आहे असें नाहीं, परंतु तें उत्तर उपयोगी किंवा सोईचें नसतें, हें त्यास कारण आहे. उदाहरण, जेव्हां अंकगणितामध्यें, कांहीं एक अंक दुसरे अंकाचे डाव्येकडे मांडिले, तेव्हां त्यांचा अर्थ असा होतो, कीं डाव्येकडचा अंक १० नीं गुणून त्यांत उजव्ये कडचा अंक मिळवायाचा आहे. ह्मणजे, २४ हे २×१०+४ असे आहेत. अशाच रितीनें बहुतकरून अपूर्णांक कामांत आणीत नाहीं; ह्मणजे, $२\frac{१}{२}४$ हे $२\frac{१}{२}×१०+४$, अथवा २९ असें कधींहि होत नाहीं; परंतु इच्छिलें असतां असेंहि होईल; तसेंच $३\frac{१}{५}\ २\frac{१}{२}$हे $३\frac{१}{५}×१०+२\frac{१}{२}$, अथवा $३४\frac{१}{२}$, यांचे जागीं मांडितां येतील. या गोष्टीवरून हें पुढील सांगतों.

२ कृत्य. दोन अंकस्थळांचा एक अंक आहे, त्याचे स्थळांकांची बेरीज १० आहे, आणि, त्या अंकांचीं स्थळें उलटीं मांडिल्यानें तो दुप्पट होतो, तर तो अंक काय आहे ?

आतां ९१ हा अंक १९ यांचे दुप्पट नाहीं, ८२ हा अंक २८ यांचे दुप्पट नाहीं, ७३ हा अंक ३७ यांचे दुप्पट नाहीं ६४ हेहीं ४६ यांचे दुप्पट नाहीं. यामुळें, व्यवहारांतील दशगुणक अंकगणित रितीप्रमाणें, हें कृत्य अशक्य आहे असें दिसतें. तर या कृत्याला समीकरणाचें रूप देऊन कशे तऱ्हेचें उत्तर निघेल ? ह्मणून, अंकांचीं दोन स्थळें दाखविण्यासाठीं, क्ष आणि य हीं अक्षरें घे; तर

$$क्ष+य=१०,\ अथवा\ य=१०-क्ष.$$

२४ हा अंक=२×१०+४; आणि ५८=५×१०+८, इत्यादि असे आहेत, त्याच सारिखें, क्ष स्थळ य चे डाव्येकडे मांडिलें असतां, त्याचे अंक १०क्ष+य हेच आहेत; अंकांचीं स्थळें फिरविलीं असतां, जसें ४२=४×१०+२, आणि ८५=८×१०+५, इत्यादि, तसें, क्ष आणि

य फिरविले असतां, १०य+क्ष असें होतें, हें कृत्याचे संकेता प्रमाणें, वरचाचे दुप्पट आहे; ह्मणजे,

$$१०य+क्ष=२(१०क्ष+य), \text{ अथवा } २०क्ष+२य.$$

यामुळें $१०य-२य=२०क्ष-क्ष$, अथवा $८ य=१९क्ष$.

परंतु $य=१०-क्ष$, अथवा $८(१०-क्ष)=१९क्ष$;

यामुळें, $क्ष=\frac{८०}{२७}=२\frac{२६}{२७}$, $य=१०-क्ष=७\frac{१}{२७}$.

यामुळें उत्तर हेंच आहे, कीं जर एकं आणि दहं इत्यादि जागीं चालते रितीप्रमाणें एकंचा अंकांशिवाय दुसरा अंक येत नाहीं असें समजलें, तर हें कृत्य अशक्य आहे; परंतु जर एकादा अपूर्णांक दुसऱ्या अपूर्णांकाचे डाव्येकडे मांडिला असतां, त्याची किंमत दसपट होईल, असा अंक मांडण्याचे रितीचा विस्तार केला असतां, हें कृत्य शक्य आहे; आणि

नीट अंक $२\frac{२६}{२७}$ $७\frac{१}{२७}$, आणि उलटे अंक $७\frac{१}{२७}$ $२\frac{२६}{२७}$ हे आहेत.
यांत $२\frac{२६}{२७}$ $७\frac{१}{२७}$ याचा अर्थ हाच $२\frac{२६}{२७}\times१०+७\frac{१}{२७}=३६\frac{१८}{२७}$ आणि
$७\frac{१}{२७}$ $२\frac{२६}{२७}$ याचा अर्थ हाच $७\frac{१}{२७}\times१०+२\frac{२६}{२७}=७३\frac{९}{२७}$

हे पहिल्याचे दुप्पट आहेत.

वरचे उदाहरणावरून ही गोष्ट खरी आहे; जेव्हां कृत्यापासून अपूर्णांकरूप उत्तर येतें, तें उत्तर केवळ या पुढील संकेताप्रमाणें कामांत आणिलें पाहिजे, ह्मणजे समीकरण मांडण्यास पूर्णांक मांडण्याची जी चालती रीति लागेल, ती रीति अपूर्णांकांसहि लावावी.

वरचें मूळ कारण व्यवहारांत आणिलें असतां, हें बहुतकरून कांहीं वस्तूंचा अपूर्ण भागांची कल्पना मनांत आणितें. वास्तविक रितीने आणि मूळचा अर्थानें त्या वस्तूचा अपूर्ण भाग होत नाहीं. जसें, शुद्ध बोलण्याचे रितीप्रमाणें अर्धा घोडा असें होत नाहीं; आकार किंवा भारमानाविषयीं अर्धा घोडा असें बोलण्यांत येतें, किंवा घोड्याचे

बळाचे अर्धाविषयीं बोलण्यांत येतें, ह्मणजे तें अर्धे बळ कांहीं भारमानाचे अर्धा बरोबर असतें, किंवा एका घोड्याचा आकार आणि शक्ति दुसऱ्या घोड्याचा आकार आणि शक्ति यांचा अर्धा बरोबर असती, ह्मणून घोड्याचा जो कांहीं गुण अंकांनी दाखवितां येतो, त्याचें अर्ध करितां येईल; परंतु गुण किंवा अंक हें समजल्याचे पूर्वी शब्दांचे शुद्ध अर्थानें अर्धा घोडा हा प्रयोग होत नाहीं. तथापि वाफ यंत्राचें बळ २०$\frac{1}{2}$ घोड्यांचें आहे असें शुद्ध रितीनें बोलतां येतें, आणि हें बळ पौंडांचे वजनानें मोजतां येतें; लांडग्याने अर्धा घोडा खाल्ला असें जर सांगितलें, तर त्याची कल्पना घोड्याचे मासाचे अर्धाविषयीं आहे. हें पुढील कृत्य पहा, २ टनाचें वजन एक घोडा ओढितो; आणि ५ टनाचें वजन कितीं एक घोड्यांनीं ओढलें, तेव्हां ते किती घोडे होते? बोलण्याचे शुद्ध अर्थावरून असे प्रश्न खोटे आहेत, परंतु कृत्यामध्यें घोड्याचे ओढण्याचे बळाचे गुणाविषयींच केवळ मनन केलें असतां, असे प्रश्न खोटे नाहींत; आणि जितकें एक घोड्याचें बळ आहे त्याचा २$\frac{1}{2}$ वेळा, बळ लागलें, याप्रमाणें ह्मणतां येईल. अथवा २$\frac{1}{2}$ घोड्याचें बळ लागलें. वरची गोष्ट या पुढील उदाहरणावरहि लागती; कांहीं हिशोब ५ रुपये देणें होता, आणि प्रत्येक पुरुषाची वर्गणी २ रुपये होती तेव्हां ते किती पुरुष होते? केवळ शब्दांचे शुद्ध अर्थाने हें उलगडलें जात नाहीं, परंतु एक पुरुषाची जितकी वर्गणी होती त्याचा २$\frac{1}{2}$ वेळा इतक्या वर्गण्या होत्या,* अथवा २$\frac{1}{2}$ पुरुषांची वर्गणी.

३ कृत्य. अ आणि अ' यार्ड लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यांचा धणी त्या दोनहि जातींतून बरोबरच मापाचे दोन तुकडे दरयार्डास, ब आणि ब' रुपये याप्रमाणें फाडून विकत देतो. आणि त्या दोनहि ताक्यांतून जी बाकी राहील, ती जर पहिला ताका क रुपये दर यार्ड, आणि दुसरा ताका क' रुपये दर यार्ड याप्रमाणें विकील, तर दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत बरोबर होईल. तेव्हां प्रत्येकांतून प्रथम कितीं किती यार्ड फाडून विकले?

बहुत अक्षरें कामांत आणणें, हें न होण्यासाठीं, एकच अक्षरास

* एक देशामध्यें एक वर्षांत ४०$\frac{1}{2}$ पुरुषांतून एक मरतो असें ह्मटलें तर त्याचा अर्थ हाच कीं ८१ तून दोन मरतात. ह्मणून ही गोष्ट वरचे सारिखी आहे.

इच्छेप्रमाणें एक किंवा अधिक स्वर चिन्हें† लागू करून कामांत आणि-तात, ह्मणजे हे निरनिराळे अंक आहेत असें समजावें, परंतु त्यांचे अर्था-मध्यें कांहीं साधारण गुण आहे. ह्मणून कापडाचे दोन ताक्यांची लांबी, अ आणि अ॑ आहे, त्या ताक्यांतून जे दोन तुकडे फाडून काढले, त्यांचा किंमती दर यार्डास ब आणि ब॑ आहेत, आणि त्या ताक्यांचे जे दोन तुकडे बाकी राहिले त्यांचा किंमती दर यार्डास क आणि क॑ आहेत परंतु अ आणि ब जा अंकांविषयीं घेतले त्यांत जितका फेर आहे तितका अ आणि अ॑ यांचे अंकांविषयीं फेर आहे; ह्मणून हरएक अक्षर भलत्या कांहीं घेतलेल्या अंकांचे स्थळीं मांडितां येतें.

ताक्यांतून दोन तुकडे फाडिले त्यांचे यार्डांची संख्या दाखविण्या-साठीं क्ष घे; तेव्हां जा ताक्यांचा बाक्या रहातील त्या याप्रमाणें हो-तील, ह्मणजे अ–क्ष आणि अ॑–क्ष यार्ड. पहिले ताक्याचे तुकड्याची किंमत बक्ष, आणि दुसऱ्या तुकड्याची ब॑क्ष रुपये; यावरून बाकी ता-क्यांचा किंमती क(अ–क्ष) आणि क॑(अ॑–क्ष) रुपये आहेत या मुळें प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें

$$\text{बक्ष}+\text{क}(\text{अ}-\text{क्ष}) = \text{ब॑क्ष}+\text{क॑}(\text{अ॑}-\text{क्ष})$$

$$\text{बक्ष}+\text{अक}-\text{कक्ष} = \text{ब॑क्ष}+\text{अ॑क॑}-\text{क॑क्ष}$$

$$\text{बक्ष}-\text{कक्ष}+\text{क॑क्ष}-\text{ब॑क्ष} = \text{अ॑क॑}-\text{अक}$$

$$(\text{ब}+\text{क॑}-\text{ब॑}-\text{क})\,\text{क्ष} = \text{अ॑क॑}-\text{अक}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{अ॑क॑}-\text{अक}}{\text{ब}+\text{क॑}-\text{ब॑}-\text{क}}$$

हें कृत्य या पुढील गोष्टीवर लावून तपासून पहा; मनांत आण, कीं दोन ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड आहे; पहिल्याने जे त्यां-तून तुकडे फाडिले त्यांचा किंमती दर यार्डास १० आणि ९ रुपये

† हरएक अक्षराचे किमतींत कांहीं फेर दाखवायासाठीं त्या अक्षरास स्वरचिन्ह करि-तात, त्यास स्वरित अक्षर ह्मणतात, परंतु इंग्रेजींत या चिन्हास डाश ह्मणतात, तीं चाल एथे घेतली आहे.

आहेत अशी कल्पना कर; आणि ताक्यांचे बाकीची किंमत दर यार्डास ४ आणि ३ रुपये आहे. तेव्हां

$$अ=६०, \quad अ'=८०, \quad ब=१०, \quad ब'=९, \quad क=४, \quad क'=३,$$

$$क्ष=\frac{अ'क'-अक}{ब+क'-ब'-क}=\frac{८०\times ३-६०\times ४}{१०+३-९-४}=\frac{०}{०}$$

८७ व्या पृष्ठावर जा उलट्ये विषयाचा विचार झाला तसा हा विषय आहे. त्या जागेवर पहाण्यांत आलें, कीं क्ष ला कशीहि किंमत दिली, तरी त्या किंमतीनें समीकरण उलगडतें, आणि अशी गोष्ट या उदाहरणांतहि घडती असें कळेल. कां, मूळचे समीकरणावर लक्ष्य ठेवून या किंमतीनें नवें समीकरण मांडिलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$१०क्ष+४(६०-क्ष)=९क्ष+३(८०-क्ष)$$

अथवा $$१०क्ष+२४०-४क्ष=९क्ष+२४०-३क्ष$$

अथवा $$६क्ष+२४०=६क्ष+२४०$$

आणि क्षला कशीहि किंमत दिली तरी ही गोष्ट या उदाहरणांत खरी आहे. यामुळें उत्तर हेंच आहे, कीं या विशेष पक्षीं, आरंभीं ताक्यांतून कितीहि यार्ड फाडिले तरी प्रत्येक ताक्याची सर्व किंमत बरोबर होईल,

आतां दुसरें उदाहरण तपासून पहा. पूर्वीप्रमाणें ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्यानें जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ५ आणि ४ रुपये, आणि बाकीचाची दर यार्डाची किंमत २ आणि ३ रुपये आहेत असें मनांत आण; तेव्हां

$$अ=६०, \quad अ'=८०, \quad ब=५, \quad ब'=४, \quad क=२, \quad क'=३,$$

$$क्ष=\frac{अ'क'-अक}{ब+क'-ब'-क}=\frac{८०\times ३-६०\times २}{५+३-४-२}=\frac{१२०}{२}=६०$$

दोन्हीं ताक्यांतून ६० यार्ड फाडिले होते; ह्मणजे पहिल्याचे सर्व घेतले,

आणि दुसऱ्याचे ६० यार्ड घेतले; तर ५ आणि ४ रुपये यार्डाचे दरानें पहिल्या ताक्याची किंमत ३०० आणि दुसऱ्याची २४० रुपये आहे. अशाने पहिला ताका सर्व गेला ह्मणून बाकी शून्य राहिली ह्मणून त्याची किंमतहि शून्य, परंतु दुसऱ्या ताक्याचे २० यार्ड राहिले, आणि ३ रुपये यार्डाप्रमाणें, त्याची किंमत ६० रुपये होती. याप्रमाणें पहिल्ये ताक्यापासून ३०० रुपये उत्पन्न झाले, आणि दुसऱ्यापासून २४०+६०=३०० रुपये उत्पन्न झाले, ह्मणून कृत्याचे संकेताप्रमाणें या दोन किंमती बरोबर आहेत.

पुढील प्रमाणें तिसरें उदाहरण सांगतों. पूर्वींप्रमाणें ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्यानें जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ७ आणि ३ रुपये, आणि बाकीचा यार्डांची दर यार्डास किंमत ५ आणि २ रुपये आहेत, असें मनांत आण; तेव्हां

$$अ=६०,\quad अ'=८०,\quad ब=७,\quad ब'=३,\quad क=५,\quad क'=२,$$

$$क्ष = \frac{अ'क' - अक}{ब+क'-ब'-क} = \frac{८०\times२-६०\times५}{७+२-३-५} = \frac{१६०-३००}{१}$$

यांत अशक्यरूप वजाबाकी आहे. ७६ पृष्ठावरचे सारांशावरून क्ष घेण्यांत कांहीं खोटा पक्ष स्विकारिला असें कदाचित् मनांत येईल. परंतु कृत्यास चांगलें तपासून पहातां अशी कांहीं चूक दिसत नाहीं; कां कीं पहिल्यानें प्रत्येक ताक्याचे क्ष यार्ड विकायाचे आहेत. परंतु ७६ वे पृष्ठावर बुद्धिपूर्वक कृत्यांस अशे रूपानें सांगीतलें, कीं खरी किंवा खोटी कल्पना त्वरेनें दिसण्यांत येईल; एथें तरी हें कृत्य सांगण्यानें शब्दार्थ कशे कशे तऱ्हेनें वाढवावे, असे कीं, हें कृत्य वरचे शब्दांनीं सांगीतल्याप्रमाणें, दोन किंवा अधिक पक्षांतून केवळ एकच पक्ष खरा होईल? लक्षांत ठेव, कीं अंक बदलायाचे नाहींत, परंतु उत्तराचे गुण मात्र फिरवायाचे आहेत. आरंभीं विकणारापाशीं ६० आणि ८० यार्ड असे दोन कापडाचे ताके आहेत, आणि शेवटीं त्याजवळ ताक्यांचा तुकडाहि न रहातां, त्याचे जवळ दोन ताक्यांचे सारिख्ये किंमतीचा पैका रहातो. वरचे कृत्याचे संकेताप्रमाणें पहिल्यानें प्रत्येक ताक्यांतून

कांहीं बरोबर यार्ड फाडून विकतो, आणि अशे कल्पनेवरून, उत्तर निघतें, तें कृत्य अशक्य आहे, असें दाखवितें. अशे जातीचें उदाहरण आल्यावर त्या उत्तराचे गुण फिरवावे, हें पूर्वीं सांगितलें; तसें या कृत्यांत कर, आणि मनांत आण, कीं आरंभीं तो कापडवाला बरोबर दोहोंजातींचें कापड विकत घेतो. तर हा संकेत ठेवला पाहिजे, कीं आरंभीं पहिल्ये जातीचे कापडाचे ६० यार्ड त्या घेणाराजवळ आहेत, आणि शेवटीं त्याच जातीचें कापड त्याजवळ कांहीं राहिलें नाहीं; यामुळें, जर आरंभीं तो त्यापेक्षां १० यार्ड अधिक विकत घेता, तर त्याला सर्व ७० यार्ड विकत द्यावें लागतें. असें असतें, तर त्याला दुसरे जातीचें कापड १० यार्ड अधिक घेऊन, सर्व ९० यार्ड विकावें लागतें. परंतु अंक बदलायाचे नाहींत, पण त्यांचीं नांवें मात्र बदलायाचीं आहेत, ह्मणून जर तो अधिक विकत घेतो, तर त्यास दर यार्डास ७ (ब) आणि ३ (बं) रुपये या दराप्रमाणें विकत घ्यावे लागतात. आणि जेव्हां तो सर्व कापड विकतो, तें ५ आणि २ रुपये यार्ड प्रमाणें तो देतो. यामुळें याप्रमाणें कृत्याचे सांगण्याचा अर्थ अधिक वाढविला असतां, वरचे पक्षांतून हा एक पक्ष या पुढील प्रमाणें होईल;

वाढविलेल्या अर्थाचें कृत्य.

अ आणि अं यार्ड लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत, त्यांचा धणी दोहों जातींचे बरोबर यार्ड लांबीचे दर यार्ड ब आणि बं रुपये असें साटें ठरवितो. आतां पहिल्ये जातीचें कापड दर यार्डास क रुपये आणि दुसऱ्या जातीचें कापड दर यार्ड कं रुपये याप्रमाणें सावकारानें जर दोहोंजातींचें सर्व कापड दिलें, तर प्रत्येक जातीचे कापडाचे उदमापासून दोहोंची किंमत बरोबर होईल.

पहिलें सांगितल्याप्रमाणें कृत्य.

अ आणि अं यार्ड लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यांचा धणी त्या दोनहि जातींतून बरोबर मापाचे दोन तुकडे दर यार्डास ब आणि बं रुपये याप्रमाणें फाडून विकत देतो. आणि त्या दोनहि ताक्यांतून जी बाकी राहिली, ती जर पहिला ताका क रुपये दर यार्ड आणि दुसरा ताका कं रुपये दर यार्ड प्रमाणें विकील, तर दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत बरोबर होईल.

वर दाखविल्याप्रमाणें पहिल्या कृत्यापासून हें पुढील समीकरण होतें,

$$\text{क}\,(\text{अ}-\text{क्ष}) + \text{बक्ष} = \text{क}'\,(\text{अ}'-\text{क्ष}) + \text{ब}'\,\text{क्ष}$$

$$\text{अथवा} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}}{\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क}}$$

परंतु जेव्हां धणी विकत देणारा असेल, तेव्हां सर्व साधारण पक्षानें मात्र असें समीकरण होतें. आणि जेव्हां तो धणी विकत घेणारा असेल, तर आरंभीं प्रत्येक जातीचें जितकें विकत घेतो, तितक्यास तो बक्ष आणि ब'क्ष याप्रमाणें पैका देतो; नंतर दोहों जातींचें सर्व कापड ह्मणजे अ+क्ष आणि अ'+क्ष हें दर यार्ड क आणि क' रुपये प्रमाणें विकत देतो. यामुळें त्यापाशीं पहिल्ये जातीचे कापडापासून, क(अ+क्ष)−बक्ष अशी बाकी राहील, आणि दुसऱ्ये जातीचे कापडापासून, क'(अ'+क्ष)−ब'क्ष अशी बाकी राहील. तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होतें,

$$\text{क}(\text{अ}+\text{क्ष})-\text{बक्ष} = \text{क}'(\text{अ}'+\text{क्ष})-\text{ब}'\text{क्ष}$$

$$\text{अथवा} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{अक}-\text{अ}'\text{क}'}{\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क}}$$

हें समीकरण वरचे समीकरणाहून निराळें आहे, ह्मणून यांत ज्या पदामध्यें क्ष येतो त्या पदाचें चिन्ह बदलतें आणि उत्तरांत अ'क'−अक यांची उलटी वजाबाकी आहे, ही गोष्ट ७६ व्ये पृष्ठावर रीति लिहिली आहे त्याप्रमाणें आहे,

जेव्हां, अ=६०, अ'=८०, ब=७, ब'=३, क=५, क'=२,

धणी विकत देणारा अशा पक्षानें कल्पना करून या अंकांनीं कृत्य तपासून पाहिलें, त्यांत १६०−३०० असें अशक्यरूप वजाबाकीचें उत्तर निघालें. धणी विकत घेणारा अशी कल्पना करून हा दुसरा पक्ष पाहिला असतां, खरें उत्तर निघेल. ह्मणजे ३००−१६० अथवा १४०,

हें उत्तर कृत्याचा संकेत स्थापील, असें दिसतें. हाच प्रश्न दुसऱ्या अनेक पक्षांनी दाखविला जातो, परंतु सध्या हें काम शिकणारावर सोंपून, दुसरें एक कृत्य सांगतों तें सर्वांशीं वरचे कृत्यासारिखें आहे, आणि रूपभेदानें त्याचे पक्षहि वरचे सारिखे आहेत, आणि दोहों कृत्यांचीं समीकरणें एक सारिखींच होतील.

४ **कृत्य.** खालची आकृती कांहीं प्रांताचा नकाशा आहे, असें मनांत आण. **अब** रेघ साधनींत असून त्या प्रांताची मर्यादा आहे. सगळे रस्ते डावेकडून उजव्येकडेस चढतात, आणि उजव्येकडून डाव्येकडे उतरतात, व जे मैल सांगण्यांत येतात ते प्रांत मर्यादेचे रेघेशीं साधनींत असून लंब रेषेंत मोजिले आहेत, असें मनांत आण. **कड** रेघ मर्यादेचे रेघेशीं समांतर आहे, आणि ती तिचा उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगितलें नाहीं, आणि **बड**, मर्यादेचे रेघेशीं लंब आहे त्याजवर **ट** आणि **वि** हे दोन गांव आहेत, ते गांव भूमीचे मानाप्रमाणें **अब** मर्यादेचे रेघेशीं साधनींत किंवा तिचेवर किंवा तिचे खालीं असावे. **प** आणि **क** हे दोन गांव मर्यादेचे रेघेवर आहेत, जशी जशी **कड** ची स्थिती होये तसे **र** आणि **स** गांव **र** आणि **स** बिंदूंशीं साधनींत किंवा वर किंवा खालीं होतात. भूमीचे मानाप्रमाणें, मर्यादेचे रेघेपासून प्रत्येक साधनींतल्या मैलास अमुक इंचप्रमाणें रस्ते चढतात किंवा उतरतात, ते या पुढीलप्रमाणें;

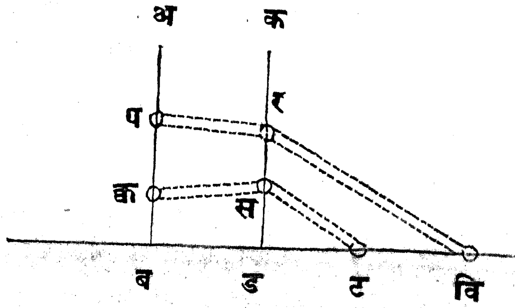
प पासून **र** कडे दर मैलास ब इंच प्रमाणें.

क पासून **स** कडे दर मैलास ब' इंच प्रमाणें.

र पासून **वि** कडे दर मैलास क इंच प्रमाणें.

स पासून **ट** कडे दर मैलास क' इंच प्रमाणें.

आतां **ट** आणि **वि** हे एकच साधनींत आहेत, **बवि** रेघ अ मैल साधनींत आहे. आणि **बट** रेघ त्याच साधनीचे अ' मैल आहे. तर मर्यादेचे रेघेपासून **बड** रेघेची लांबी आणि तिची दिशा कोणती हें सांग.



हें उदाहरण अभ्यासासाठीं सांगीतलें आहे, आणि वेगवेगळे कल्पने पासून जीं जीं समीकरणें शेवटीं निघतात तीं मात्र सांगतों. सर्व कल्पनांत बड रेघेचे मैलांची लांबी दाखविण्यासाठीं क्ष घे.

१. जर बचे डाव्येकडे ड असेल, तर

क(अ+क्ष)−बक्ष = क'(अ'+क्ष)−ब'क्ष
अथवा बक्ष−क(अ+क्ष) = ब'क्ष−क'(अ'+क्ष) } जसें टवि रेघ पक याचे साधनीचे वर किंवा खालीं असेल त्याप्रमाणें.

२. जर आकृतीमध्यें जसा दाखविला तसा ब आणि ट यांचे कोठे मध्यें ड असेल, तर

क(अ−क्ष)+बक्ष = क'(अ'−क्ष)+ब'क्ष.

३. जर ट आणि वि यांचेमध्यें ड असेल, तर

बक्ष−क(क्ष−अ) = ब'क्ष+क'(अ'−क्ष) जेव्हां अ यापेक्षां अ' मोठा आहे तेव्हां,

अथवा बक्ष+क(अ−क्ष) = ब'क्ष−क'(क्ष−अ') जेव्हां अ' यापेक्षां अ मोठा आहे तेव्हां,

आकृतीमध्यें अ' यापेक्षां अ मोठा आहे.

४. जेव्हां ट आणि वि यांचे उजव्येकडे ड आहे, तर

बक्ष−क(क्ष−अ) = ब'क्ष−क'(क्ष−अ') { जेव्हां टवि रेघ पक चे साधनीचे वर आहे,

अथवा क(क्ष−अ)−बक्ष = क'(क्ष−अ')−ब'क्ष { जेव्हां टवि रेघ पक चे साधनीचे खालीं आहे.

वरचे सात समीकरणांतून एक मात्र खरें होऊं शकतें; आणि वरचे ३ या अंकाचे समीकरणाची कल्पना कृत्याचा सांगीतल्या संकेताप्रमाणें आहे, यामुळें बाकीचीं साहा समीकरणें मात्र तपासलीं पाहिजेत. परंतु (१),(२),(३), हे उलटे विषय समजल्यानंतर, असें दिसेल, कीं वरचे साहा समीकरणांतून कोणत्याहि एकापासून खरें उत्तर निघेल. जेव्हां ब+क' = ब'+क तेव्हां यापासून (४) उलटा विषय उत्पन्न होईल, आणि त्यांत आणखी अ'क' = अक असेल, तेव्हां (५) उलटा विषय उत्पन्न होईल.

पूर्वीं जितकीं वर उलट्या विषयाचीं वेगवेगळीं उदाहरणें समजाविलीं त्या सर्वांचे प्रत्येक पक्षाचें स्पष्टीकरण या कृत्यापासून होईल, ह्मणून शिकणारानें सर्व उलगडून पहावीं.

कृत्याचे उलगडण्यांत अशक्यरूप वजाबाक्या उत्पन्न होतात असें वरचे गोष्टीवरून दिसण्यांत आलें, आणि त्यांस अर्थ देण्याची रीति ही वर पाहिली. जा कृतींचा योगानें अशा अशक्यरूप वजाबाक्यांस अर्थ देणें हव्या त्या कृति क्रमापर्यंत बंद ठेवितां येईल, आणि अशक्यरूपाचीं चिन्हें खऱ्ये अंकरूपाप्रमाणें आहेत असें मानून, चुकी न होऊं देतां कामांत आणितां येतील. अशा रितींचा शोध समीकरणाचीं दुसरीं रूपें दाखविण्याचा पूर्वीं करितों.

दुसरा अध्याय.

अंकगणित चिन्हांहून भिन्न, अशा बीजगणित चिन्हांविषयीं.

७१ राव्या पृष्ठावर ५०—७०, आणि **७२ राव्या पृष्ठावर** २००—५००, अशा पद्धतींस **ऋण परिमाण** असें नांव दिलें. हें बोलणें शुद्ध नाहीं, कां कीं ५०—७० हें कांहींच परिमाण नाहीं, परंतु जें करायास अशक्य, तें कर ह्मणून जी आज्ञा दिली, तिचा विरुद्ध अर्थाची वरची पद्धति आहे. परंतु, **७० पासून ७७ पर्यंत पृष्ठांत** पाहिलें कीं, ५०—७०, असें जेथे कृत्याचें उत्तर आहे, त्याचा अर्थ हा कीं, ७०—५० यापासून जसा कांहीं २० वस्तूंचा अर्थ मनांत येतो, तसा वरचा पासूनहि येतो, परंतु त्या २० वस्तू, उदाहरण प्रारंभ केल्याचे पूर्वीं, जा जातीच्या कल्पिलेल्या असतात, त्या जातीचे केवळ उलट्या आहेत; ह्मणून खोट्या समीकरणांत जास त्या वस्तू वाढवितात, त्यास खरें समीकरण करितानां उण्या करितात, आणि खोट्या समीकरणांत, जास त्या उण्या करितात, त्यास खरें समीकरण करितानां वाढवितात.

दोन अथवा अधिक कृत्यें अशीं असतात, कीं त्यांतून पहिल्यानें उत्तर समजल्याशिवाय, दुसऱ्या कृत्याचें उलगडणें होत नाहीं; अशा जातीचीं दोन किंवा अधिक कृत्यें एकत्र जोडिलीं असतां, त्यांपासून असें मनांत आणावें, कीं हें सर्व एक कृत्य आहे, जाचें उलगडणें क्रमाक्रमानें होत जातें. जर पहिलें कृत्य उलगडलें, आणि अशक्यरूप उत्तर निघाल्यावरून, खोटा पक्ष स्वीकारिला, असें ध्यानांत आलें असतां, पहिल्यानें उलटी कृति करीत मागें जावें, आणि सर्व नीट करावें, मग याप्रमाणें करीत असतां समजण्याजोगें उत्तर निघाल्यानंतर, दुसरे कृत्याचें उलगडणें पुढें चालवावें. परंतु, ही सर्व खटपट सुटली जाई, आणि जें उत्तर आलें, तें खरेंच आलें, असें मानून, ती कृति पुढें चालवितां येई, अशा कांहीं रिती आहेत कीं नाहींत? हा प्रश्न ताडून पहाण्यास केवळ अंकांविषयीं जा कृती सिद्ध झाल्या आहेत त्या कृती-

अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हांस लाविल्या असतां, परिणाम काय होईल हें पहिल्यानें पाहिलें पाहिजे.

जर अनेक पक्ष लागू होतात असें एक कृत्य असेल, त्यांतील एक पक्ष खरा आणि दुसरे खोटे, असें कल्पून, जीं उत्तरें काढिलीं तीं केवळ निराळीं आहेत, इतकें केवळ नाहीं; परंतु समीकरणांस खरें रूप देण्यासाठीं, अव्यक्त उत्तर (क्ष) याशीं जा रितीनें वर्त्तलें पाहिजे, त्या रिती दोन निरनिराळ्ये पक्षांत निरनिराळ्या आहेत, असेंहि नजरेंत येईल. ही गोष्ट **७० राव्या पृष्ठावर**, पहिलें कृत्यापासून कळेल; जेव्हां क्ष हा १८३० सना **नंतरचे** वर्षांचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५०+क्ष आणि ३५+क्ष; परंतु जेव्हां क्ष हा १८३० सनाचे **पूर्वींचे** वर्षांचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५०—क्ष आणि ३५—क्ष. यावरून **निरनिराळीं कृत्यें** या बोलण्याचा अर्थ काय, आणि **एकच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष** या बोलण्याचा अर्थ काय, या दोहों बोलण्यांचा भेद दाखविण्यासाठीं व्याख्यान या जागीं केलें पाहिजे.

या जातीचा भेद पूर्वीं दाखविला आहे; कां कीं, अ—ब अशी जेव्हां अशक्यरूपाची वजाबाकी आली, तेव्हां कृत्याचें रूप फिरवायास अशा तऱ्हेची रीति नेहमी योजावी लागली, कीं, अंकांची मूळ किंमत फिरविल्यावांचून ब—अ असें उत्तर होण्यासाठीं जा समजुतीनें पहिल्यानें अंक घेतले होते, ती समजूत मात्र फिरविली. ही गोष्ट समजायासाठीं **६६ व्ये पृष्ठावरचा** पहिला उलटा विषय पहा. त्याचें उत्तर अशक्यरूप नाहीं, परंतु त्या उत्तरानें समीकरण स्थापिलें जात नाहीं. तेव्हां समीकरणास खरें रूप देण्यासाठीं, अंकांची किंमत बदलल्यावांचून, अशक्यरूप वजाबाकी उलटी होई अशी फिरविण्याची रीति मात्र घेतली. या वरून, हें पुढील व्याख्यान,* लक्ष्य न पोंचतां, कामांत आणिलें गेलें. जा कृत्यांमध्यें हे पुढील तीन संकेत येतात, तीं कृत्यें एकाच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष आहेत असें मानण्यास सोईवार पडतें. १. जर कामांत

* मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं हें व्याख्यान केवळ एकवर्ण समीकरणापासून सांपडलें यामुळें अशी जातीचे समीकरणांस मात्र लागेल असें समजावें. परंतु विस्तार केला असतां, अनेकवर्ण समीकरणासहि लागेल.

घेतलेले अंक सर्व कृत्यांत सारिखेच असतील; २. जर समीकरणांत हाच भेद असेल कीं, पदें उलटीं मांडिलेलीं असून त्यांचीं चिन्हेंही उलटीं असतील, जसें, ६७ आणि ६८ राव्ये पृष्ठावर, $+\frac{क्ष-१००}{२}$ याचे जागीं- $-\frac{१००-क्ष}{२}$ असें मांडिलें आहे, अथवा जा कृत्यांमध्यें अव्यक्त परिमाणांचीं चिन्हें सर्वत्र बदललेलीं असतील, जसें, ७१ राव्ये पृष्ठावर ५०+क्ष=२(३५+क्ष) याचे जागीं ५०−क्ष=२(३५−क्ष) असें मांडिलें; ३. जर दोहोंमध्यें उत्तरें सारिखींच असतील, किंवा उत्तरामध्यें इतकाच भेद कीं वजाबाकीचीं पदें उलटीं मांडिलीं असतील, जसें, ७१ राव्ये पृष्ठावर ५०−७० याचे जागीं ७०−५० असें आहे.

दिसण्यांत निरनिराळ्ये पक्षांचें असें एक कृत्य सांगतां येईल, परंतु वरचे कल्पनेवरून तें कृत्य दोन निरनिराळीं कृत्यें जोडून झालेलें आहे असें दिसेल. उदाहरण, **अ** जवळ ६० रूपये आहेत, आणि **ब** चे खातेवहीमध्यें जी शिलकबाकी धन किंवा ऋण राहील, ती **अ** ला मिळावयाची आहे; परंतु **क**, जा जवळ २०० रूपये आहेत, त्याणें बची मालमत्ता घेऊन, त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें कीं, **अ**चे मालमत्तेपेक्षां **क**ची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर बची शिलकबाकी घेणें अथवा देणें किती आहे?

जर बला शिलकबाकी क्ष रूपये घेण्याची असेल, तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$३(६०+क्ष) = २००+क्ष \text{ अथवा } क्ष = १०$$

जर बनें शिलकबाकी क्ष रूपये देणें असेल, तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$३(६०+क्ष) = २००-क्ष \text{ अथवा } क्ष = ५$$

एथे निरनिराळ्ये जातीचीं दोन समीकरणें आहेत, आणि पूर्वींचे व्याख्यानाचे संकेताप्रमाणें कोणत्या एक समीकरणाचा रूपभेद केला असतां त्यापासून दुसरें समीकरण होत नाहीं; यामुळें त्या समीकरणांस

एकवर्णाचे रूपांत आणितां येतात, ह्मणून वरचे दोन पक्ष निरनिराळीं कृत्यें आहेत.

आतां अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हांस बीजगणिताच्या रीति लावितों, नंतर उलटीं पदें मांडलेल्या वजाबाक्यांशीं खऱ्या रीतीप्रमाणें चालून, उत्पन्न झालेलीं उत्तरें ताडून पाहून, जा चुक्या झाल्या त्या सोप्या आणि साधारण रीतींनीं नीट करितां येतील कीं काय ? हें पहावयाचें आहे, ३–७ अशे जातीची वजाबाकी नीट मांडिली असतां ७–३ किंवा ४ होती, तर ती अशक्यरूप वजाबाकी सद्यः $\bar{४}$ अशा चिन्हानें दाखवितों; ४ या अंकावर जी गराद केली आहे, तें वजाबाकीचें चिन्ह नाहीं, परंतु ७–३ या बदल ३–७ हें उलटें रूप कामांत घेतलें आहे याची सूचना आहे. त्याच प्रमाणें १०–१४ हे $\bar{४}$ अशे चिन्हानें दाखवितां येतील असें ह्मणतां येईल; परंतु जोंपर्यंत या गोष्टीविषयीं कांहीं अधिक खात्री होई तोंपर्यंत एथे थांबलें पाहिजे; कां कीं ३–७ आणि १०–१४ अशे जातीचे चिन्हांविषयीं अद्यापि तर्क करवत नाहीं, कां कीं तीं अशक्यरूप वजाबाक्यांचीं चिन्हें मनांत घेण्यास योग्य अशीं परिमाणें दाखवीत नाहीं, आणि अद्यापि त्यांविषयीं कांहीं रीति सिद्ध केल्या नाहींत. जापासून हीं चिन्हें निघालीं तेथपर्यंत पुनः जाऊन, जा रीतीनें ३–७ निघाले, त्याच रीतीनें त्याचे जागीं १०–१४ निघाले असते कीं काय, इतकेंच पहातां येईल.

कल्पना कर, कीं खोट्या रीतीनें समजलेल्या किंवा मांडिलेल्या कृत्यापासून ७० व्ये पृष्ठावरचे प्रमाणें २क्ष–क्ष = ५०–७० असें येतें. खरें समीकरण ५०–क्ष = २ (३५–क्ष) हें घेतलें. तर त्याचे दोन बाजूंस कोणतेंहि परिमाण मिळवितां येईल. दोहों बाजूंस अ मिळवायाचा आहे असें ह्मण, तर या पुढील प्रमाणें होईल,

$$(५०+अ)–क्ष = (७०+अ)–२क्ष$$

यास उलगडून याप्रमाणें होतें,

$$२क्ष–क्ष= (७०+अ)–(५०+अ)=२०$$

खोट्या रूपानें समीकरण ५०+क्ष=२(३५+क्ष) असें जर घेतलें, आणि त्याचा दोहों बाजूंस जर अ मिळविला, तर उत्तराचा खोटेपणा कळे पावेतों, कल्पना खरी आहे असें मनांत धरून, क्ष=(५०+अ)–(७०+अ) असा परिणाम होईल. जसें कांहीं खरे रितीनें समीकरणाचे खरे रूपामध्यें कांहीं अदलबदल केली असतां, ७०–५०, ७१–५१, ७२–५२, इत्यादि अशे रूपाचें उत्तर होतें; त्याच रितीनें, समीकरणाचा खोट्या रूपांमध्यें अदलबदल केली असतां, ५०–७०, याचे जागीं ५१–७१, ५२–७२, इत्यादि अशे रूपाचें उत्तर होईल, या गोष्टीचा निर्णय करायाचा आहे. आणि एथपावेतों महत्व, अंक, आकार, इत्यादिकांस मात्र **बरोबरी** या शब्दाचा अर्थ लागू केला, यावरून ५१–७१ हे ५०–७० याचे **बरोबर** आहेत असें सांगत नाहीं; परंतु जा कोणत्याहि समीकरणापासून ५०–७० निघाले, त्याच समीकरणापासून ५१–७१ इत्यादि काढितां येतील. या कारणावरून ५१–७१ इत्यादि यांस ५०–७० यांचा बरोबरीचे असें ह्मणवेल; **बरोबरीचा** या शब्दाचा अर्थ एथे असा आणावा कीं उत्तर नीट करावें लागेल, अथवा जेव्हां जा खोट्या कृतीचे ठिकाणीं खऱ्या कृती मिळत नाहीं अशा खोट्या कृती नीट कराव्या लागतील तेव्हां पहिल्या चिन्हाचा जागीं दुसरें चिन्ह चुकी न येतां मांडितां येईल. या तऱ्हेनें तर, ०–१, १–२, २–३, इत्यादि हीं सर्व चिन्हें परस्पर बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं ‾१ या चिन्हानें दाखवितां येतात; अ–(अ+क) आणि (अ+ज्ञ)–(अ+क+ज्ञ) हीं बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं ‾क यानें दाखवितां येतात; ह्मणून रीति हीच आहे; कीं वजाबाकी उलट करून उत्तरावर गराद चिन्ह कर.

जसें जर या पुढीलप्रमाणें समीकरण आलें,

क्ष+अ+ब=०

स्पष्ट आहे, कीं हें अति अशक्यरूप आहे, तर केवळ रितीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें होईल,

क्ष = ०– (अ+ब)

त्यांचा अर्थ याप्रमाणें दाखवितां येतो, $(\overline{अ+ब})$

एकवर्ण समीकरणाचें मनन करण्यांत, खरें रूप क्ष–अ = ०, आणि खोटें रूप क्ष+अ = ०, या दोहोंवर मात्र लक्ष्य ठेविलें पाहिजे, कां कीं सर्व दुसरीं समीकरणें या रूपांत आणितां येतात. उदाहरण, ५६ आणि ५७ व्ये पृष्ठावरचें ४ थें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें,

$$क्ष-\frac{१२}{१३}=०$$

आणि ७० आणि ७१ व्ये पृष्ठावर पहिले कृत्याचें पहिलें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें,

$$क्ष+२० = ०$$

आतां $\overline{अ}+\overline{ब}$ $\overline{अ}-\overline{ब}$ $\overline{अ}\times\overline{ब}$ $\frac{\overline{अ}}{ब}$

यांविषयीं दुसरीं बरोबरीचीं रूपें काढितों,

$\overline{अ}+\overline{ब}$ ही पद्धति या पुढील जातीचे समीकरणापासून उत्पन्न होईल,

$$क्ष+(प+अ)-प+(क+ब)=क$$

हें समीकरण अशक्य असें घेतल्याचे पूर्वीं, उलगडलें असतां या पुढीलप्रमाणें निघेल,

$$क्ष=प-(प+अ)+क-(क+ब)=\overline{अ}+\overline{ब}$$

परंतु तशाच रितीनें उलगडलें असतां पुढलें होईल,

$$क्ष=प+क-(प+क+अ+ब) = (\overline{अ+ब})$$

यांत अ+ब यांजवरचा गरादेचा अर्थ हाच आहे, कीं कांहीं एक

परिमाणांतून जें दुसरें परिमाण वजा करायास योजिलें, तें अ+ब इतक्यानें पहिल्यापेक्षां अधिक आहे. अथवा याप्रमाणें आहे.

$\overline{अ}+\overline{ब}$ ही पद्धति $(\overline{अ+ब})$ हिचे बरोबरीची आहे,

वरचे सारिखें या पुढील समीकरणापासून

$$क्ष+(प+अ)-प+क=(क+ब)$$

$$क्ष=प-(प+अ)-\Big(क-(क+ब)\Big)=\overline{अ}-\overline{ब}$$ (हें केवळ रितीनें होतें.)

परंतु हें समीकरण नेहेमी अशक्यरूप नाहीं, कां कीं तें या पुढील समीकरणाचा बरोबरीचें आहे,

$$क्ष+प+अ-प+क=क+ब$$

अथवा $$क्ष+अ=ब \text{ तर } क्ष=ब-अ$$

यामुळें, जेव्हां अ पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां $\overline{अ}-\overline{ब}$ यांचें खरें रूप ब−अ आहे; जेव्हां अ पेक्षां ब उणा आहे, तेव्हां $(\overline{अ-ब})$ असें आहे. हें पुढील समीकरण केवळ रितीनें उलगडलें असतां त्यापासून जें ब+$\overline{अ}$ असें रूप निघतें त्याचा बरोबरीचें रूप देतां येईल.

$$क्ष+(प+अ)-प=ब$$

$$क्ष=ब+\Big(प-(प+अ)\Big)$$

$$\overline{अ}\,\overline{ब} \text{ अथवा } \frac{\overline{अ}}{\overline{ब}}$$

अशे रूपाचीं पदें अद्यापि सांपडलीं नाहींत, ह्मणून समीकरणावर लक्ष्य न ठेविल्यामुळें अशीं पदें उत्पन्न होतात, परंतु कृत्यावर लक्ष्य न ठेविल्या

मुळें उत्पन्न होत नाहींत, हें आतां दाखवितों. ह्मणजे, अब आणि अब, अथवा $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{अ}{ब}$, अथवा यासारिखीं दुसरीं रूपें, एकच समीकरणापासून काढलीं जातील, तें समीकरण खरें किंवा खोटें असो.

जर क पेक्षां प अधिक असेल आणि ड पेक्षां क अधिक असेल, तर प−क आणि क−ड या दोन शक्यरूप पद्धतींचा गुणाकार, आणि क−प आणि ड−क या दोन अशक्यरूपांचे पद्धतींचा गुणाकार केल्यानें दोहोंचीं उत्तरें सारिखींच होतील, जसें पुढीलप्रमाणें,

$$\begin{array}{l} प-क \\ क-ड \\ \hline पक-कक \\ \quad -पड+कड \\ \hline पक-कक-पड+कड \end{array} \qquad \begin{array}{l} क-प \\ ड-क \\ \hline कड-पड \\ \quad -कक+पक \\ \hline कड-पड-कक+पक \end{array}$$

वजाकरून, पक−कक−पड+कड ; कड−पड−कक+पक

हीं दोन्हीं उत्तरें पदांचे रचने शिवाय सर्वांशीं बरोबर आहेत. यामुळें, हें पुढील समीकरण, ह्मणजे

$$क्ष+कक+पड=पक+कक$$

दुर्लक्ष्यानें, हें कदाचित् याप्रमाणें उलगडलें जाईल, ह्मणजे

$$क्ष=पक+कड-कक-पड=(क-प)(ड-क)$$

परंतु नीट रितीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें असावें,

$$क्ष=(प-क)(क-ड)$$

यावरून, जर प−क याचे जागीं अ घेतला, आणि क−ड याचे जागीं ब घेतला, तर अब याचे जागीं अब असें पद सांपडेल.

$\frac{अ}{ब}$ याचे जागीं $\frac{\bar{अ}}{\bar{ब}}$ हें पद येतें असें कसें घडतें, हें ७८ पृष्ठावरच्चे उदाहरणावरून पहाण्यांत आलें. क या पेक्षां प अधिक, आणि ड या-पेक्षां क अधिक, असें मनांत घे; तर

$$कक्ष+क=डक्ष+प$$

यांस खरे रितीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल,

$$(क-ड)क्ष=प-क \text{ अथवा } क्ष=\frac{प-क}{क-ड}$$

खोट्या रितीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल,

$$(ड-क)क्ष=क-प \text{ अथवा } क्ष=\frac{क-प}{ड-क}$$

यावरून, जर प−क याचे जागीं अ, आणि ड−क याचे जागीं ब घेत-ला, तर $\frac{\bar{अ}}{\bar{ब}}$ याचे बरोबरीचा $\frac{अ}{ब}$ आहे.

जा कृत्यापासून समीकरण झालें, त्यांचे परस्परांचेसंबंधाच्चा विचार न करितां, समीकरणापासून जे सर्व निरनिराळे पक्ष उत्पन्न होतात, त्यांत बरोबरीच्चीं रूपें अथवा खरीं रूपें द्यावीं, याची रीति वर ठरविली. उदा-हरणावरून जें वर खचित् समजलें त्याच्चा आधार घेऊन, आतां कृत्य आणि समीकरण हीं दोन्हीं लक्ष्यांत आणून विचार करितों, ह्मणजे जा खोट्या कल्पनेवरून अ चे जागीं $\bar{अ}$ असें येतें, त्यापासून समीकरण करतेसमयीं वजाबाकी करण्याचे जागीं मिळवणी दाखवितें, आणि जेथें मिळवणी क-रायास योग्य तेथें वजाबाकी दाखवितें.

कांहीं समीकरण उलगडून $\bar{अ}$ हें उत्तर आलें, आणि मागली सर्व कृति खरी असली तर $\bar{अ}$ हें क शीं मिळवायाच्चें, अथवा, $क+\bar{अ}$ याची किंमत काढायाची आहे असें मनांत आण.

नीट करणें आणि पुढें चालायाचीं रीति. वर सांगितलेल्या उदा-हरणाचें खरें उत्तर अ आहे, परंतु जा खोट्या कल्पनेनें $\bar{अ}$ असें उत्तर आलें, त्या कल्पनें वरून जेथें खचित् वजा करण्याचें होतें तेथें हें पद

मिळवायाचें असें मनांत आलें. आणि याचे उलटेंहि; ६५ पासून ७० पृष्ठ पर्यंत पहा. यामुळें पुढें करायाची नीट केलेली खरी कृति हीच आहे, ह्मणजे क—अ, अथवा क+अ̅ ही पद्धति क—अ हिचा बरोबरीची आहे.

खोट्ये रितीची तपासणी. ज्ञ—(ज्ञ+अ) हिचा दर्शक अ̅ आहे. आणि सरळ रितीप्रमाणें क+ज्ञ—(ज्ञ+अ) अथवा क+ज्ञ—ज्ञ—अ हिचा दर्शक क+अ̅ अथवा क—अ, ही वरचे खरे रूपाचे बरोबर आहे असें वर दाखविलें.

याप्रमाणें, क—अ̅ असें आलें, तर अ खरें उत्तर आहे असें ठाऊक आहे, परंतु जा खोट्ये कल्पनेनें अ̅ असें उत्तर आलें त्यावरून जेथें मिळवायास योग्य तेथें त्यास वजा करण्याचें मनांत आणिलें; यामुळें क+अ हें खरें उत्तर आहे. खोट्ये कृतीनें याप्रमाणें होतें. क—(ज्ञ—(ज्ञ+अ)), अथवा क—ज्ञ+(ज्ञ+अ), अथवा क—ज्ञ+ज्ञ+अ, अथवा क+अ. यावरून या दोन रिती निघतात;

क+अ̅ ही क—अ हिचा बरोबरीची आहे,

क—अ̅ ही क+अ हिचा बरोबरीची आहे,

तशीच कल्पनेवरून (प—अ̅)(क—ब̅) ही (प+अ)(क+ब) हिचा बरोबरीची आहे. खोट्ये कृतीवरून पक—कअ̅—पब̅+अ̅ब̅ असें होतें. जर कृत्याचे खोट्ये समजुतीपासून अ̅ आणि ब̅ असें निघतें हें कल्पनेंत आणिलें, तर नीट करण्याविषयीं तशे जातीचें कांहीं कृत्य आधारासाठीं घेतलें पाहिजे. तें हें असावें;

अ आणि ब या प्रत्येकांजवळ ४ आणि ५ रुपये आहेत. त्यांची परस्परांत पैज पडली होती, त्यांतून एक, पैज हारल्यानंतर त्या प्रत्येकांजवळ जे रुपये होते त्यांचा गुणाकार १८ बरोबर आहे. तर त्या दोघांतून कोण किती हारला?

मनांत आण, कीं अ याणें क्ष रुपये गमाविले, तर समीकरण स्पष्ट याप्रमाणें होईल,

(४—क्ष)(५+क्ष) = १८

जर अ याणें क्ष रूपये मिळविले, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,

(४+क्ष)(५-क्ष) = १८

पहिल्या पक्षानें.

४-क्ष
५+क्ष
२०-५क्ष
    ४क्ष-क्षक्ष
२०-क्ष-क्षक्ष बेरीज
२०-क्ष-क्षक्ष = १८
    क्षक्ष+क्ष = २

दुसऱ्या पक्षानें.

४+क्ष
५-क्ष
२०+५क्ष
    ४क्ष+क्षक्ष
२०+क्ष-क्षक्ष वजाबाकी
२०+क्ष-क्षक्ष = १८
    क्षक्ष-क्ष = २

हें उदाहरण, आणि त्याच जातीचें दुसरें उदाहरण तपासल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं वेगळ्ये वेगळ्ये पक्षांचे खरे समीकरणांतील जीं पदें क्ष याणें एक वेळा गुणिलीं असतात, अथवा जांत ५१ **पृष्ठाप्रमाणें** क्ष विषयीं एकवर्ण पद आहे, त्यास निरनिराळीं चिन्हें आहेत; परंतु जा पदांमध्यें क्षक्ष येतो, अथवा तीं क्ष विषयीं दोन वर्णाचीं पदें आहेत, त्यांस निरनिराळीं चिन्हें नाहींत. आणि क्ष आणि य असे दोन अव्यक्त पदांचा गुणाकार, पदामध्यें असला, तर वरची गोष्ट त्यावरहि लागती हें पुढें स्थापिलें आहे; ह्मणजे या पुढील समीकरणाप्रमाणें

(४-क्ष)(५+य) = १८

आणि (४+क्ष)(५-य) = १८

$\overline{\text{अबक}}$ असें पद घेतलें, तर पहाण्यांत येईल कीं नीट केल्यानंतर त्याचे मागलें चिन्ह बदललेलें असावें; परंतु $\overline{\text{अबकड}}$ असे तऱ्हेचे पदाचें चिन्ह बदलत नाहीं; त्यावरून रीति हीच आहे, कीं जेव्हां नीट करण्याचा पदाचीं गुण्य गुणक अक्षरें **विषम** असतील, तेव्हां त्या पदाचें चिन्ह बदल कर. जे गुण्य गुणक नीट करायाचे ते अंश किंवा छेदांत

आले तरी त्याची कांहीं चिंता नाहीं ; उदाहरण, जर, $\frac{\overline{\text{अब}}}{\text{क}}$ असें पद घेतलें, तर जा समीकरणापासून $\overline{\text{क}}$ असें पद येतें त्यापासून क्षचे जागीं $\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}$ घेऊन $\frac{\text{१}}{\overline{\text{क}}}$ याचे जागीं $\frac{\overline{\text{१}}}{\text{क}}$ असें निघेल. पहा. जापासून $\overline{\text{क}}$ असें पद निघतें तें हें पुढील समीकरण आहे,

$$\text{२क्ष}+(\text{क}+\text{ज्ञ}) = \text{क्ष}+\text{ज्ञ};$$

हें समीकरण, सरळ रितीनें उलगडलें असतां, शेवटीं या दोन रूपानीं मांडितात,

$$\text{२क्ष}-\text{क्ष} = \text{ज्ञ}-(\text{क}+\text{ज्ञ}) \text{ अथवा क्ष} = \overline{\text{क}}$$

अथवा $\text{क्ष}-\text{२क्ष} = (\text{१}-\text{२})\text{क्ष} = \text{क}+\text{ज्ञ}-\text{ज्ञ} = \text{क}$

ह्मणजे $(\overline{\text{१}})\ \text{क्ष} = \text{क}(\div)\text{कक्ष}\ \frac{\overline{\text{१}}}{\text{क}} = \frac{\text{१}}{\text{क्ष}}$

या उत्तरचा परिणाम शोधित गेलें असतां, असें नजरेस येतें कीं $\frac{\overline{\text{१}}}{\text{क}}$ हें खोट्या रूपाचें पद $\frac{\text{१}}{\overline{\text{क}}}$ याचे बरोबरीचें आहे. यावरून $\frac{\overline{\text{अब}}}{\text{क}}$ हें पद $\overline{\text{अब}}$ $\times\frac{\overline{\text{१}}}{\text{क}}$, अथवा $\frac{\overline{\text{१}}\ \overline{\text{अब}}}{\text{क}}$ यांचे बरोबरीचें आहे, यांत नीट केल्यावांचून जे गुण्य गुणक आहेत ते सर्व अंशस्थळीं आहेत.

$(\text{प}-\overline{\text{अ}})\ (\text{क}-\overline{\text{ब}})$ हें पुनः लक्षांत घेऊन, यांस खोट्या रितीनें चालविलें असतां, $\text{पक}-\text{प}\overline{\text{ब}}-\text{क}\overline{\text{अ}}+\overline{\text{अ}}\overline{\text{ब}}$ या बरोबर होईल, तर अनुमानानें असा निश्चय केला पाहिजे, कीं, यास नीट करायासाठीं जा पदांमध्यें $\overline{\text{अ}}$ आणि $\overline{\text{ब}}$ हीं एकवर्ण आहेत, त्या पदांचीं चिन्हें बदल केलीं पाहिजेत; परंतु जा पदांमध्यें $\overline{\text{अ}}\overline{\text{ब}}$ येतें त्याचें चिन्ह बदल करूं नये ; यावरून त्याचें खरें रूप याप्रमाणें होईल,

$$\text{पक}+\text{पब}+\text{कअ}+\text{अब}$$

परंतु पहिल्यानें, १२३ पृष्ठावरचे सांगीतलेल्या रितीप्रमाणें, जर

$(\bar{\text{प}}-\bar{\text{अ}})(\text{क}-\bar{\text{ब}})$ याचे जागीं एकदांच (प+अ)(क+ब) याप्रमाणें नीट मांडिलें असतें, तर वरचे खरे रूपाप्रमाणें उत्तर निघालें असतें.

या तऱ्हेचे जे प्रकार घडतील ते प्रत्येक निरनिराळे विस्तारानें दाखविण्याचें प्रयोजन नाहीं. वरचे सर्व उदाहरणांपासून हें समजलें कीं अशक्यरूप वजाबाकीचे पद्धतीस, चुकीवांचून, बीजगणिताचा सरळ रिती लावितां येतील; ह्मणजे जर नीट करणें शेवटीं करायाचें आहे, तर तें नीट करणें इच्छेस येई तोंपर्यंत बंद ठेविल्यानें त्यांत चुकी येणार नाहीं. शेवटीं या पुढील रितीप्रमाणें नीट करितात; कांहीं पद नीट करायाचें असेल, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकीचे जागीं खऱ्ये वजाबाकीचे खरे अंक मांडून अशक्यरूप वजाबाकीचीं चिन्हें बदल कर; जसें, $\bar{३}$ **याचे जागीं ३ मांड, अथवा ज्ञ− (ज्ञ+३) याचे जागीं (ज्ञ+३)−ज्ञ असें मांड**; जा पदांस विषम वेळा नीट करावें लागतें त्यांचे पूर्वीचें चिन्ह बदल कर; समवेळा नीट करणें असल्यास चिन्ह बदल करूं नको. हें काम वारंवार हवें तितके वेळा कर. इतकें करून जर शेवटीं उत्तर खरें येईल, तर कृत्य बरोबर समजलें, आणि जा चुक्या त्यामध्यें आल्या त्या पहिल्ये मांडण्याचे आणि शेवटीं उत्तर येण्याचे मध्यें जा कृती येतात त्यांचे दुर्लक्ष्यानें झाल्या; परंतु नीट केल्यावर जरी उत्तर अशक्यरूप वजाबाकी निघेल, तर कृत्यामध्यें अनेक पक्ष आहेत किंवा तें कृत्य दुसऱ्ये कांहीं सामान्य कृत्याचा खोटा पक्ष आहे, या कारणानें तें कृत्य खरें समजलें नाहीं.

उदाहरण, कांहीं कृतीचे शेवटीं या पुढीलप्रमाणें उत्तर आहे असें मनांत आण,

$$\frac{\text{अबक}+\text{डड}}{\text{अक}-\text{ड}}+\frac{\text{अब}}{\text{कड}}-\text{कई}$$

नंतर अ, ब, आणि ई, हीं अशक्यरूप पदें आहेत असें शोधानें समजलें असें मनांत आण, आणि तीं पदें याप्रमाणें झालीं आहेत, ह्मणजे कांहीं अंक, त्यापेक्षां १कानें उणें अशा अंकांत तो अंक वजा करण्यानें अ पद उत्पन्न झालें, अशेच तऱ्हेनें कांहीं अंक, त्यापेक्षां ३ नीं उणें अशा अंकांत वजा करून ब पद झालें, असेंच कांहीं अंक त्यापेक्षां ५ नीं उणें अशे अंकांतून वजा करून ई पद झालें. ह्मणजे, अ, ब,

आणि ई, हीं $\overline{१}$, $\overline{३}$, आणि $\overline{५}$, यांणीं दर्शवितां येतात. क आणि ड हीं शक्यरूप असून ६ आणि २ यांचे बरोबर असतील. तर नीट केल्याचे पूर्वी, वरची पद्धति याप्रमाणें होईल,

$$\frac{\overline{१}\times\overline{३}\times६+२\times२}{\overline{१}\times६-२}+\frac{\overline{१}\times\overline{३}}{६\times२}-६\times\overline{५}$$

याला नीट करायास पहिली पायरी हीच आहे,

$$\frac{१८+४}{-६-२}+\frac{३}{१२}+३०$$

परंतु **११९ पृष्ठाप्रमाणें**, $-६-२$ हे $\overline{८}$ याणें दर्शवितां येतात; आणि वरचे रितीप्रमाणें यांस नीट केलें असतां, याप्रमाणें होईल $\frac{३}{१२}+३०-\frac{२२}{\overline{८}}$ अथवा $२७\frac{१}{२}$ हें नीट करणें मुळारंभीं केलें असतें, तर याप्रमाणें उत्तर आलें असतें.

परंतु वरचें रूप, $\overline{अ}$ हें बीजगणित ग्रंथकर्त्ते कामांत घेत नाहीं, आणि नेहेमी तसें ठेवायासाठीं एथें घेत नाहीं, परंतु, वजाबाकीचें चिन्ह दोन वेगळाल्या अर्थांनीं कामांत घेणें हें चुकविण्यासाठीं मात्र घेतलें आहे. रितीचा परिणाम काय होईल हें लक्षांत न आणितां, केवळ रितीप्रमाणें चाललें असतां, या पुढीलप्रमाणें कृती निघतील;

$$३-८=३-(३+५)=३-३-५=०-५$$

०+५, याचा अर्थ समजायाला ० ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं, त्यावरून -५ असें मांडावें. पूर्वी $\overline{५}$ असें लिहिलें तें आणि -५ हें एकच आहे. कोणतेहि पद्धतींत -५ असें पद नीट मांडून त्याशीं खरे रितीनें कृति केली तीं आणि $\overline{५}$ ही खोटी कल्पना नीट न करून यापासून खरें फळ संपादायाची रीति, या दोहोंचा फार सारखेपणा आहे तो $-$ या चिन्हाचे जितके गुण समजाया जोगे आहेत त्यामध्यें नजरेस येईल.

सारांश, शक्यरूप पद्धतीस जशा रिती लावितात तशा जर + आणि $-$ यांस लाविल्या, तर जरी त्यांचा सारिखेपणा स्थापिला जाई तों जो

भेद ठेविला आहे, तरी तो भेद $\bar{\text{अ}}$ आणि –अ, यांत कांहीं समजणार नाहीं. उदाहरण, ब–$\bar{\text{अ}}$ यांस नीट केलें असतां ब+अ आहे. आणि अ पेक्षां ज्ञ मोठा असेल, तर ब–(ज्ञ–अ) नीट केली असतां, ब–ज्ञ+अ होतो; अशानें अचे पूर्वीं दोन उणीं चिन्हें असून, खरे रूपाचे पदाप्रमाणें कामांत घेतला असतां, उत्तरांत +अ होतो. हीच रीति ब–(–अ) यास लाऊन ब+अ होतात; ह्मणून $\bar{\text{अ}}$ आणि –अ, हीं एकसारिखींच आहेत; असें मानणें आणि प्रवेशकांतील **शक्यरूपाचे** वजाबाक्यांस जा रितीं लावण्यास सांगितल्या त्यांशिवाय ब–$\bar{\text{अ}}$ यास नीट करण्यास, दुसरी रीति नको. जे प्रकार पुढें सांगितले आहेत त्या सर्वांत ही गोष्ट नजरेस येईल.

यास अधिक उघड करायासाठीं हें उदाहरण घे. अ=ब–क, क=ड–क्ष, क्ष=य–वि, वि=ट–ज्ञ, असें असावें. तेव्हां याप्रमाणें होईल,

$$\text{अ}=\text{ब}-(\text{ड}-\text{क्ष})=\text{ब}-\big(\text{ड}-(\text{य}-\text{वि})\big)$$

$$=\text{ब}-\big\{\text{ड}-\big(\text{य}-(\text{ट}-\text{ज्ञ})\big)\big\}\cdots\cdots\cdots(\text{अ})$$

$$=\text{ब}-\big\{\text{ड}-(\text{य}-\text{ट}+\text{ज्ञ})\big\}$$

$$=\text{ब}-\big\{\text{ड}-\text{य}+\text{ट}-\text{ज्ञ}\big\}=\text{ब}-\text{ड}+\text{य}-\text{ट}+\text{ज्ञ}$$

हें उत्तर पहातां, असें दिसतें कीं ज्ञचे पूर्वीं + हें चिन्ह आहे; वरचे (अ) पद्धतीमध्यें ज्ञचे पूर्वीं उणें चिन्ह चार वेळा येतें. टचे पूर्वीं – चिन्ह आहे, आणि (अ) पद्धतीमध्यें त्याचे पूर्वीं उणें चिन्ह तीन वेळा येतें. यचे पूर्वीं + चिन्ह आहे, आणि (अ) पद्धतींत त्याचे पूर्वीं उणें चिन्ह दोन वेळा येतें. यामुळें, जा पदांस विषम वेळा उणें चिन्ह आहे तीं पदें ऋण आहेत; आणि जांस समवेळा उणें चिन्ह आहे तीं धनपदें आहेत.

आतां, अशी कल्पना कर, कीं कांहीं समीकरणापासून ०–अ अशी खोटी किंमत सांपडली, आणि ही पूर्वींप्रमाणें, $\bar{\text{अ}}$ याणें दाखवितो. त्याचे पुढचे कृतीचे पायरीपासून ०–$\bar{\text{अ}}$ ही पद्धति सांपडली असें मनांत आण, तर यास $\bar{\bar{\text{अ}}}$ याणें दाखवितो. तिसऱ्या कृतीपासून ०–$\bar{\bar{\text{अ}}}$ असें निघालें,

तर यास $\bar{\bar{\bar{अ}}}$ अशानें दाखवावें, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यामुळें, प्रत्येक पायरीला एक नवा खोटा समज झाला; परंतु, पुढें असें दाखविलें आहे, कीं अशी चुकी पुनःपुनः समवेळा झाली असतां, उत्तरामध्यें दिसत नाहीं. पहिलें वरचें खोटें उत्तर, क्ष+अ=० अशे जातीचे समीकरणापासून क्षची किंमत काढण्याचे यत्नापासून निघालें. आतां य याची किंमत काढायास नवी कृति घे, आणि त्या कृतीपासून य+क्ष=० हें होतें असें मनांत आण. खरे रितीनें कृति केली असतां, क्ष–अ=० आणि य–क्ष=० अशीं समीकरणें निघालीं असतीं, ह्मणून त्यांपासून य=अ हें निघतें, परंतु क्ष+अ=० आणि य+क्ष=०, या खोट्या समीकरणापासून, केवळ सरळ रितीनें कृति केली असतां, तसें उत्तर होईल. कां कीं, दुसऱ्यांतून पहिलें वजा केलें असतां, य–अ = ०, अथवा य=अ असें निघेल. पुनः, ज्ञ याची किंमत काढायासाठीं, मनांत आण कीं, ज्ञ+य = ० असें होतें. हीं पुढील समीकरणें पहा,

क्ष–अ = ०	क्ष+अ = ०
य–क्ष = ०	य+क्ष = ०
ज्ञ–य = ०	ज्ञ+य = ०

पहिल्ये उभ्ये ओळीचे खरे समीकरणांपासून, ज्ञ=अ असें निघतें; दुसऱ्ये उभ्ये ओळींतल्या खोट्या समीकरणांपासून असें उत्तर येत नाहीं; कां कीं त्यांची संख्या विषम आहे. कां कीं, केवळ रितीनें, पहिल्याशीं तिसरें मिळविलें असतां, ज्ञ+क्ष+य+अ=० होतें, या बेरिजेंतून, दुसरें वजा केलें असतां, ज्ञ+अ=० असें निघेल. आणि याप्रमाणें, दुसऱ्ये पाहिजे त्या समीकरणावर अशीच कृति लागू होईल. आतां, पहा कीं पहिल्या समीकरणापासून क्ष = ०–अ अथवा $\bar{अ}$ असें निघतें, दुसऱ्या समीकरणापासून य=०–क्ष अथवा ०–$\bar{अ}$ अथवा $\bar{\bar{अ}}$ असें निघतें, तिसऱ्यापासून ज्ञ=०–य अथवा ०–$\bar{\bar{अ}}$ अथवा $\bar{\bar{\bar{अ}}}$, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून दिसतें, कीं या तऱ्हेची चुक समवेळा आली असतां ती आपोआप नीट होत्ये, विषमवेळा आली असतां, फिरवून नीट करावी लागती.

आतां ही पुढील पद्धति पुनः घेतों,

$$ब - \left\{ड - \left(य - (ट - ज्ञ)\right)\right\} = ब - ड + य - ट + क्ष$$

यांत ज्ञ पेक्षां ट मोठा, आणि ट—ज्ञ या पेक्षां य मोठा, इत्यादि असेल, तर ही पद्धति शक्यरूप आहे. यापूर्वीं अशक्य रूपाचे उदाहरणावरून काय निघेल हें पाहण्यासाठीं त्यास केवळ **कृती** लाविल्या; आतां तेंच पहाण्यासाठीं अशक्यरूप अशा समजलेल्या उदाहरणावर खरे **तर्क** लावितों. अशापासून कांहीं नवें करावें लागतें असें नाहीं; कां कीं जा तर्कांनीं कृतीची रीति सिद्ध झाली ते तर्क कृती लाविल्यासमयीं मनांत नेहेमी धरितों. सिद्धतेवर पुनः लक्ष देऊन, ती सिद्धता जेव्हां घेतलेल्या समीकरणांवर लागू करायाची असते, तेव्हां मात्र अ—(ब—क)=अ—ब+क अशे रितीनें मांडायाला योग्य आहे. **याविषयीं प्रवेशकांत** पहा. साधारण तर्काचें उदाहरण पुढें सांगतों.

[वरचें समीकरण बहुतकरून खरें आहे, ह्मणून जेव्हां ट = ०, य = ०, ड = ०, आणि ब = ०, असें असेल तेव्हां तें समीकरण खरें आहे. परंतु कोणतेंहि पद ० याणें अधिक उणें होत नाहीं, तर वरचे समीकरणांतील पदांमध्यें जेथें ० येतें त्यास टाकून याप्रमाणें होईल,

$$-\left\{-\left(-(-ज्ञ)\right)\right\} = ज्ञ$$

यामुळें, ज्ञ याचे पूर्वीं **चार** ऋण चिन्हें आहेत ह्मणून त्याचें चिन्ह बदलत नाहीं, आणि दुसरे कोणत्याहि **सम** चिन्हाविषयीं हीच गोष्ट खरी असें सिद्ध होईल.]

ही वरची तर्क रचना अनुभवाविषयीं मात्र उपयोगी आहे, परंतु ताळा पहाण्याविषयीं ही स्पष्ट खोटी आहे; कां कीं जेव्हां ब = ० असें आहे तेव्हां या पक्षाला अ—(ब—क) = अ—ब+क हें समीकरण लावितां येतें. या गोष्टीचा सामान्य ताळा विस्तारानें सांगतों, आणि तो ताळा

विशेष पक्षाला लागू होईल असा असावा, या दोन विषयांचीं उदाहरणें खालीं दाखवितों.

सामान्य ताळ्याचें उदाहरण.

जेव्हां कपेक्षां ब मोठा आहे तेव्हां हें रूप खरें.

अ यांतून ब—क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून ब वजा केला, तर अ—ब असें होतें. ह्मणून बाकी कमी राहिली, कां कीं कनें उणा तितका मात्र ब चा कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळें, क अधिक वजा झाला. आणि अ—ब+क हें खरें उत्तर आहे.

विशेष पक्षावर सामान्य ताळा लागू करून उदाहरण.

केवळ तर्कानें कोणत्याहि पक्षावर ही गोष्ट लागू व्हावयाजोगी नाहीं.

अ यांतून ०—क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून ० वजा केलें, तर अ—० असें होतें ह्मणून बाकी कमी राहिली, कां कीं, कनें उणा तितका मात्र ० याचा कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळें क अधिक वजा झाला. आणि अ—०+क ह्मणजे अ+क हें खरें उत्तर आहे.

वर जो तर्क लागू केला आहे त्याविषयीं कांहीं गोष्ट सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. कांहीं परिमाणांतून **शून्य** वजा केलें तथापि तें परिमाण अति उणें झालें, शून्याचा कांहीं भाग मात्र वजा करायाचा होता, ह्मणून **शून्यास** पूर्वीं **उणें** करायाचें होतें. या अध्यायाचे मागल्ये भागापासून अ—(—क)=अ+क असें जें समीकरण निघालें त्यास जो अर्थ द्यावयाचा तो पुढें लिहितों.

क जें परिमाण दाखवितो त्याचे विरुद्ध जातीचा तो आहे अशी कल्पना केली, अशा विशेष खोट्या कल्पनेचें उत्तर ०—क हें विशेष पक्षाचीं उदाहरणें तपासल्यावरून, नेहेमीं आढळांत आलें. आणि शोधून पाहिल्यानें असें दिसलें, कीं मिळवणी आणि वजाबाकीविषयीं सगळ्या कृती उलट्या झाल्या; ह्मणजे, जेथें वजा करायाचें होतें तेथें मिळविलें, आणि मिळवायाचें होतें तेथें वजा केलें; जर ०—क अशी अशक्यरूप पद्धति सांपडली नसती, तर ही नवी चूक आपल्यापासून घडली असती. या-

समजूतीचें फळ आहे, तें+असावें. यामुळें अ–(–क) यास शुद्ध रितीनें मांडलें असतां, अ+क आहे, परंतु अ+क याचे **बरोबर** नाहीं. तिसऱ्यानें, शोधावरून असें दिसलें, कीं जर खोट्या समजुतीचें फळ शुद्ध केल्यावांचून त्याशीं कित्येक कृती केल्या असतां चूक येणार नाहीं, परंतु चूक आल्यास इच्छेस येईल तेव्हां ती चुक या पुढील सोप्या रितीनें नीट होईल; ती रीति ही, कीं खरे रूपाचा पद्धतीपासून जा रिती निघाल्या त्यांशिवाय दुसऱ्या रिती लावूं नको.

अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हाला, चुकीवांचून, बीजगणितांतल्या रिती लावितां येतील, या आश्चर्यकारक गोष्टीचें कारण पुरतेपणीं सांगीतल्याचे पूर्वी, या रिती त्या चिन्हास लावितां येतील, असें समजलें. यामुळें **१३० व्या पृष्ठावर** लिहिलेल्या तर्कासारिखे पुष्कळ तर्क सर्वत्र खरे आहेत असें सर्वपक्षीं समजलें, आणि तें समजण्यासाठीं, नवी भाषा उत्पन्न केली, परंतु ती भाषा शब्दांचे सरळ अर्थानें पाहिली असतां खोटी दिसती.

परंतु शब्द हे कल्पित चिन्हें आहेत, आणि त्यांजवर विचार पूर्वक कल्पना हवी तशी चालती, पण शब्दाचा एका अर्थापासून जो बोध होतो, तो बोध त्या शब्दाचे दुसरे अर्थाला न लावावा अशा रितीचा आपल्या मनांतील एकाद्या शब्दाचा जो अर्थ असेल तो उघड सर्वांस माहीत असावा.

अंक गणितांत कांहीं नवीन विषय वाढविले आहेत आणि पूर्वी मनांत आलीं नव्हतीं अशीं नवीं चिन्हें कामांत घेतलीं आहेत. तीं चिन्हें कोणत्या रितीनें कामांत आणावीं हें वर सांगीतलें आहे, जा कृती कामांत येतील त्यांचें वर्णन करायासाठीं आतां शब्द कल्पून घेण्याचें मात्र राहिलें.

असे शब्द कल्पायाचा दोन रिती आहेत.

१. जी कृति संपूर्ण गणितरूप नाहीं, तिचा अर्थ दाखविण्याची इच्छा असेल, तेव्हां एकादा नवा शब्द कल्पावा. असें केलें तर ही विद्या कठीण शब्दांनीं युक्त होईल, आणि अशानें, शेवटीं गणितांतील जुने शब्द जाऊन त्यांचा ठिकाणीं नवे शब्द येतील इतकें मात्र होईल;



कां कीं या अध्यायांत जा खोट्या कल्पना विस्तारानें दाखविल्या आहेत, त्या मनांत घेऊन किंवा सोडून चालतों, हें कृतीचा शेवटा पावेतों कळणार नाहीं. यामुळें जुने शब्द टाकून नवे केलेले शब्द नेहेमी कामांत आणावे लागतील.

२. शब्दांचा अर्थ जो हालीं कामांत घेतात, त्याचा **विस्तार केल्यानें** त्या शब्दांचा अर्थ फिरवितां येईल; ह्मणजे त्यांचे जे अर्थ आहेत त्यांहून **अधिक अर्थाचा** बोध होईल. व्यवहारी बोलण्यांत यासारखी चाल आहे, आणि जेव्हां कांहीं एक विषय सांगण्यास एकाद्या शब्दाची गरज लागती. तेव्हां जा विषयास नांव देण्याचें आहे त्या सारिखा, अथवा त्याशीं संबंधाचा जो दुसरा विषय असेल, त्याचें नांव कामांत घ्यावें लागतें. जसें सांठवण, या शब्दाचा अर्थापासून कोठार, रांजण, कणगी, खोली, घर, वखार, इत्यादि पदार्थांचा बोध होतो. अशा तऱ्हेचीं नांवें सारिखेपणापासून मात्र दिलीं जातात, परंतु शब्दार्थाचे विस्तारानें वरचीं नांवें दिलीं नाहींत. आतां शब्दार्थाचे विस्तारानें जीं नांवें दिलीं असतात तीं विद्यांमध्यें शोधावीं. पशूंचा जातीविषयींचे विद्येंत या गोष्टीचीं पुष्कळ उदाहरणें आहेत. त्यांतून एथें एक उदाहरण घेतों. सर्व पशूंस प्रतवार लावायास पशूंचे अवयवांचे आणि दांतांचे रचना सादृश्यावरून त्या त्या पशूंचा प्रती लावायास सोईवार पडतें. पशूंचा एक्ये प्रतीमध्यें मांजर येतें, आणि त्या प्रतींत जे जे सर्व पशू येतात, त्यांत मांजर हें सर्वांचे माहितीचें आहे. या प्रतीमध्यें मांजर सिंह वाघ बिबळावाघ इत्यादि आहेत, या प्रतीस नवे शब्दानें नांव ठेवायाचें त्या बदल त्या प्रतीस मांजर प्रत ह्मणतात, आणि एक एकाचा वेगळेपणा दाखवायासाठीं मांजर या शब्दाशीं त्या प्रतींतल्या पशूंचा नांवाचा योग करितात. जसें, सिंहास **मांजरसिंह** ह्मणतात, वाघास **मांजर वाघ** ह्मणतात, बिबळ्यावाघास **मांजर बिबळा वाघ** ह्मणतात, इत्यादि मांजर या शब्दापासून केवळ व्यवहारिक अर्थ मनांत न येतां त्यापासून मांजराचा अथवा त्या सारिख्या दुसऱ्या पशूचा बोध होऊं नये परंतु जा अवयव रचनेवरून त्या प्रतीची निवड केली त्या अवयव रचनायुक्त पशूचा बोध व्हावा ह्मणून एथें काय केलें पहा. शब्दापासून जे अर्थ निघतात त्यांचा संकोच केल्यानें, त्या शब्दावरून जा पदार्थांचा बोध होतो त्या पदार्थांची संख्या अधिक

वाढती. आणि यावरून एक विद्वान दुसऱ्या विद्वानाशीं अशा रितीनें बोलत असतां, किंवा त्यास लिहीत असतां, त्यांची चूक होणार नाहीं; तथापि त्यांचा अर्थ न जाणणाऱ्या तिसऱ्या पुरुषाचे मनांत असें येईल, कीं मांजर मनुष्यास घेऊन पळेल आणि खाईल, असें हे दोघे मानितात.

त्याच सारिखे, बीजगणितामध्यें, असे शब्द येतात, ज्यांचा अर्थ अंक गणितांत पक्का जाणलेला असतो, आणि बीजांत अशा कृती आहेत कीं जा अंक गणिताचे विषयाचे पलिकडे नेतात. परंतु, बीजांतील आणि अंकगणितांतील कृतीमध्यें, कांहीं असा सारिखेपणा आहे, कीं जा कृती सारखेच रितीनें चालतात त्यांस एकत्र करून एक प्रतीमध्यें घालायास सोईस पडतें; आणि, वर लिहिल्याप्रमाणें या प्रतीस नाव देतानां, अंक-गणिताचे शब्दाचे व्याख्यानाचा संकोच केला पाहिजे असा कीं सर्व मिळून झालेल्या प्रतीस अंक गणितरूप नांव देतां येईल. माहितींतील अंकगणित कृतींविषयीं जेव्हां बोलायाचें असतें, तेव्हां त्या कृतीचे पूर्वी **अंकगणितरूप** हा शब्द जोडिला आहे. जसें, **अंकगणितरूप** मिळवणी ह्मटलें असतां, हाच अर्थ होईल, कीं एक केवळ अंक दुसऱ्या केवळ अंकांत मिळवायाचा आहे. परंतु **बीजगणितरूप** मिळवणी अथवा जीस मिळवणी असें ह्मटलें तिचा एक पक्ष मात्र **अंक** गणितरूप मिळवणी आहे असें दिसण्यांत येईल. **सारांश, पहा, कीं, जेव्हां अंकगणित-रूप असा शब्द पूर्वी जोडला नसेल, तेव्हां सर्व शब्दांस विस्तीर्ण अथवा सामान्य बीजरूप अर्थ आहे असें पुढें ध्यानांत ठेविलें पाहिजे.**

आतां शब्दांतील अर्थाचा संकोच अथवा त्याचे अर्थांचे पक्षांचा विस्तार या दोहोंतून कसें ह्मणावें. यांविषयीं विचार करितों.

१ **परिमाण** हा शब्द **अंकगणितामध्यें** कोणत्याही पूर्ण किंवा अपूर्णांकास लागतो. **बीजगणितामध्यें**, गणनेचा रितीपासून जें उत्तर निघतें त्या उत्तराचें चिन्ह* परिमाण मात्र आहे. या गोष्टीचा पहिला अनुभव या पुढील प्रतिज्ञेमध्यें आहे.

---

* जें कांहीं पदार्थाचे प्रतिमेसारिखें दृष्टीपुढें ठेविलें असतें, तें त्या पदार्थाचें चिन्ह आहे. **परिमाण** हा शब्द त्याचा मूळ अर्थानें अंकगणितांतहि येत नाहीं. २ हा अंक परिमाण नाहीं. (तो लिहिण्यास जी शाई लागली तिचें परिमाण मनांत आणल्यावांचून) परंतु केवळ

जेथपर्यंत आपण आलों त्यांत **परिमाणें धन** आणि **ऋण अशीं दोन प्रकारचीं अढळलीं.** अंकगणितरूप **परिमाणें सगळीं धनच असतात.**

अंकगणिताविषयीं ही गोष्ट मनांत आणिली पाहिजे, कीं+६ हे ६ या चिन्हांपेक्षां अधिक आहेत; ६ उत्तर येण्यास एक* विशेष तऱ्हेचें चिन्ह आहे, ह्मणजे, ०+६, अथवा शून्यास साहा मिळाल्यानें ६ उत्तर येतें. परंतु **दाखविलेल्या कृतीवरून** ३+३ हे +६ यांशीं एकरूप नाहीं, परंतु **निघालेल्या उत्तरांत** ते एकरूप आहेत; अशाप्रमाणें (अ+क्ष)(अ−क्ष) आणि अअ−क्षक्ष, यांची एकसारिखीच कृति नाहीं, तथापि त्यांपासून सर्वदां एकसारिखेंच उत्तर होतें.

धन आणि ऋण परिमाणें निखालस उलट्या अर्थाचीं आहेत; जर + अ हा अ रुपयांची प्राप्ती असेल तर अ तितक्यांचा तोटा असावा; जर + अ हा अ रुपयांचा तोटा असेल, तर − अ तितक्यांची प्राप्ती असावी; जर + अ उत्तरेकडे कांहीं मोजलेली लांबी असेल, तर − अ तितकीच लांबी दक्षिणेकडे मोजलेली असावी; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

दुसऱ्या रूपानें या भेदाचा विचार सविस्तर दाखविला आहे. प्राप्ती झाली अशी कल्पना केली आणि अशा कल्पनेचे खरे समीकरणापासून असें उत्तर निघतें, कीं अ प्राप्ती झाली, तेव्हां पहिली कल्पना खरी होती; परंतु जर उत्तर −अ निघेल, तर पहिली कल्पना खोटी होती, आणि अ रुपये तोट्याची कल्पना करायास योग्य होती. चुकी नीट करण्याचे जागीं चुकीचें चिन्ह राखिलें इतकाच एथें विस्तार केला. याविषयीं हेंच लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं विस्तार केल्यानें घालमेल होत नाहीं, कां कीं खोटी कल्पना खरी करण्याची एकच रीति आहे. जर−अ हा एकापेक्षां अधिक चुक्या दाखवील, आणि कृत्यांत दुसरी चूक नीट करण्याचें अगत्य पडेल, तेव्हां पहिली चूक नीट करितानां −अ असें मांडणें खोटें आहे.

---

* चिन्ह आहे, जेणेंकरून असें दाखविलें जातें, कीं भलतें कांहीं परिमाण १ याणें दर्शिवलेलें तें दोन वेळा घेतलें. जसें, ३−५ हें खरे रूपाचें चिन्ह आहे, परंतु गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह नाहीं, कां कीं, ३, −, आणि ५, याचे गणितरूपाचा अर्थ उलटा करून कांहीं कृति करायास सांगतें.

भूमितीला बीजगणित लागू केल्यानें, अशे तऱ्हेचा विस्तार करणें त्वरेनें कळेल.

क अ क ब

एका सरळ रेघेवर **अ** बिंदू असेल आणि त्याचे दोहोंकडे ती रेघ मोहोगम लांबीची असेल; **अब अचे** उजव्येकडे मोज, आणि **ब** पासून **बक** बचे डाव्येकडे मोज. जर **बक** पेक्षां **अब** मोठी असेल, तर **क**चे स्थानाचें योग्य वर्णन हेंच आहे, कीं तो **अब–बक अचे उजव्येकडे एवढा लांब आहे.** परंतु जर **अब** पेक्षां **बक** मोठी असेल, आणि **क** विषयीं वरचा गोष्टी सारिखें बोलायाचें आहे, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकीवरून कांहीं चूक आहे असें समजतें, आणि त्वरेनें पहाण्यांत येतें, कीं कचे जाग्याचें योग्य लक्षण हेंच आहे, कीं **अचे डाव्येकडे बक–अब एवढा लांब आहे.**

लाक्षणीक अर्थानें जे शब्दार्थांचे विस्तार, ते बोलण्यांत आणि लिहिण्यांत फारच येतात, इतके कीं जा कृतींचा वर शोध झाला आहे, त्यांचा खरेपणा स्थापण्याविषयींहि ते घेतले आहेत. **प्राप्ती मिळविणें** या वाक्यांत खरे रितीनें अर्थाची द्विरुक्ती आहे, आणि **प्राप्ती गमाविणें** यांत विरुद्ध अर्थ आहे, या वाक्यांतील **गमाविणें** हा शब्द साधारण बोलण्यांत **न मिळवणें** या अर्थानें योजितात. परंतु **तोटा मिळवणें** या शब्दांत अर्थाचा उघड सरळपणा आहे; जाचे मनांत नफा होईल असें होतें त्यास तोटा झाला असतां, त्या पुरुषावर कपट स्तुतीनें हे शब्द लावितात. **उजेड आला** याचे जागीं **अंधकार गेला** असें जेव्हां ह्मणतों, तेव्हां आपल्ये मनांत जी गोष्ट होती तिचा बोधक जो शब्द, त्या सारिख्ये अर्थाचा दुसरा शब्द घेतल्यामुळें ही चूक झाली.

एक पदार्थ दुसरे पदार्थाशीं मिळविल्यानें कांहीं एक दृष्टिविषय होतो, असें आपण पदार्थ ज्ञानास गणित लावतेसमयीं चुकीनें मनांत आणितों, परंतु खरें ह्मटलें असतां पदार्थापासून पदार्थ काढल्यानें तो दृष्टिविषय होतो, आणि याचें उलटेंहि. असें पुष्कळ ठिकाणीं आढळतें.

त्यांतील दोन उदाहरणें जीं बहुतकरून लक्षांत ठेवण्यास योग्य तीं सांगतों.

१. रूक्ष हवा असते त्यासमयीं चामड्यावर कांच घर्षण केली असतां, त्या दोन पदार्थांचे आंगीं बारीक बारीक पदार्थ आकर्षून घेण्याची शक्ति येती, या शक्तीला **विद्युल्लतेचें** आकर्षण, अथवा **विद्युत्** ह्मणतात. पूर्वीं असें समजत असत, कीं घर्षणानें चामड्यापासून कांचेंत कांहीं प्रवाही पदार्थ शिरतो, असा कीं पहिल्यापेक्षां कांचेंत त्या पदार्थांचा कांहीं अधिक अंश होतो, आणि चामड्यांत कांहीं उणा होतो. यामुळें, कांचेला **धन** विद्युत् संबंध, आणि चामड्याला **ऋण** विद्युत् संबंध प्राप्त होतो असें ह्मणत; आणि हा ऋण विद्युत्संबंध, त्यांतून कांहीं कमी केल्यानें घडला असें मानीत असत. परंतु काळांतरींचा अनुभवावरून असें दिसलें, कीं त्या दोन पदार्थांचे घर्षणानें कांहीं एक मिश्रप्रवाही अथवा अप्रवाही पदार्थ अथवा दुसऱ्या कांहीं नावाचा पदार्थ त्यापासून दोन निराळे अवयव उत्पन्न होतात आणि ते अवयव त्यांचे मुळचे प्रमाणानें संयुक्त झाले असतां, ते कोणासहि आकर्षित नाहीं, असा गुण त्यांचे आंगीं असतो, परंतु एक दुसऱ्यापासून वियुक्त झाला ह्मणजे, तो वियोग आकर्षणावरून दिसतो. तर या दोन अवयवांतून एकाला **कांचेची** विद्युत्, आणि दुसऱ्यास **राळेची** विद्युत्, असें नांव दिलें आहे. शोधल्यानें असें कळलें कीं घर्षणानें पहिली धनविद्युत् **कांचेंत येती**, आणि दुसरी ऋण विद्युत् **राळेंत येती**. तथापि बहुत लोकांनीं पूर्वींचीं **धन** आणि **ऋण** विद्युत् हीं जुनीं नांवें राखिलीं आहेत; आणि तेणेंकरून कांहीं अडचण पडली नाहीं, कां कीं जास विद्युल्लतेचा गणितरूप, दृश्यविषय ह्मणतात, तो दोन्हीं कल्पनामध्यें एकसारिखाच असतो; कार्याचें कारण नाहींसें करणें अथवा जें कार्याचा नाश करितें त्याचा पुष्कळ अंश मिळविणें या दोन्हीं कल्पना पासून फळ सारिखेंच आहे.

२. एकाद्या बंद केलेल्या पात्रांमध्यें दिवा जळता ठेविला असतां, असें दिसलें कीं जळण्याचा व्यापार चालवायास पात्रांतील हवा त्वरेनें असमर्थ होती, आणि अशानें त्यांत उत्पन्न झालेली हवा, श्वासोश्वासा विषयीं अयोग्य होती. यावरून स्पष्ट समजलें कीं हवेमध्यें कांहीं फेर झाला; आणि अशी कल्पना केली कीं जोतीपासून कांहीं प्रवाही पदार्थ निघून हवेशीं मिळाला. या प्रवाही पदार्थाला **फ्लोजिस्टन** ह्मणजे

जोत करणारा असें नाव दिलें. यामुळें अशी कल्पना धरली कीं जळण्यानें **फ्लोजिस्टन** हवेशीं **मिळाला** परंतु नंतर असा शोध लागला कीं जेव्हां कांहीं पदार्थ जळतो, तेव्हां वस्तुतः कांहीं पदार्थ हवेंतून घेतला जातो, आणि त्या पदार्थास आक्सिजन ह्मणतात. दुसऱ्ये युक्तीनें असें जाणलें कीं, आक्सिजन हवेचे मिश्राचा एक भाग आहे. यावरून **आक्सिजनाचें काढणें** हा जळण्याचा परिणाम आहे. जर फ्लोजिस्टनाचे कल्पने वरून रसायण विद्येची कांहीं गणना नीट करायाची असेल, तर या अध्यायांत जी रीति सांगीतली, तिजवरून, या पुढील कल्पनेनें होईल, कीं+अ फ्लोजिस्टन हें–अ आक्सिजन आहे.

२. **मिळवणी**, आणि **वजाबाकी**. पदांचीं चिन्हें आहेत तशींच राखून दोन पद्धती एकत्र करणें हा पहिल्ये शब्दाचा अर्थ आहे; दोन पद्धती असतील त्यांतून जी वजा करायाची आहे, तिचीं चिन्हें बदल करून त्या दोन पद्धती एकत्र करणें, हा दुसरे शब्दाचा अर्थ आहे. गणितानुरूप मिळवणी आणि वजाबाकी हे दोन विषय या शब्दांचे विशेष पक्ष आहेत, असें या पुढील उदाहरणापासून कळेल,

३+(५–२) अथवा ३+(०+५–२)=३+५–२

८–(५–२) अथवा ८–(०+५–२)=८–५+२

परंतु, या पुढील प्रमाणेंच मिळवणी आणि वजाबाकीमध्यें येतें

–३+(–५) हे–३–५ अथवा–८

–३–(–५) हे–३+५ अथवा+२

३. **बरोबर**. दोन बीजगणितानुरूप पद्धतींतून, जर एक दुसरीचे जागीं चुकी वांचून मांडितां येईल, तर त्या बरोबर आहेत असें ह्मणतात, आणि त्या दोहोंचे मध्यें = हें चिन्ह मांडितात, वर सांगीतल्या प्रमाणें, यांत गणितानुरूप बरोबरी आहे; कां तर ५+३ हे गणितानुरूपानें ८ यांचे बरोबर आहेत, तर ८ चे जागीं ते मांडितां येतील. परंतु हा शब्द बीजानुरूप अर्थानें यांसहि लागतो ह्मणजे, ३–७ आणि

१०–१४. ११८ पृष्ठ पहा, अ+ (–ब) आणि अ–ब, यांसहि तो शब्द लागतो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; आणि यानंतर बरोबर हा शब्द अधिक विस्ताराचे पक्षाला लावितां येईल. एकाद्ये खोट्ये कल्पनेपासून या पुढीलप्रमाणें होईल.

१–१+१–१+१–१+ इत्यादि अनंत पावेतों.

यांचें खरें उत्तर $\frac{१}{२}$ आहे. हें तरी याप्रमाणें मांडितात

$\frac{१}{२}$= १–१+१–१+ इत्यादि अनंत पावेतों.

४. **अधिक** आणि **कमी; वाढ** आणि **घट**, जसा मिळवणी आणि वजावाकी या शब्दाला विस्ताररूप अर्थ पाहिजे तसा यांसहि पाहिजे. गणिताचीं चिन्हें हीं आहेत,

० १ २ ३ ४ ५, इत्यादि.

आणि यांशिवाय त्यांचे मधले अपूर्णांक हेहि आहेत; आणि भलत्ये दोहींतून जो अधिक आहे तो दुसऱ्याचे उजव्येकडे येतो. बीजगणिताचीं अंकचिन्हें हींच आहेत,

	गणितानुरूप
·····–४ –३ –२ –१	० +१ +२ +३ +४ इत्यादि.

ह्मणून वरचे बीजगणितरूप चिन्हास +१ बीजगणितरूपाचे रितीप्रमाणें मिळविला असतां, त्याचीं पदें गणितरूपाप्रमाणें पुढें चालतात. कां कीं

–४+१ = –३   –१+१ = ०

–३+१ = –२   ०+१ = +१

–२+१ = –१   +१+१ = +२

अधिक आणि **कमी** यांचें व्याख्यान वरचा ओळीचा दोहों बाजूंस बरोबर असूं दे; ह्मणजे दोन परिमाणांतील, जें परिमाण उजव्येकडे येतें तें अधिक आहे. जसें, –१ हा –२ पेक्षां अधिक असें ह्मणतात, +२ हे –१ पेक्षां अधिक, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून, शब्दांचे विस्तृत अर्थानें, ही पुढील* प्रतिज्ञा निघती;

सगळीं धन परिमाणें शून्यापेक्षां अधिक आहेत; सगळीं ऋण परिमाणें शून्यापेक्षां कमी आहेत. दोन धन परिमाणांतील, जें गणितरूपानें अधिक आहे, तें त्या दोहोंत अधिक आहे; दोन ऋण परिमाणांतील जें गणितरूपानें कमी आहे तें त्या दोहोंत अधिक आहे.

वाढ आणि **घट** हे विस्तृत अर्थाचे शब्द **अधिक** आणि **कमी** या शब्दांचे जागीं चालतील. जेव्हां एकादें परिमाण अधिक करितात तेव्हां तें वाढतें, आणि जेव्हां तें कमी करितात तेव्हां तें घटतें. परंतु **लहान** हा शब्द, विस्तारावांचून त्याचा गणितानुरूप अर्थानें नेहेमी ठेविला आहे.

पहा. **वाढ** आणि **मिळवणी** इत्यादि यांचा भेद खालीं दाखविला आहे,

धन / ऋण	परिमाण मिळवल्यानें	वाढ / घट	होती
धन / ऋण	परिमाण वजा केल्यानें	घट / वाढ	होती

* या प्रतिज्ञेवरून नवे शिकणारे फार वचकतात, अंकगणितानुरूप परिमाण सांगितल्याशिवाय, अधिक आणि कमी यांचा कांहींच अंकगणितानुरूप अर्थ नाहीं, ही गोष्ट पूर्वी शिकणाराचे मनांत आणिली नाहीं, हें त्यांचे वचकण्याचें कारण आहे.

ह्या पुढील प्रतिज्ञाहि खऱ्या आहेत ?

मिळविण्याचें परिमाण जितकें अधिक असतें, तितकें उत्तर अधिक होतें.

उदाहरण.

−७ हे −१० यांपेक्षां अधिक आहेत

३+(−७)हे ३+(−१०) यांपेक्षां अधिक आहेत

पहाण्यांत येतें, कां कीं −४ हे −७ यांपेक्षां अधिक आहेत.

यासारिखेंच **वजा करण्याचें परिमाण जितकें कमी आहे, तितकें त्याचें उत्तर अधिक आहे.** ३ यांतून −८ वजा कर, उत्तर +११ आहे; −८ यापेक्षां कांहीं कमी वजा कर, ह्मणजे −१२, तर उत्तर +१५ आहे, हें +११ पेक्षां अधिक आहे. −४ यांतून ७ वजा कर, उत्तर −११ आहे; ७ यांपेक्षां कांहीं कमी वजा कर, तर −३ घे, यावरून उत्तर −४− (−३) अथवा −१, आहे हा −११ पेक्षां अधिक आहे. आणि असें समजांत येईल, कीं मिळवणी अथवा वजाबाकीविषयीं जीं सर्व कृत्यें गणितरूप परिमाणाविषयीं खरीं आहेत, तीं बीजगणितरूप परिमाणाविषयींहि खरीं होतील; हें आपल्ये नव्ये व्याख्यानाचें विशेष फळ आहे. याविषयीं या पुढील गोष्टीवर नजर ठेव;

ब पेक्षां जर अ अधिक असेल, तर अ−ब धन आहे; जर ब पेक्षां अ कमी असेल, तर अ−ब ऋण आहे. जसें

−३−(−४)=+१ −३−(−२)= −१

अधिक आणि कमी यांचीं चिन्हें > आणि < हीं आहेत. जसें, जेव्हां ब पेक्षां अ अधिक आहे, तेव्हां अ > ब, याप्रमाणें मांड. जेव्हां ब पेक्षां अ कमी आहे, तेव्हां अ < ब, असें मांड.

कोनाचें तोंड मोठ्ये परिमाणाकडे असतें. बरोबरीचें चिन्ह, = यामध्यें कोणत्येहि परिमाणाकडे कांहीं कोन नसतो.

५. **गुणाकार** आणि **भागाकार.** अंकगणित परिमाणाविषयीं, बीजगणिताचा गुणाकार आणि भागाकार यांचा रीती अंकगणितांतल्ये रीतिसारिख्याच आहेत. पूर्वीं पाहिल्याप्रमाणें, चिन्हांविषयीं, ही रीति आहे, **एक जातीचे** चिन्हांपासून + होतें, **भिन्न जातीचे** चिन्हांपासून − होतें.

$$+\text{अ}\times+\text{ब} \text{ आणि} -\text{अ}\times-\text{ब} \text{ हे दोन्हीं} +\text{अब आहेत}$$

$$-\text{अ}\times+\text{ब} \text{ आणि} +\text{अ}\times-\text{ब} \text{ हे दोन्हीं} -\text{अब आहेत}$$

$$\frac{+\text{अ}}{+\text{ब}} \text{ आणि } \frac{-\text{अ}}{-\text{ब}} \text{ हे दोन्हीं } + \frac{\text{अ}}{\text{ब}} \text{ आहेत}$$

$$\frac{-\text{अ}}{+\text{ब}} \text{ आणि } \frac{+\text{अ}}{-\text{ब}} \text{ हे दोन्हीं } - \frac{\text{अ}}{\text{ब}} \text{ आहेत}$$

जसें अंकगणितामध्यें गुणाकारांस अधिक आणि कमी हे शब्द लाविले जातात तसे बीजांत सर्वदा लावतां येत नाहीं. ह्मणजे, ३ > २, ५ > ४, यामुळें ३×५ > २×४ ; परंतु ३ > −२, −३ > −४, हे ३×−३ > −२×−४ अथवा −९ > ८ याप्रमाणें आहेत असें मानितां येत नाहीं, परंतु याचे उलटें होतें −९ < ८ असें आहे. परंतु गुण्यगुणकापासून गुणाकाराचें बीजगणितरूप प्रमाण काढण्याची क्वचित गरज पडेल ; ह्मणून निरनिराळे पक्ष एकत्र करणें हें शिकणारानें पाहिजे असल्यास करावें.

६. **प्रमाण.** जेव्हां पहिलें परिमाण दुसऱ्यानें भागिलें, आणि तिसरें परिमाण चवथ्यानें भागिलें असतां, जर ते दोन भागाकार बरोबर असतील, तेव्हां तीं चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, असें ह्मणतात. अंकगणितामध्यें प्रमाणाचें जें पूर्वीं व्याख्यान केलें तें आणि हें व्याख्यान शब्दांविषयीं एकच आहे, परंतु **परिमाण, भागिलें,** आणि **बरोबर,** या तीन शब्दांचा अर्थ या ठिकाणीं विस्तीर्ण आहे. अंकगणितांमध्यें जसें अधिक आणि कमी हे शब्द लावितात, तसें बीजांत सर्वदा लावतां येत नाहीं. जसें. $\frac{३}{-४}$ आणि $\frac{-६}{८}$ यापासून हें प्रमाण होतें, ३:−४::−६:८; यांत −४ पेक्षां ३ अधिक आहेत, परंतु ८ पेक्षां −६ कमी आहेत.

आतां कृत्याला वरचीं व्याख्यानें लाऊन ११७ व्या पृष्ठावरील उदाहरण घेतों, कां कीं जेव्हां केवळ एकवर्ण समीकरणानें काम करायाचें असेल तेव्हां तीं दोन निरनिराळीं कृत्यें आहेत.

अ जवळ ६० रुपये आहेत, आणि बचे खातेवहीमध्यें जी शिलकबाकी, धन किंवा ऋण राहील, ती अ यास मिळावयाची आहे; परंतु क, जाजवळ २०० रुपये आहेत, त्याणें बचीं मालमत्ता घेऊन त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें, कीं अचे मालमत्तेपेक्षां कची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर बची शिलकबाकी घेणें अथवा देणें किती आहे?

शिलकबाकी दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ही बचें घेणें किंवा देणें असेल त्याप्रमाणें धन किंवा ऋण होईल; तर अ जवळ ६०± क्ष, यांत जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां धन चिन्ह कामांत घ्यावें,* जेव्हां क्ष ऋण आहे, तेव्हां ऋण चिन्ह घ्यावें. परंतु कचे जवळ २००+क्ष आहे; यामुळें,

$$३(६०+क्ष) = २००+क्ष$$

अथवा $$\pm३क्ष = २०+क्ष$$

यांत दोन समीकरणें आहेत, एक धन चिन्हाचें, आणि एक ऋण चिन्हाचें. परंतु यावरून हेंच निघतें, कीं

$$\pm३क्ष\times\pm३क्ष = (२०+क्ष)(२०+क्ष)$$

या समीकरणाची पहिली बाजू दोन्हीं पक्षांनीं + ९क्षक्ष आहे, कां कीं $-३क्ष\times-३क्ष$ आणि $+३क्ष\times+३क्ष$, बरोबरच आहेत; ह्मणजे, +९क्षक्ष. यामुळें

$$+९क्षक्ष = ४००+४०क्ष+क्षक्ष$$

अथवा $$८क्षक्ष - ४०क्ष-४००=०$$

(÷)८ $$क्षक्ष - ५क्ष-५० =०$$

---

*वरचा दोन्ही कल्पनांतून कोणतीहि घेतली तरी अची मालमत्ता वाढत्ये; यावरून, जर शिलकबाकी +३ असेल, तर त्याचेजवळ ६०+(+३) होईल; परंतु जर शिलकबाकी-३ असेल तर त्याचेजवळ ६०-(-३) होईल.

दोनवर्ण समीकरणें उलगडण्येसमयीं, असें पहाण्यांत येईल, कीं हें समीकरण क्षचे केवळ दोन किमतीविषयीं मात्र खरें होऊं शकतें; क्ष=१०, अथवा क्ष=−५ असें असलें पाहिजे. ह्मणजे, बला १० रूपये घेणें आहेत, अथवा ५ रूपये देणें आहेत; असेंच उत्तर ११७ **व्या पृष्ठावरहि** आलें आहे.

+१० अथवा −५ यांतून कोणतेंहि घेतलें, तर त्याणें वरचें समीकरण स्थापिलें जातें, हें पुढें दाखविलें आहे:

क्ष = १०	क्ष = −५
क्षक्ष = १००	क्षक्ष = २५
−५क्ष = −५०	−५क्ष = +२५
−५० = −५०	−५० = −५०
क्षक्ष−५क्ष−५० = ०	क्षक्ष−५क्ष−५० = ०

जा अर्थीं बीजगणिताचा विस्तार असा केला कीं अंकगणितरूप परिमाणें असतांना जा रिती त्यांस लागतात त्याच रिती बीजगणितरूप परिमाणें जेव्हां अंकगणितरूपाचीं नसतात तेव्हां त्यांजवरहि लागाव्या. तर यावरून निघतें, कीं कृत्याचा गणितानुरूप पक्ष सूचनार्थ घेतां येईल; कां कीं, कांहीं कृति अंकगणित रीतिप्रमाणें चालतात असें ह्मणणें, अथवा कृति गणितरूप आहे असें जाणून त्याप्रमाणें चालविणें, हीं दोन्हीं शब्दभेदावांचून सारिखींच आहेत.

१३२ **व्या पृष्ठापावेतों** बीजगणितांतील चिन्हें, जीं अंकगणितरूपाचीं नाहींत, त्यांस **खोट्ये कल्पनेचीं उत्तरें** आहेत असें मानिलें, आणि त्यांशीं काम चालविण्याचा जा रिती, त्यांस **नीट करण्याचा रिती** असें ह्मटलें आहे. १३६ **इत्यादि पृष्ठांत** व्याख्यान सरळ सांगितल्यावरून, हीं चिन्हें येतील असें असून तीं आल्यानंतर त्यांची ओळख पडत्ये, ह्मणून विरुद्ध अथवा खोटा हा शब्द त्यांस लागू होत नाहीं, याविषयीं विचार करण्याची जी पहिली रीति आहे ती शिकणारानें सोडून देऊं नये, परंतु १२२,१२३ **आदि पृष्ठांवरचे** रितीप्रमाणें काम

करत्येसमयीं शिकणारानें निरंतर मनांत ठेवावें, कीं पूर्वींचे कृतीचा या रितीशीं जो संबंध आहे त्याची पक्की माहित आहे ; यापुढें दोनहि रिती कामांत घेतल्या जातील, परंतु मनांत ही गोष्ट धरली पाहिजे, कीं पहिली रीति कामांत घेतली असतां, दुसऱ्ये कृतीसाठीं जो विस्तार पाहिजे, तो क्षणमात्र सोडावा.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों. $\overline{\text{अ}}$ आणि $-$ अ अशी तऱ्हेचीं चिन्हें भेद न ठेवितां कामांत घेतलीं आहेत, परंतु स्मरण ठेविलें पाहिजे कीं कृति करितानां तीं एकच अर्थाचीं आहेत, परंतु विचार करितानां तीं चिन्हें दोन निरनिराळ्ये रितींवर लागतात.

$\overline{\text{८}}\times\text{४}\div\overline{\text{३}} = \text{१०}\frac{\text{२}}{\text{३}}$ $\qquad$ $\overline{\text{८}}\times\overline{\text{४}}\div\overline{\text{३}} = -\text{१०}\frac{\text{२}}{\text{३}}$ अथवा $\overline{\text{१०}\frac{\text{२}}{\text{३}}}$

$\overline{\text{६}}+\overline{\text{४}}-\text{१२} = \text{२}$ $\qquad$ $(-\text{६})+(-\text{८})+(-\text{१३}) = -\text{२७}$

$\frac{\overline{\text{अ}}\overline{\text{ब}}+\text{क}\overline{\text{ड}}}{\overline{\text{म}}} = \frac{\text{कड}-\text{अब}}{\text{म}}$ $\qquad$ $\frac{(-\text{अ})\times(-\text{ब})\times\text{क}}{-\text{ड}} = -\frac{\text{अबक}}{\text{ड}}$

$\frac{\text{अ}-\overline{\text{ब}}}{\text{अ}+\overline{\text{ब}}}\times\overline{\text{क}} = \frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{ब}-\text{अ}}\text{क}$ $\qquad$ $\frac{-\text{अ}-(-\text{ब})}{\text{अ}+(-\text{ब})} = -\text{१}$

$\text{अ}\overline{\text{ब}}-\text{ब}\overline{\text{अ}} = \text{०}$ $\qquad$ $\text{अ}(-\text{ब})+\text{ब}(-\text{अ}) = -\text{२अब}$

$\text{अ}\overline{\text{ब}}\text{क} = \overline{\text{अ}}\text{बक} = \text{अब}\overline{\text{क}} = \overline{\text{अ}}\overline{\text{ब}}\overline{\text{क}} = -\text{अबक}$

तिसरा अध्याय.

एकापेक्षां अधिक अव्यक्त परिमाणें आहेत, अशा एकवर्ण समीकरणांविषयीं.

या पुढीलप्रमाणें एक समीकरण आहे,

$$क्ष + य = १२$$

जा कृत्यांत क्ष आणि य अशीं दोन अव्यक्त परिमाणें असतात, त्यापासून वरचें समीकरण झालें आहे, अशी कल्पना कर. हें पुढील कृत्य त्यासारिखें आहे;

अ क ब

कृत्य. एका सरळ रेषेंत अ बिंदू दिला आहे, आणि त्याच रेषेंत ब आणि क असे दुसरे दोन बिंदु आहेत. अ पासून ब आणि क यांचामध्यापावेतों ६ फुटी आहेत. तेव्हां ब आणि क हे अ पासून किती लांब आहेत?

ब आणि क हे दोन्हीं अचे एक्याच बाजूकडे आहेत, हा मुख्य पक्ष आहे असें मान. अब = क्षफुटी, अक = यफुटी असें घे; तर बक = क्ष – य, आणि ब पासून ब आणि क यांचे मध्यापावेतों $\frac{१}{२}$ (क्ष – य) आहे; यामुळें अ पासून त्या मध्यबिंदू पावेतों लांबी याप्रमाणें आहे,

$$क्ष - \frac{१}{२}(क्ष - य) \text{ हे संकेताप्रमाणें } = ६$$

(x)२ $$२क्ष - (क्ष - य) = १२ \text{ अथवा } क्ष + य = १२$$

यास **अनियत** कृत्य ह्मणतात, ह्मणजे, त्याचें अनंत तऱ्हेनें उलगडणें होतें. क्ष आणि य यांविषयीं इतका मात्र संकेत सांगीतला कीं त्यांची बेरीज १२ असावी, ह्मणून हा संकेत अनंत तऱ्हांनीं स्थापिला जातो; कां कीं हे सगळे पुढील पक्ष हें उदाहरण उलगडण्याचे आहेत, आणि इच्छेप्रमाणें दुसरेहि नवे करितां येतील.

क्ष = १	य = ११	क्ष = $\frac{१}{२}$	य = ११$\frac{१}{२}$
क्ष = २	य = १०	क्ष = २$\frac{१}{४}$	य = ९$\frac{३}{४}$
क्ष = ३	य = ९	क्ष = ३$\frac{२}{५}$	य = ८$\frac{३}{५}$
इत्यादि.		इत्यादि.	

पुनः जेव्हां क्ष आणि य यांतून एक ऋण असेल, तर या पुढील-प्रमाणें उलगडणें होईल.

क्ष = −१	य = +१३	क्ष = १५	य = −३
क्ष = −२	य = +१४	क्ष = १६	य = −४
क्ष = −१$\frac{१}{२}$	य = +१३$\frac{१}{२}$	क्ष = १२$\frac{३}{५}$	य = −$\frac{३}{५}$
इत्यादि.		इत्यादि.	

जेव्हां ब मात्र अचे डाव्ये बाजूस आहे तेव्हां वरचे डाव्ये बाजूचीं उदाहरणें, ६८ पासून ७९ पृष्ठांपर्यंत जा गोष्टी सांगीतल्या आहेत त्यांशीं मिळतीं आहेत; आणि जेव्हां क मात्र अचे डाव्येकडे आहे, तेव्हां उजव्ये बाजूचीं उदाहरणें त्यांशीं मिळतीं आहेत. जसें, जर ब १ फुट अचे डाव्येकडे आणि क १३ फुटी उजव्येकडे असेल, तर क आणि ब यांचा मध्यबिंदू अपासून ६ फुटी उजव्येकडे आहे. पहा कीं जर मध्यबिंदू अचे डाव्येकडे येतो, असे पक्ष क्ष+य=१२ या एकवर्ण समीकरणांत येऊं शकत नाहीं; कां कीं कृत्यांतील दिलेला ६ हा अंक, अंकगणितरूप अथवा धन बीजरूप आहे असें जाणून, त्यांशीं सर्व कृती झाल्या, ह्मणून जा पक्षांत ६ यांणी दाखविलेली रेघ अशे तऱ्हेनें

मोजली असतां, कीं तिचें चिन्ह ऋण असतें, असे पक्ष त्या ६ पासून झालेल्या समीकरणांत आणववत नाहींत.*

वरचे आणि त्यासारिखेच पक्षांपासून हीं पुढील मूळ कारणें काढिलीं आहेत.

१. ज्या एका समीकरणांत दोन अव्यक्त पदें आहेत, तें समीकरण उलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत; ह्मणोन त्या दोन अव्यक्त परिमाणांतून एकाची किंमत इच्छेप्रमाणें घेऊन, दुसऱ्याला योग्य किंमत दिली असतां, समीकरण स्थापिलें जाईल.

२. ज्या कृत्यापासून अशे तऱ्हेचें समीकरण होतें तें कृत्य अनियत आहे, अथवा त्याचा उलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत.

आतां दोन समीकरणें मनांत घे, अशीं कीं प्रत्येकामध्यें सारिखींच दोन अव्यक्त परिमाणें येतील. उदाहरण,

$$क्ष+य=१२ \qquad ३क्ष-२य=३१$$

या दोहोंतून एक एक निरनिराळें घेतलें असतां, प्रत्येकाचें उलगडणें करण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत. असें पुढील प्रमाणें.

पहिल्या समीकरणाचीं उलगडणीं		दुसऱ्या समीकराचीं उलगडणीं	
$क्ष=१०$	$य=२$	$क्ष=१०$	$य=-\frac{१}{२}$
$क्ष=१०\frac{१}{२}$	$य=१\frac{१}{२}$	$क्ष=१०\frac{१}{२}$	$य=\frac{१}{४}$
$क्ष=११$	$य=१$	$क्ष=११$	$य=१$
$क्ष=११\frac{१}{४}$	$य=\frac{३}{४}$	$क्ष=११\frac{१}{४}$	$य=\frac{११}{८}$
इत्यादि.		इत्यादि.	

* कृत्य पुनः वाचून, विचार केला असतां, हें पहाण्यांत येतें, कीं ६ फुटी अचे उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगीतलें नाहीं, अथवा असें असेल, कीं ११७ पृष्ठावर सांगीतल्याप्रमाणें त्यांत

वरचा दोहों ओळींचे समीकरणांमध्यें क्षचा किमती एकसारिख्याच घेतल्या आहेत; आणि असें कळतें, कीं बहुतकरून, य चा किमती निरनिराळ्या आहेत, परंतु एक विशेष पक्षांत यचा किमती एकसारिख्याच आहेत; ह्मणजे, क्ष=११, आणि य=१ अशा किमती सांपडतात, त्या किमतींनी दोन्हीं समीकरणें स्थापिलीं जातात. तर आतां हाच विचार केला पाहिजे, कीं पहिलें अथवा दुसरें समीकरण स्थापणाऱ्या अनंत किमतींतून, तीं दोन्हीं समीकरणें स्थापणाऱ्या अशा किमती किती आहेत ? तर अशी किंमत एकच आहे, असें या पुढील कृतीवरून कळेल.

जर क्ष+य=१२, तर क्ष=१२−य. क्षचीही किंमत दुसऱ्ये समीकरणांत मांड, असें करायास शक्य, कां कीं दुसऱ्या समीकरणाचीं जीं उलगडणीं सांपडायाची इच्छा आहे तीं आणि पहिल्ये समीकरणाचीं उलगडणीं एकच आहेत, आणि अशानें निघतें कीं ३(१२−य)−२य =३१, अथवा ३६−५य=३१, अथवा य=१. यावरून दिसतें, कीं जर क्ष+य=१२ असें आहे, तर य=१ आणि क्ष=११ असें असल्या शिवाय, हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत असें त्यांचे दुसऱ्ये कोणत्येही किमतींनीं स्थापिलें जात नाहीं.

या पुढीलप्रमाणें समीकरणें सांगीतलीं आहेत असें मनांत आण.

अक्ष+बय = क   पक्ष+कय = र

यांत अ, ब, क, प, क, आणि र हीं व्यक्त परिमाणें आहेत असें मान.

पहिली रीति. अव्यक्त पदांतील एकाची किंमत एक समीकरणावरून काढ, आणि ती किंमत दुसऱ्या समीकरणांत त्याचे जागीं मांड.

दोन निरनिराळीं कृत्यें असतील, अथवा १४४ आणि १४५ पृष्ठांवर सांगीतल्याप्रमाणें तीं दोन कृत्यें एक्या दोनवर्ण समीकरणाने दर्शिवलीं जावीं, या सर्व गोष्टी सांगितल्या नाहींत ह्मणून कृत्य उघडें दाखविलें गेलें नाहीं. जो शिकणारा हे दोन पक्ष एक्या समीकरणांत आणायास इच्छील, त्यासाठीं हें समीकरण मांडून दाखविलें आहे,

क्षक्ष + यय +२ क्षय = १४४

तसें केल्यानें जें समीकरण होतें त्यांत एकच अव्यक्त परिमाण राहील.

वरचा पहिल्या समीकरणापासून,

$$क्ष = \frac{क - बय}{अ}$$

ही किंमत क्षचे जागीं दुसऱ्या समीकरणांत मांडिली असतां, हेंच होईल.

$$\frac{पक - पबय}{अ} + कय = र \text{ अथवा } य = \frac{अर - कप}{अक - बप}$$

क्षची किंमत काढायासाठीं, पहिल्या समीकरणांतून यची किंमत काढ, आणि वरची कृति फिरून कर, त्यावरून

$$य = \frac{क - अक्ष}{ब}, \text{ तर } पक्ष + \frac{कक - कअक्ष}{ब} = र,\ क्ष = \frac{कक - बर}{अक - बप}$$

अथवा जी यची किंमत पहिली सांपडली, ती पूर्वींचे पद्धतींत क्षचे जागीं मांड; याप्रमाणें,

$$क्ष = \frac{क - बय}{अ}, \qquad बय = \frac{बअर - बकप}{अक - बप}$$

$$क - बय = \frac{कअक - कबप - (बअर - बकप)}{अक - बप} = \frac{कअक - बअर}{अक - बप}$$

$$= \frac{अ(कक - बर)}{अक - बप} \therefore क्ष \text{ अथवा } \frac{क - बय}{अ} = \frac{कक - बर}{अक - बप}$$

ताळा. जर $क्ष = \frac{कक - बर}{अक - बप}$, आणि $य = \frac{अर - कप}{अक - बप}$

$$\text{तर} \quad अक्ष + बय = \frac{अकक - अबर}{अक - बप} + \frac{अबर - बकप}{अक - बप}$$

$$= \frac{अकक - बकप}{अक - बप} = \frac{क(अक - बप)}{अक - बप} = क$$

$$पक्ष + कय = \frac{कपक - बपर}{अक - बप} + \frac{अकर - कपक}{अक - बप} = र$$

दुसरी रीति. दोहों समीकरणांस अशा रितीनें गुण, कीं जा पदां-

मध्यें सारिखीं अव्यक्त परिमाणें आहेत, त्यांस एकसारिखेच गुणकांक होतील; नंतर सारिखीं पदें नाहींशीं व्हावयासाठीं गुणाकारांची मिळवणी अथवा वजाबाकी कर. बहुतकरून, हीच सरळ रीति आहे; जा परिमाणाची दुसऱ्या समीकरणांत गरज नाहीं त्याचे गुणकानें प्रत्येक समीकरण गुण.

यची किंमत काढायाची.

$$\text{अक्ष}+\text{बय} = \text{क} \qquad (\times)\,\text{प} \qquad \text{पअक्ष}+\text{पबय} = \text{पक}$$

$$\text{पक्ष}+\text{कय} = \text{र} \qquad (\times)\,\text{अ} \qquad \text{पअक्ष}+\text{कअय} = \text{अर}$$

$$(-) \qquad \text{अकय}-\text{बपय} = \text{अर}-\text{कप}$$

$$(\div)\,\overline{\text{अक}-\text{बप}} \qquad \text{य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

क्षची किंमत काढायाची.

$$\text{अक्ष}+\text{बय} = \text{क} \qquad (\times)\,\text{क} \qquad \text{अकक्ष}+\text{बकय} = \text{कक}$$

$$\text{पक्ष}+\text{कय} = \text{र} \qquad (\times)\,\text{ब} \qquad \text{बपक्ष}+\text{बकय} = \text{बर}$$

$$(-) \qquad \text{अकक्ष}-\text{बपक्ष} = \text{कक}-\text{बर}$$

$$(\div)\,\overline{\text{अक}-\text{बप}} \qquad \text{क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

तिसरी रीति. प्रत्येक समीकरणापासून एक अव्यक्त परिमाणाची किंमत काढ, आणि या काढिलेल्या किंमती बरोबरीस मांड.

पहिल्या समीकरणापासून $\text{य} = \frac{\text{क}-\text{अक्ष}}{\text{ब}}$ $\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{बय}}{\text{अ}}$

दुसऱ्या समीकरणापासून $\text{य} = \frac{\text{र}-\text{पक्ष}}{\text{क}}$ $\text{क्ष} = \frac{\text{र}-\text{कय}}{\text{प}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{क}-\text{अक्ष}}{\text{ब}} = \frac{\text{र}-\text{पक्ष}}{\text{क}} \qquad \text{क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

$$\frac{\text{क}-\text{बय}}{\text{अ}} = \frac{\text{र}-\text{कय}}{\text{प}} \qquad \text{य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

आतां पुढील समीकरणें वरचे तीन रितींनीं शिकणारानें पुनःपुनः उलगडावीं १०६ पृष्ठ पाहा.

अक्ष+बय=क }
अ′क्ष+ब′य=क′ } यांपासून { क्ष = $\frac{\text{कब′−बक′}}{\text{अब′−बअ′}}$; य = $\frac{\text{अक′−कअ′}}{\text{अब′−बअ′}}$

(१.) ३क्ष−२य = १४   (×)२ ६क्ष−४य = २८
२क्ष+३य = १००   (×)३ ६क्ष+९य = ३००
(−) १३य = २७२   य = २०$\frac{१२}{१३}$
(×)३ ९क्ष−६य = ४२   (×)२ ४क्ष+६य = २००
(+) १३क्ष = २४२   क्ष = १८$\frac{८}{१३}$

(२.) क्ष+य = अ   क्ष−य = ब
(+) २क्ष = अ+ब   क्ष = $\frac{\text{अ+ब}}{२}$
(−) २य = अ−ब   य = $\frac{\text{अ−ब}}{२}$

(३.) पक्ष+य = १   क्ष−पय = २

पहिलें,   पक्ष+य = १
दुसरें, (×)प   पक्ष−पपय = २प
(−)   य+पपय = १−२प   य = $\frac{\text{१−२प}}{\text{१+पप}}$
१−य = $\frac{\text{पप+२प}}{\text{१+पप}}$ क्ष = $\frac{\text{१−य}}{\text{प}}$ = $\frac{\text{प+२}}{\text{१+पप}}$

(४.) ३क्ष−७ = ४+(क्ष+य)   अथवा २क्ष−य = ११
२य+७९ = ५क्ष   अथवा ५क्ष−२य = ७९
पहिल्याला, (×)५   १०क्ष−५य = ५५
दुसऱ्याला, (×)२   १०क्ष−४य = १५८
(−)   य = १०३
पहिल्यापासून, क्ष = $\frac{\text{११+य}}{२}$ = ५७

(५.) ३क्ष+४य = १२   ४क्ष+५य = १०
(×)४ १२क्ष+१६य = ५२ (×)३ १२क्ष+१५य = ३०
(−) य = ५२−३० = २२
(×)५ १५क्ष+२०य = ६५ (×)४ १६क्ष+२०य = ४०
(−) क्ष = ४०−६५ = −२५

जा कृत्यापासून असें समीकरण झालें त्याशीं पूर्वीं सांगीतल्याप्रमाणें समीकरण फिरवून उत्तर नीट केलें पाहिजे.

$$\left.\begin{array}{l}\text{अक्ष}+\text{बय}=\text{क}\\ \text{पक्ष}+\text{कय}=\text{र}\end{array}\right\}\text{ अशीं दिलीं असतां } \text{क्ष}=\frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}\quad \text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

यांपासून हीं पुढील निघतील ;

$$\left\{\begin{array}{l}\text{अक्ष}-\text{बय}=\text{क}\\ \text{पक्ष}-\text{कय}=\text{र}\end{array}\right.\quad \text{क्ष}=\frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}\quad \left.\text{य}=\frac{\text{कप}-\text{अर}}{\text{अक}-\text{बप}}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{अक्ष}-\text{बय}=\text{क}\\ \text{कय}-\text{पक्ष}=\text{र}\end{array}\right.\quad \text{क्ष}=\frac{\text{कक}+\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}\quad \left.\text{य}=\frac{\text{अर}+\text{कप}}{\text{अक}-\text{बप}}\right\}$$

वरचे पहिले दोन समीकरण समुदाय पाहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं त्यामध्यें हाच भेद आहे, कीं पहिल्यांत+बय+कय यांचे जागीं दुसऱ्यांत−बय−कय आहे. परंतु ११८ व्या पृष्ठावर सांगीतल्या प्रमाणें ठाऊक आहे, कीं $\text{अक्ष}+\bar{\text{ब}}\text{य}$ यास नीट करून मांडिलें असतां, त्यांचें रूप अक्ष−बय आहे, आणि $\text{पक्ष}+\bar{\text{क}}\text{य}$ यांस नीट करून मांडिल्यानें त्यांचें रूप पक्ष−कय आहे; आणि वर सिद्ध झालें कीं नीट करणें कृतीचा हव्ये त्या पायरीपर्यंत ठेवितां येईल, तर हीं पुढील उलगडणीं कामांत घ्यावीं.

$$\begin{array}{l}\text{अक्ष}+\bar{\text{ब}}\text{य}=\text{क}\\ \text{पक्ष}+\bar{\text{क}}\text{य}=\text{र}\end{array}\quad \text{क्ष}=\frac{\text{क}\bar{\text{क}}-\bar{\text{ब}}\text{र}}{\text{अ}\bar{\text{क}}-\bar{\text{ब}}\text{प}}\quad \text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अ}\bar{\text{क}}-\bar{\text{ब}}\text{प}}$$

असें घेतल्यानें समजांत येईल, कीं नीट केलेलीं उलगडणीं नीट केलेल्या समीकरणाचीं खरीं उत्तरें आहेत. असें केलें तर वरप्रमाणें उत्तरें निघतील; कारण कीं १२८ व्या पृष्ठावरचे रितीप्रमाणें क्षची किंमत नीट केली असतां, याप्रमाणें होईल.

$$क्ष=\frac{-कक+बर}{-अक+बप} \text{ अथवा } \frac{बर-कक}{बप-अक} \text{ अथवा } \frac{कक-बर}{अक-बप}$$ १४२ वें पृष्ठ पहा.

आणि य विषयीं अशी कृति केली पाहिजे.* याच रितीप्रमाणें, अक्ष+बय+कज्ञ, अशा पद्धती पासून जें उत्तर निघेल, त्यापासून अक्ष−बय−कज्ञ, अथवा कज्ञ+बय−अक्ष, अथवा चिन्हांचे भेदाने झालेल्या पद्धतीचीं उत्तरें मिळतील. आतां वेगवेगळाले पक्ष निघतील, ते, आणि त्यांतून सर्वांचा दर्शक जो ठरविला, त्यास ते पक्ष जोडून पहाण्याची रीति, या दोन गोष्टी खालीं लिहितों.

या पद्धती	याप्रमाणें	अथवा याप्रमाणें मांडितां येतील.
अक्ष+बय −कज्ञ	अक्ष+बय+कॆज्ञ	अक्ष+बय+कज्ञे
अक्ष−बय −कज्ञ	अक्ष+बॆय+कॆज्ञ	अक्ष+बय+कज्ञ इत्यादि.
बय −अक्ष−कज्ञ	अॆक्ष+बय+कॆज्ञ	अॆक्ष+बय+कज्ञे इत्यादि.
इत्यादि.	इत्यादि.	इत्यादि.

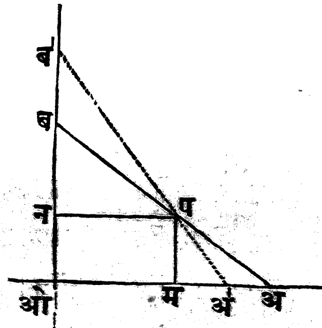
सर्वांचे दर्शकाविषयीं दुसरा कांहीं पक्ष घेतां येईल; जसें, अक्ष−बय−कज्ञ असें असेल, तर अक्ष+बय+कज्ञ ही पद्धती अक्ष−बॆय−कॆज्ञ याप्रमाणें मांडावी.

कृत्य. सरळ रेघांचे छेदनाविषयीं.

* शिकणारानें, पुस्तकांत उदाहरणें दिलीं आहेत. त्याशिवाय दुसरीं उदाहरणें काढून उलगडून पहावीं.

मूळकारण. **बओअ** कांहीं कोन असावा, एथें काटकोन घे, आणि जा रेघांत तो कोन येतो, त्या रेघांस **अब** स्थळावर छेदून **अब** सरळ रेघ कर, **अब** रेघेवर कोठेही **प** बिंदू पासून **पन** रेघ, **ओअ**शीं समांतर आणि **पम** रेघ **ओब**शीं समांतर, अशा दोन रेघा केल्या असतील, आणि **ओअ**, **ओब**, **पम**, **पन**, ह्या सर्व एक जातीचे एकमानें मोजल्या तर, **पम**, ह्मणजे केवळ ती रेघ नव्हे, परंतु त्यांत जितके एकम असतील, ते समजून, **पम** आणि **ओअ** यांचा गुणाकार **पन** आणि **ओब** यांचे गुणाकाराशीं मिळविला असतां, त्या दोहोंची बेरीज **ओअ** आणि **ओब** यांचे गुणाकाराचे बरोबर होईल, ही गोष्ट भूमितीमध्यें सिद्ध केली आहे.

अथवा **पम×ओअ+पन×ओब=ओअ×ओब.**



अब आणि **अ'ब'** अशा दोन रेघा **प** बिंदूवर **बओअ** या कोनांत परस्परांस छेदित, अशा असाव्या; **ओअ**, **ओब**, **ओअ'**, आणि **ओब'**, हे दिले आहेत, तर **पन** आणि **पम** यांची किंमत काय.

आतां

ओअ = १०एकं **ओअ'** = ७एकं

ओब = ८ .. **ओब'** = १५ ..

पन = क्ष एकं

पम = य ..

तर, वरचे मूळकारणाप्रमाणें असें असावें **प** बिंदू **अब** रेघेवर आहे, ह्मणून,

ओअ×पम+ओब×पन = ओअ×ओब अथवा १०य+८क्ष = ८०

पुनः त्याच कारणावरून, **प** बिंदू **अ॑ब॑** रेघेवरच आहे, ह्मणून,

ओअ॑×पम+ओब॑×पन = ओअ॑×ओब॑ अथवा ७य+१५क्ष = १०५

एथें दोन समीकरणें आहेत, तीं य आणि क्ष यांणीं स्थापिलीं पाहिजेत. वरचे कोणत्येहि रितीनें यांस उलगडलें असतां, याप्रमाणें निघेल.

क्ष अथवा **पन** = ५$\frac{१०}{४७}$ एकं; य अथवा, **पम** = ३$\frac{३९}{४७}$ एकं

सामान्य पक्ष. याप्रमाणें असावें.

ओअ = अ एकं **ओअ॑** = अ॑ एकं

ओब = ब · · **ओब॑** = ब॑ · ·

पन = क्ष एकं

पम = य · ·

१५१ आणि १५२ व्या पृष्ठावरचे, दुसऱ्ये रितीप्रमाणें, यापासून झालेलीं समीकरणें उलगडलीं असतां, याप्रमाणें होईल,

$$\text{बय}+\text{अक्ष} = \text{अब}$$

$$\text{ब॑य}+\text{अ॑क्ष} = \text{अ॑ब॑}$$

अ॑बय+अ॑बक्ष = अअ॑ब अब॑य+बब॑क्ष = अबब॑

अअ॑य+अब॑क्ष = अअ॑ब॑ अ॑बय+बब॑क्ष = अ॑बब॑

(अ॑ब−अब॑)क्ष = अअ॑(ब−ब॑) (अ॑ब−अब॑)य= बब॑(अ॑−अ)

$$\text{क्ष} = \text{अअ॑}\frac{\text{ब}-\text{ब॑}}{\text{अ॑ब}-\text{अब॑}} \qquad \text{य} = \text{बब॑}\frac{\text{अ॑}-\text{अ}}{\text{अ॑ब}-\text{अब॑}}$$

ताळा.

$$\text{अय}+\text{बक्ष} = \text{अबब}'\frac{\text{अ}'-\text{अ}}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \text{अबअ}'\frac{\text{ब}-\text{ब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}$$

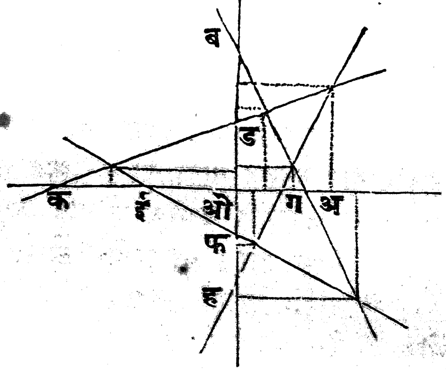
$$= \text{अब}\left\{\frac{\text{अ}'\text{ब}'-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अ}'\text{ब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}\right\}$$

$$= \text{अब}\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} = \text{अब}$$

$$\text{अ}'\text{य}+\text{ब}'\text{क्ष} = \text{अ}'\text{बब}'\frac{\text{अ}'-\text{अ}}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \text{अअ}'\text{ब}'\frac{\text{ब}-\text{ब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}$$

$$= \text{अ}'\text{ब}'\left\{\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \frac{\text{अब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}\right\}$$

$$= \text{अ}'\text{ब}'\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} = \text{अ}'\text{ब}'$$



वरचे आकृतीमध्यें अब, कड, इफ, आणि गह, ह्या चार रेषा आहेत, त्या आंसांस* जितक्या प्रकारांनी छेदूं शकवेल तितक्या प्रकारांनीं छेदितात, ह्मणजे ओअ आणि ओब या दोहोंस त्यांतल्या कोणत्याहि दोन रेषा ओचे एक्ये बाजूस छेदीत नाहींत. यामुळें आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें साहा छेदन बिंदू आहेत, आणि त्यांपासून ओअ आणि ओब या आंसावर लंब रेषा आकृतींत दाखविल्या आहेत; परंतु त्यां-

* ओअ आणि ओब या मुख्य रेषा, जांत वर सांगितलेला कोन येतो, त्या रेषा दोहोंकडे वाढविल्या असतात, त्या रेषांस आंस ह्मणतात.

जवर कांहीं अक्षरें लिहिलीं नाहींत, कां कीं जा छेदन बिंदूविषयीं विचार करायाचा, त्यास्थळीं **प** हें अक्षर मांडिलें आहे असें मनांत आणावें, आणि त्या बिंदूपासून आंसावर जे लंब आहेत, ते आकृतीप्रमाणें **पम** आणि **पन** आहेत असें समजावें.

जा अंतरावर त्या चार रेघा आंसांस छेदितात तीं अंतरें एकच जातीचे एकंमाचीं असावीं; ह्मणून

ओअ=३	**ओक** = ८	**ओई** = ४	**ओग** = २
ओब=६	**ओड** = ३	**ओफ** = २	**ओह** = ४

अब आणि **कड** यांचे छेदन बिंदूचा पहिल्यानें विचार कर, छेदन स्थळीं **प** मांड आणि पहिल्ये आकृतीप्रमाणें, **पम**=य आणि **पन**=क्ष घे. तर आरंभीं सांगितल्या मूळ कारणाप्रमाणें **प** बिंदू **अब** रेघेवर आहे,

$$३य+६क्ष=१८$$

परंतु **कड** रेघेकडे लक्ष्य दिलें असतां, दिसण्यांत येतें, कीं पहिल्यानें तें मूळकारण तिजवर नीट लागत नाहीं कां कीं **कड** रेघ **बओअ** कोनांत नाहीं, परंतु त्याचा जवळचा **बओक** कोनांत आहे. दुसऱ्यानें, **ओक** रेघ ८ एकं लांबीची, **ओअ** या दिशेस मोजलेली नाहीं, परंतु उलट्ये दिशेस मोजली आहे. यामुळें, जर ८ यांचे जागीं $\bar{८}$ असें मांडिलें, आणि **ओक** ही रेघ अकडे मोजली आहे असें मानून जें समीकरण येतें, तसें $\bar{८}$ या रूपापासूनहि येतें, त्यास, **१४५ व्या पृष्ठाप्रमाणें** नीट केल्यानें, पुढें कृति चालवायास दुसरें समीकरण मिळेल. ह्मणजे **प** बिंदू **कड** रेघेवर आहे, यामुळें याप्रमाणें होईल,

$\bar{८}$य+३क्ष=$\bar{८}$×३, अथवा **१४५ पृष्ठाप्रमाणें**, −८य+३क्ष=$\overline{२४}$=−२४

अथवा ८य−३क्ष=२४

३क्ष−८य=−२४ हें दाखवितें, कीं ८य हे ३क्ष पेक्षां २४ इतक्यानें अधिक आहेत, यामुळें ८य−३क्ष=२४ याप्रमाणें मांडि

वर निघालेलीं दोन समीकरणें उलगडून

३य+६क्ष = १८
८य−३क्ष = २४ } यापासून हेंच होईल { क्ष = १ $\frac{५}{१९}$
य = ३ $\frac{९}{१९}$

याचा, आणि पुढील उत्तराचा ताळा, आकृती मोजल्यानें, आणि समीकरणावरूनही कळेल.

यांतल्या प्रत्येक पक्षाला ही रीति लागू करायासाठीं, जा रेघा **ओअ** किंवा **ओब** यांचे दिशेस येत नाहींत, त्या सर्वांस ऋण चिन्हानें दर्शविल्या पाहिजेत. ह्मणजे,

ओअ = ३ **ओक** = $\overline{८}$ **ओई** = $\overline{४}$ **ओग** = २
ओब = ६ **ओड** = ३ **ओफ** = $\overline{२}$ **ओह** = $\overline{४}$

मागल्या शेवटील पक्षाप्रमाणें यांशीं कृति केली असतां, हें पुढीलप्रमाणें निघेल;*

रेघांचें छेदणें.	समीकरणें.	नीट केलेलीं समीकरणें.
१. **अब** आणि **कड**	३य+६क्ष = १८ $\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$	३य+६क्ष = १८ ८य−३क्ष = २४
२. **अब** आणि **ईफ**	३य+६क्ष = १८ $\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}\times\overline{२}$	३य+६क्ष = १८ ४य+२क्ष = −८
३. **अब** आणि **गह**	३य+६क्ष = १८ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	३य+६क्ष = १८ २य−४क्ष = −८
४. **कड** आणि **ईफ**	$\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$ $\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}\times\overline{२}$	८य−३क्ष = २४ ४य+२क्ष = −८
५. **कड** आणि **गह**	$\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	८य−३क्ष = २४ २य−४क्ष = −८
६. **ईफ** आणि **गह**	$\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}\times\overline{२}$ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	४य+२क्ष = −८ २य−४क्ष = −८

या नीट केलेल्या समीकरणांतून कित्येक अंकगणित रूपानें खरीं नाहींत; जसें, ४य+२क्ष=−८. परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं **पम**

* बांकडे वा[illegible]

ह्मणजे **य** आणि **पन** ह्मणजे **क्ष** अशा दिशेस मोजले आहेत, कीं **प** बिंदू **अओब** या कोनांत येईल, अशे कल्पनेनें हें समीकरण केलें, परंतु कदाचित् असा पक्ष नसेल. तथापि, १५१ आणि १५२ **व्या पृष्ठां-वरची** दुसरी रीति त्यास लावून, त्यांचीं उलगडणीं होतील; हें दाखविण्यासाठीं वरचे दुसरे पक्षाचें उदाहरण विस्तारानें देतों.

$$३य+६क्ष=१८$$

$$४य+२क्ष=-८$$

दुसरें समीकरण ३ नीं गुण

$$१२य+६क्ष = -८\times३ \text{ अथवा } १२य+६क्ष=-२४$$

हें पहिल्यांतून वजा करून, हें होतें

$$(३-१२)\ य=१८-(-२४)=१८+२४=४२$$

$$य=\frac{४२}{३-१२}=\frac{४२}{-९}=-\frac{४२}{९}=-४\frac{२}{३}$$

पहिल्या समीकरणापासून

$$क्ष=\frac{१८-३य}{६}=\frac{१८-३(-४\frac{२}{३})}{६}=\frac{१८+१४}{६}=५\frac{१}{३}$$

अब आणि **ईफ** यांचे छेदनस्थळीं **प** बिंदू मांडिला असतां, पहाण्यांत येतें कीं कल्पनेचे **उलट्ये** दिशेस **पम** ह्मणजे **य** मोजिला आहे, आणि **पन** ह्मणजे **क्ष** पहिल्येच प्रमाणें मोजिला आहे, असें पहिल्याचें ऋणचिन्ह, आणि दुसऱ्याचें धनचिन्ह, यांवरून कळेल.

याचप्रमाणें चाललें असतां, सर्व सहा पक्षांतील **क्ष** आणि **य** यांचा किमती या पुढीलप्रमाणें निघतील.

रेघांचें छेदणें, क्ष ह्मणजे **पन** याची किंमत. य ह्मणजे **पम** याची किंमत.

१. अब आणि कड	$१\frac{५}{१९}$	$३\frac{९}{१९}$
२. अब आणि ईफ	$५\frac{१}{३}$	$-४\frac{२}{३}$
३. अब आणि गह	$२\frac{१}{२}$	१
४. कड आणि ईफ	$-५\frac{५}{७}$	$\frac{६}{७}$
५. कड आणि गह	$४\frac{४}{१३}$	$४\frac{८}{१३}$
६. ईफ आणि गह	$\frac{४}{५}$	$-२\frac{२}{५}$

लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं $-१\frac{१}{२}$ असें पद आलें, तर, − चिन्ह या सर्व पदांस लागतें; ह्मणजे $-(१+\frac{१}{२})$ असें नाहीं, परंतु $-(१+\frac{१}{२})$ अथवा $-१-\frac{१}{२}$ याप्रमाणें आहे.

चांगली केलेल्या आकृतीवरून, सहा रेघा तपासिल्या असतां, पहाण्यांत येईल कीं जेव्हां उत्तर ऋण आहे, तेव्हां आरंभीं जी कल्पना केली तिचे उलट्या दिशेस मोजलें आहे.

समीकरणाचीं नीट करणीं कृतीचे शेवटा पावेतों, या पुढीलप्रमाणें स्तब्ध ठेवितां येतील;

१५७ व्या पृष्ठावर हीं समीकरणें आहेत.

$$अय+बक्ष=अब \qquad अ'य+ब'क्ष=अ'ब'$$

यांस उलगडल्यानें

$$क्ष=अअ'\frac{ब-ब'}{अ'ब-अब'} \qquad य=बब'\frac{अ'-अ}{अ'ब-अब'}$$

हे दोन समीकरणसमुदाय घे, यांत दुसरा समुदाय वरचा सहाव्या उदाहरणाप्रमाणें आहे,

$$अय+बक्ष=अब \qquad \bar{४}य+\bar{२}क्ष=\bar{४}\times\bar{२}$$

$$अ'य+ब'क्ष=अ'ब' \qquad २य+\bar{४}क्ष=२\times\bar{४}$$

हीं दोन्हीं परस्परांस मिळतील, जर

$$\text{अ} = \bar{४} \qquad \text{ब} = \bar{२} \qquad \text{अ}' = २ \qquad \text{ब}' = \bar{४}$$

या किमती क्ष आणि य यांचे स्थळीं मांडिल्यानें, याप्रमाणें होईल

$$\text{क्ष} = \bar{४}\times२\times\frac{\bar{२}-\bar{४}}{२\times\bar{२}-\bar{४}\times\bar{४}} = (-८)\times\frac{-२+४}{-४-१६}$$

$$= (-८)\times\left(-\frac{२}{२०}\right) = \frac{१६}{२०} = \frac{४}{५}$$

$$\text{य} = \bar{२}\times\bar{४}\times\frac{२-\bar{४}}{२\times\bar{२}-\bar{४}\times\bar{४}} = ८\times-\frac{६}{२०} = -२\frac{२}{५}$$

हें पूर्वींप्रमाणें आहे. या कृत्याला सोडून, पुढें चालतों.

१४५ पृष्ठावर दाखविलें आहे, कीं दोन अव्यक्त परिमाणांचें एकच समीकरण असेल, तर त्याचीं अनंत उत्तरें निघतील; आणि त्या अव्यक्त पदांचें एकच उत्तर येण्याकरितां, कृत्यांत दुसरें समीकरण दिलें पाहिजे. परंतु या दुसरे समीकरणास पहिल्याचा आधार नसावा, ह्मणजे, तें पहिल्या समीकरणाचा रूपासारिखें होई असें नसावें. उदाहरण. क्ष+य=१२ या समीकरणाचीं उत्तरें अनंत होतात; आणि जर दुसरें समीकरण या पुढिलांतून कोणतेंहि एक असलें, ह्मणजे

$$२\text{क्ष}+२\text{य} = २४ \qquad ३\text{क्ष}+३\text{य} = ३६ \qquad \frac{१}{२}\text{क्ष}+\frac{१}{२}\text{य} = ६$$

$$३\text{क्ष}-१८ = १८-३\text{य} \qquad २\text{क्ष}+\text{य} = २४-\text{य} \text{ इत्यादि.}$$

तरी अनंत उत्तरें निघतील; कां कीं जर क्ष+य=१२, तर आतां वर सांगितलीं सर्व समीकरणें खरीं आहेत. ह्मणजे, वेगळालीं दोन समीकरणें द्यावीं त्या ठिकाणीं एकच समीकरण दोन निरनिराळ्या रूपांनीं दिलें आहे.

एक पक्षीं अनंत उत्तरांचें दर्शक $\frac{०}{०}$ अशे तऱ्हेचें रूप धरितें, ही गोष्ट

८६ आणि ८७ या पृष्ठांवर सांगीतली आहे, आतां तसें एथें घडतें कीं नाहीं हें पहातों.

$$\text{जर} \begin{cases} \text{अक्ष}+\text{बय} = \text{क} \\ \text{पक्ष}+\text{कय} = \text{र} \end{cases} \text{तर क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}} \text{ आणि य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{बप}}$$

आतां दुसऱ्या समीकरणास पहिल्या समीकरणाचा आधार आहे असा पक्ष घेतों.

मनांत आण, कीं

$$\text{प}=\text{मअ} \qquad \text{क}=\text{मब} \qquad \text{र}=\text{मक}$$

असें असतां दुसऱ्या समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होईल,

$$\text{मअक्ष}+\text{मबय}=\text{मक} \qquad (\div)\text{ म} \qquad \text{अक्ष}+\text{बय}=\text{क}$$

हें पहिल्याप्रमाणें आहे. प,क, आणि र, यांचे जागीं त्यांची वरची घेतलेली **किंमत, क्ष आणि य यांचे किंमतींत मांड**

$$\text{क्ष}=\frac{\text{कमब}-\text{बमक}}{\text{अमब}-\text{बमअ}}=\frac{0}{0} \qquad \text{य} = \frac{\text{अमक}-\text{कमअ}}{\text{अमब}-\text{बमअ}}=\frac{0}{0}$$

यापक्षीं **८६ आणि ८७ या पृष्ठांवर** जो उलटाविषय लिहिला तोच अर्थ सुद्धां एथें दिसतो.

जर तीन अव्यक्त परिमाणें असलीं, तर **तीन** निरनिराळीं समीकरणें असावीं; **असें १४५ आणि १४६ पृष्ठांवर** लिहिल्यावरून दाखवितां येईल, जर तीन समीकरणें निरनिराळीं नसलीं, तर कृत्याचीं अनंत उत्तरें येतील. ही गोष्ट दाखवायासाठीं एक उदाहरण घेऊन कृति **करून** दाखवितों.

उदाहरण.

$$२क्ष+४य-३ज्ञ=१० \ldots\ldots (१)$$
$$५क्ष-३य+२ज्ञ=२० \ldots\ldots (२)$$
$$३क्ष+२य+५ज्ञ=५० \ldots\ldots (३)$$

(१) समीकरणाचे दोहों बाजूंस २ नीं गुण, आणि (२) चे दोहों बाजूंस ३ नीं गुण, ह्मणजे दोन्हीं गुणाकारांत ज्ञ चा गुणक सारखा होईल.

समीकरण (१)×२	४क्ष+८य−६ज्ञ = २०
समीकरण (२)×३	१५क्ष−९य+६ज्ञ = ६०
(+)	१९क्ष−य = ८० .....(४)

(२) आणि (३) या समीकरणाशीं तशीच कृति कर.

समीकरण (२)×५	२५क्ष−१५य+१०ज्ञ = १००
समीकरण (३)×२	६क्ष+ ४य+१०ज्ञ = १००
(−)	१९क्ष−१९य = ०

(÷)१९ क्ष−य=० अथवा क्ष=य ..... (५)

(४) आणि (५) हीं दोन समीकरणें अशीं निघालीं, जांत क्ष आणि य मात्र आहेत, परंतु ज्ञ नाहीं हीं उलगडून, हें उत्तर येतें

$$य=\frac{४०}{९} \qquad क्ष=\frac{४०}{९}$$

वर दिलेल्या तीन समीकरणांतून हव्या त्या समीकरणांत या किंमती मांड. जर दुसऱ्या समीकरणांत या किंमती मांडिल्या, तर

$$५\times\frac{४०}{९}-३\times\frac{४०}{९}+२ज्ञ=२० \qquad ज्ञ=\frac{५०}{९}$$

तीन अव्यक्त परिमाणांतून एकच अव्यक्त परिमाण काढायाची एक

फार उपयोगी कृति* आहे. मनांत आण, कीं, वरचा समीकरणांतून ज्ञची मात्र किंमत काढायाची आहे. म आणि न, जांची किंमत माहीत नाहीं, परंतु पुढें सोईप्रमाणें कशेहि तऱ्हेनें त्यांचा किंमती काढितां येतील, अशीं दोन नवीं परिमाणें घे. समीकरणाचा दोन्ही बाजू कांहीं परिमाणानें गुणितां येतात, तर (२) समीकरण मनें आणि (३) रें ननें गुणून दोन गुणाकारांची बेरीज (१) समीकरणास मिळीव, यावरून असें होईल

$$(२+५म+३न)क्ष+(४-३म+२न)य+(२म+५न-३)ज्ञ$$
$$=१०+२०म+५०न \;....\; (अ)$$

म आणि न यांचा किंमती इच्छेप्रमाणें घेतां येतील, आणि जापेक्षां केवळ ज्ञचीच किंमत काढणें आहे, ह्मणून म आणि न हे असे असावे, कीं

$$\left.\begin{array}{lll} २+५म+३न=० & \text{अथवा} & ५म+३न=-२ \\ ४-३म+२न=० & \text{अथवा} & ३म-२न=\;\;४ \end{array}\right\} \text{असें होईल}$$

तर वरचा समीकरणाचीं उत्तरें म आणि न असावीं, जावरून $म=\frac{८}{१९}$, $न=-\frac{२६}{१९}$. परंतु (अ) या समीकरणाचा जा पदांत क्ष आणि य आहेत, तीं पदें, ० ने गुणिलीं असतां, नाहींशीं होतात. यामुळें

$$(२म+५न-३)ज्ञ = १०+२०म+५०न$$

$$ज्ञ=\frac{१०+२०म+५०न}{२म+५न-३}=\frac{१०+२०\times\frac{८}{१९}+५०(-\frac{२६}{१९})}{२\times\frac{८}{१९}+५(-\frac{२६}{१९})-३}$$

या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद १९ नीं गुणून, संक्षेप कर, तर याप्रमाणें होईल

---

* सर्व साधारण पक्षांत किंवा विशेष पक्षांत, कोणत्याहि रितीचें मूळ कारण किंवा कृति यांचा संक्षेप जा रितीनें होईल, त्या रितीला कृति ह्मणतात.

$$ज्ञ = \frac{१०\times१९+२०\times८-५०\times२६}{२\times८-५\times२६-३\times१९} = \frac{-९५०}{-१७१} = \frac{९५०}{१७१} = \frac{५०}{९}$$

उलटेविषय. कृत्यापासून कदाचित् दोन समीकरणें निघतील, जीं परस्परांशीं अगदीं विरुद्ध आहेत, जशीं या पुढीलप्रमाणें;

$क्ष+य = १२$ $\qquad$ $क्ष+य = १३$

अथवा असेंहि घडेल, कीं जर तीन अव्यक्त परिमाणें आणि तीन समीकरणें असतील, तर त्या तिहींतून जरी **दोन** खरीं असतील, तरी तिसरें एक अशक्य असेल. आणि जरी तें अशक्य समीकरण दुसऱ्या दोन समीकरणांतून प्रत्येकाशीं एकटें मिळतें आहे तरी वरची गोष्ट घडती.

उदाहरण,

$क्ष-य=१०$ $\qquad$ $य-ज्ञ=११$ $\qquad$ $क्ष-ज्ञ=१२$

जर $क्ष=२०$ $\quad$ $य=१०$ $\quad$ $ज्ञ=-१$ { तर पहिलें आणि दुसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

जर $क्ष=२०$ $\quad$ $य=१०$ $\quad$ $ज्ञ=८$ { तेव्हां पहिलें आणि तिसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

जर $क्ष=२०$ $\quad$ $य=१९$ $\quad$ $ज्ञ=८$ { तेव्हां दुसरें आणि तिसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

परंतु क्ष, य, आणि ज्ञ, यांस कशीहि किंमत दिली, तरी तिन्हीं समीकरणें बरोबर स्थापिलीं जात नाहींत. ही गोष्ट पहिल्या दोन समीकरणाचे बेरिजेवरून कळेल. कां कीं जर $क्ष-य=१०$, आणि $य-ज्ञ=११$ तर

$$(क्ष-य)+(य-ज्ञ)=२१ \quad \text{अथवा} \quad क्ष-ज्ञ=२१$$

हें उत्तर तिसरे समीकरणाशीं मिळत नाहीं.

१५०व्या पृष्ठावर जी सामान्य उलगडण्याची रीति सांगीतली, ती शिकणारानें तपासून पाहावी, आणि जेव्हां दोन समीकरणें विरुद्ध असतात तेव्हां त्यांतील क्ष आणि य यांचा किंमती **८० पृष्ठावर** सांगीतल्याप्रमाणें अपूर्णांकाचें रूप धरितात ज्याचे छेदस्थळीं ० असतें, असें त्याणें दाखवावें. आणि ज्या कृत्यांपासून विरुद्ध समीकरणें निघतात, त्यांचा अर्थ त्या पृष्ठावरचे $\frac{\text{क}}{0}$ अशे रूपाचे उत्तरापासून जो अर्थ निघाला, तसाच अर्थ या समीकरणाचा होतो, हेंही दाखवितां येईल.

या अध्यायांतील, ज्या दोन समीकरणांविषयीं विचार झाला, त्यांचा जर संक्षेप केल्यानंतर पहिल्या बाजू बरोबर निघतील आणि दुसऱ्या बाजू बरोबर निघत नाहींत, असें नसेल तर तीं समीकरणें कधींही विरुद्ध व्हावयाचीं नाहींत; जसें,

२क्ष+३य=१०   २क्ष+३य=१२

दुसऱ्या समीकरणांतून पहिलें वजा केलें असतां ०=२ असें निघेल, ही अशक्य गोष्ट **८४ पृष्ठावर** अक्ष=अक्ष+क ज्यापासून पहिल्यानें $\frac{\text{क}}{0}$ हें रूप निघालें, त्याचेच जातीची आहे.

चवथा अध्याय.

घात आणि मूळप्रकाशक चिन्हें, आणि बीजानुरूप पद्धतींचा क्रमनियम, यांविषयीं.

एक परिमाण त्याणें तेंच दोन, तीन, किंवा अधिक वेळा गुणायाचें असें वारंवार येतें, ह्मणून तें दाखवायासाठीं कांहीं संक्षेप रीति घ्यावी लागती, ती आतां सांगतों.

क्ष गुणिला क्ष, अथवा क्षक्ष, यास क्षचा द्विघात ह्मणतात.
क्षक्ष . . . . क्ष, अथवा क्षक्षक्ष, यास क्षचा त्रिघात ह्मणतात.
क्षक्षक्ष . . . . क्ष, अथवा क्षक्षक्षक्ष, यास क्षचा चतुर्घात ह्मणतात.

आणि इत्यादि. अथवा क्षनें क्ष न* वेळा गुणिला असतां, त्या गुणाकारास क्षचा नघात ह्मणतात. द्विघात आणि त्रिघात यांस बहुतकरून **वर्ग** आणि **घन** ह्मणतात. जसें, क्षक्ष यास क्षचा वर्ग ह्मणतात, आणि त्यास क्ष **वर्ग** असें ह्मणतात, आणि क्षक्षक्ष यास क्षचा घन ह्मणतात, आणि त्यास क्ष **घन** असें ह्मणतात; आणि कांहीं अंक एकवेळ त्याणें तोच गुणिला तर तो वर्ग झाला असें ह्मणतात; दोन वेळा त्याणें तोच गुणिला असतां त्याला घन असें ह्मणतात, इत्यादि.

विस्तार अर्थानें, नुसत्ये क्षला क्षचा प्रथम घात ह्मणतात.

घाताचा संक्षेप दर्शक या पुढीलप्रमाणें आहे; घातामध्यें जितके वेळा

---

* क्ष नवेळा क्षनें गुणिला असतां, गुणाकार क्षचा न घात होतो, असें नवे शिकणारे बहुतकरून चुकीनें समजतात. परंतु असें नव्हे; कां कीं क्ष एकवेळा क्षनें गुणिला असतां, (क्षक्ष) आहे, ह्मणजे हा क्षचा द्विघात आहे; ह्मणून क्ष हा नवेळा क्षनें गुणिला असतां, (न+१) घात होतो.

अक्षर येतें तो वेळांक, जा अक्षराचा घात करणें आहे, त्या अक्षराचेवर उजव्येकडे मांडावा. जसें,

क्षक्ष यास $क्ष^{२}$ याप्रमाणें मांडितात,

क्षक्षक्ष.... $क्ष^{३}$ याप्रमाणें मांडितात,

क्षक्षक्षक्ष.... $क्ष^{४}$ याप्रमाणें मांडितात,.

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. एथें २,३,४, इत्यादि यांस क्षचे **घातप्रकाशक** **ह्मणतात. त्याचप्रमाणें,**

$(अ+ब)\times(अ+ब)$ यास $(अ+ब)^{२}$ याप्रमाणें मांडितात,

$(अ+ब)\times(अ+ब)\times(अ+ब)$ यास $(अ+ब)^{३}$ याप्रमाणें मांडितात,

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. आतां हीं पुढील उत्तरें सहज सांपडतील.

$क्ष\times क्ष = क्ष^{२}$ $\quad$ $क्ष^{२}\times क्ष = क्ष^{३}$ $\quad$ $क्ष^{३}\times क्ष = क्ष^{४}$, इत्यादि.

$$(अ+क्ष)^{२} = अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२}$$

$$(अ-क्ष)^{२} = अ^{२}-२अक्ष+क्ष^{२}$$

$$(अ+क्ष)(अ-क्ष) = अ^{२}-क्ष^{२}$$

$$(अ^{२}+अक्ष+क्ष^{२})(अ-क्ष) = अ^{३}-क्ष^{३}$$

$$(अ+ब)^{३} = अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$$

$$(अ-ब)^{३} = अ^{३}-३अ^{२}ब+३अब^{२}-ब^{३}$$

एकाच अक्षराचे दोन घातांचा गुणाकार दाखविण्यासाठीं गुणाकाराचें घातप्रकाशक चिन्ह, गुण्य आणि गुणक यांचे घातप्रकाशकांचे बेरिजे बरोबर मांड. जसें, $क्ष^{३}$ आणि $क्ष^{४}$ यांस गुणायाचें आहे, तर

$$\text{क्ष}^{३} = \text{क्षक्षक्ष}$$

$$\text{क्ष}^{४} = \text{क्षक्षक्षक्ष}$$

$$\therefore\ \text{क्ष}^{३} \times \text{क्ष}^{४} = \text{क्षक्षक्षक्षक्षक्षक्ष अथवा क्ष}^{७} \text{ अथवा क्ष}^{३+४}$$

पूर्वीं सांगीतलेल्या विस्तार अर्थानें क्षला क्षचा प्रथम घात असें ह्मट-ल्यानें, आणि त्याचें प्रकाशक चिन्ह १ आहे, अथवा $\text{क्ष}^{१}$ असें कल्पिलें असतां, दोन पदांतून नुसता क्ष गुण्य किंवा गुणक असेल, तर अशे प्रश्नाला वरची रीति लागू आहे. जसें,

$$\text{क्ष}^{७} \times \text{क्ष} = \text{क्ष}^{८} \text{ अथवा } \text{क्ष}^{७} \times \text{क्ष}^{१} = \text{क्ष}^{७+१} = \text{क्ष}^{८}$$

उदाहरणें. $\text{क्ष}^{४} \times \text{क्ष}^{१०} = \text{क्ष}^{१४}$ $\qquad$ $\text{क्ष}^{२} \times \text{क्ष}^{१५} = \text{क्ष}^{१७}$

$\text{क्ष} \times \text{क्ष}^{२} \times \text{क्ष}^{३} \times \text{क्ष}^{४} = \text{क्ष}^{१०}$ $\qquad$ $\text{अ}^{६} \times \text{अ}^{६} = \text{अ}^{१२}$

$\text{३अब}^{२} \times \text{४अ}^{२}\text{ब} = \text{१२अ}^{३}\text{ब}^{३}$ $\qquad$ $\text{२अब} \times \text{अब} = \text{२अ}^{२}\text{ब}^{२}$

$$\text{अ}^{२}\text{ब}^{३}\text{कइ}^{६}\text{फ}^{३} \times \text{अब}^{४}\text{कइ}^{७}\text{फ}^{३} = \text{अ}^{३}\text{ब}^{७}\text{क}^{२}\text{इ}^{१३}\text{फ}^{६}$$

हें शेवटील पद, लांब विस्तारानें मांडिलें असतां, याप्रमाणें होईल,

अअअबबबबबबबककइइइइइइइइइइइइइफफफफफफ

कोणत्या एक घातास त्यापेक्षां **दुसऱ्ये** कमी घातानें **भागायाचा असेल, तर भाज्याचे घातप्रकाशकांतून भाजकाचे घातप्रकाशक वजा कर.** उदाहरण, $\text{क्ष}^{१०}$ भागिला $\text{क्ष}^{३}$ नें तर भागाकार काय आहे?

आतां १०=७+३, अथवा $\text{क्ष}^{१०} = \text{क्ष}^{७} \times \text{क्ष}^{३}$. ह्मणून

$(\div)\ \text{क्ष}^{३}$ $\quad \dfrac{\text{क्ष}^{१०}}{\text{क्ष}^{३}} = \text{क्ष}^{७}$ अथवा $\text{क्ष}^{१०-३}$. त्याचसारिखें, $\text{क्ष}^{३} \div \text{क्ष}$ (अथवा $\text{क्ष}^{१}$) $= \text{क्ष}^{२}$; $\text{क्ष}^{१२} \div \text{क्ष}^{११} = \text{क्ष}^{१}$ अथवा क्ष; $\text{क्ष}^{१३} \div \text{क्ष}^{८} = \text{क्ष}^{५}$; $\text{क्ष}^{\text{अ+ब}} \div \text{क्ष}^{\text{अ}} = \text{क्ष}^{\text{ब}}$; $\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}\text{क}^{३} \div \text{अबक} = \text{अबक}^{२}$.

१ **उलटा विषय.** $क्ष^{अ}$ यास $क्ष^{ब}$ याणें भागायाचें असेल, तर वरची रीति लागू केली असतां, याप्रमाणें होईल, $क्ष^{अ} \div क्ष^{ब} = क्ष^{अ-ब}$. परंतु हें झाल्यानंतर जर अ=ब असें निघेल, तर वरचें उत्तर $क्ष^{अ-अ}$ हें होतें, अथवा $क्ष^{०}$, अशे चिन्हाचा अद्यापि अर्थ केला नाहीं. यास्तव, पहिली कृति फिरून मनन करितों, त्यांत ब=अ असून $क्ष^{अ}$ यास $क्ष^{ब}$ याणें भागायाचें आहे, अथवा $क्ष^{अ}$ यास $क्ष^{अ}$ याणें भागायाचें आहे. तर यावरून उत्तर १, हें उघड आहे.

आतां, १ या खरे उत्तराचे जागीं, जाला अर्थ नाहीं असें $क्ष^{०}$ हें उत्तर कां आलें? कां कीं जा पक्षाला ही रीति लागू होत नाहीं, त्यालाच वरची ही रीति लाविली. त्या रितींत सांगीतलें कीं एक घातास त्यापेक्षां **कमी** घातानें भागायाचें इत्यादि, आणि ती रीति पूर्वींचे गुणाकाराचे रीतिपासून निघाली, ह्मणून जेथें गुण्यगुणक हे दोन्हीं क्षचे घात आहेत, त्याशिवाय दुसरे पक्षांत, ही वरची गुणाकाराची रीति लागू होत नाहीं, आणि, यामुळें, जेथें गुणाकाराचा घातप्रकाशक, गुण्य किंवा गुणकाचे घातप्रकाशकापेक्षां अधिक होता, ह्मणजे, जेव्हां गुणाकार $क्ष^{अ}$ आहे, आणि $क्ष^{ब}$ गुण्य किंवा गुणक आहे, तेव्हां अपेक्षां ब कमी असल्यावांचून वरची रीति लागू होत नाहीं.

जर ($क्ष^{०}$) असें चिन्ह आलें, तर या दोहोंतून एक तरी केलें पाहिजे; प्रथम, जा पक्षाला लागू होत नाहीं त्या पक्षाला ही रीति लाविली, हें $क्ष^{०}$ दाखवितो असें मनांत आण, आणि त्याला काढून टाकून, त्याचे जागीं १ मांड; अथवा दुसऱ्यानें, $क्ष^{०}$ याचा जरी अद्यापि अर्थ नाहीं, तथापि त्यास १ याचे जागीं मांड; या एक्षीं रीति लागू होऊन खरें उत्तर निघतें. यामुळें, हें पुढील व्याख्यान स्थापिलें आहे.

कांहीं अक्षराला ० असें घातप्रकाशकचिन्ह असलें, जसें $अ^{०}$, त्याचा अर्थ १ आहे; अथवा प्रत्येक परिमाण अशे घातानें वाढलें कीं त्याचा प्रकाशक ० होतो, तें परिमाण १ आहे.

२ **उलटाविषय.** जेव्हां अपेक्षां ब अधिक आहे, आणि ब=अ+६

असेल, अशा पक्षाला $क्ष^{अ} \div क्ष^{ब} = क्ष^{अ-ब}$ हें समीकरण लाविलें, तर नुसत्ये रीतीनें याप्रमाणें होईल,

$$क्ष^{अ} \div क्ष^{अ+६} = क्ष^{अ-(अ+६)} = क्ष^{-६}$$

या उत्तरांत कांहीं अर्थ नाहीं. याचें कारण वरचेप्रमाणें आहे; ह्मणजे जा पक्षाला ही रीति लागू करण्याची नव्हती त्यास ती रीति लाविली. खरें उत्तर काढायासाठीं, स्मरण ठेव कीं $क्ष^{अ+६} = क्ष^{अ} \times क्ष^{६}$; आणि

$$\frac{क्ष^{अ}}{क्ष^{अ+६}} = \frac{क्ष^{अ}}{क्ष^{अ} \times क्ष^{६}} = \frac{१}{क्ष^{६}}$$

वरचे अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांस $क्ष^{अ}$ यांणीं भागून हें उत्तर झालें. हीं पुढील उदाहरणें त्याचप्रमाणें आहेत; पहिल्ये ओळींत खरी कृति आहे, दुसऱ्ये ओळींत रितीचा खोटा विस्तार आहे;

$\frac{क्ष^{३}}{क्ष^{४}} = \frac{क्ष^{३}}{क्ष^{३}.क्ष} = \frac{१}{क्ष}$	$\frac{क्ष^{३}}{क्ष^{४}} = क्ष^{३-४} = क्ष^{-१}$
$\frac{क्ष^{२}}{क्ष^{८}} = \frac{क्ष^{२}}{क्ष^{२}.क्ष^{६}} = \frac{१}{क्ष^{६}}$	$\frac{क्ष^{२}}{क्ष^{८}} = क्ष^{२-८} = क्ष^{-६}$
$\frac{क्ष^{१७}}{क्ष^{२०}} = \frac{क्ष^{१७}}{क्ष^{१७}.क्ष^{३}} = \frac{१}{क्ष^{३}}$	$\frac{क्ष^{१७}}{क्ष^{२०}} = क्ष^{१७-२०} = क्ष^{-३}$

रीति लागू होईल असें करायासाठीं, हेंच मान्य केलें पाहिजे कीं

$$क्ष^{-१},\ क्ष^{-६},\ क्ष^{-३}$$

यांस अद्यापि अर्थ नाहीं, तथापि तीं या पुढिलाचे जागीं मांडितां येतील, ह्मणून

$$\frac{१}{क्ष},\ \frac{१}{क्ष^{६}},\ \text{आणि}\ \frac{१}{क्ष^{३}}$$

ह्मणजे $क्ष^{-१}$ असें उत्तर आलें असतां, तें टाकून त्याचे जागीं $१ \div क्ष$ हें मांडावें, त्याबदल $क्ष^{-१}$ आणि $१ \div क्ष$ या दोहोंचा अर्थ एकच आहे असें मानावें. आणि $क्ष^{-१}$ याला अद्यापि कांहीं अर्थ नाहीं, यामुळें त्याला इच्छेप्रमाणें कांहीं अर्थ देतां येईल, यामुळें हें पुढील व्याख्यान निघतें;

ज्या अक्षरास घातप्रकाशकचिन्ह ऋण आहे, त्याचा अर्थ हाच, कीं एकं भागिला त्याच अक्षरानें आणि त्या अक्षराचें जें अंकरूप घातप्रकाशकचिन्ह असेल, तेंच त्यास धन करून लावावें; अथवा,

$$क्ष^{-अ}\ \text{याचा अर्थ}\ \frac{१}{क्ष^{अ}}$$

गुणाकार आणि भागाकार यांचा दोन रिती सर्वत्र सामान्य आहेत असें आतां कळेल. वरचे रचनेप्रमाणें, हीं पुढील उदाहरणें देतों;

$$\frac{१}{क्ष^{३}} \div \frac{१}{क्ष^{८}} = \frac{१}{क्ष^{३}} \times \frac{क्ष^{८}}{१} = \frac{क्ष^{८}}{क्ष^{३}} = क्ष^{५} \quad\Big|\quad क्ष^{-३} \div क्ष^{-८} = क्ष^{-३-(-८)} = क्ष^{-३+८} = क्ष^{५}$$

$$क्ष^{४} \times \frac{१}{क्ष^{६}} = \frac{क्ष^{४}}{क्ष^{६}} = \frac{१}{क्ष^{२}} \quad\Big|\quad क्ष^{४} \times क्ष^{-६} = क्ष^{४+(-६)} = क्ष^{४-६} = क्ष^{-२}$$

$$\frac{१}{क्ष^{३}} \div क्ष^{४} = \frac{१}{क्ष^{३}} \times \frac{१}{क्ष^{४}} = \frac{१}{क्ष^{३+४}} = \frac{१}{क्ष^{७}} \quad\Big|\quad क्ष^{-३} \div क्ष^{४} = क्ष^{-३-४} = क्ष^{-७}$$

घातप्रकाशकांविषयीं जें पूर्वीं व्याख्यान सांगितलें त्यापेक्षां आतां कांहीं अधिक दाखविलें, ह्मणजे ज्या पदांचे घातप्रकाशक **धन** किंवा **ऋण पूर्णांक** असतील, तर सर्व पक्षीं मूळचा दोन रिती खऱ्या रहातात. त्या रिती ह्याच आहेत, कीं

$$क्ष^{अ} \times क्ष^{ब} = क्ष^{अ+ब} \qquad क्ष^{अ} \div क्ष^{ब} = क्ष^{अ-ब}$$

परंतु अंकास किंवा अक्षरास **अपूर्ण** प्रकाशक असतील त्यांचा अर्थ माहीत नाहीं; जसें,

$$क्ष^{\frac{१}{२}},\ क्ष^{\frac{१}{३}},\ क्ष^{\frac{२}{३}},\ क्ष^{\frac{२१}{२}},\ क्ष^{·६१}$$ इत्यादि.

वरचे रितीचे कांहीं खोल्ये विस्तारानें, या वरल्या चिन्हांस सोप्ये रितीनें अर्थ देण्याचा विचार करण्यास, आपल्ये मनांत अवश्य येई, तोंपर्यंत न थांबतां, आधींच ती रीति कशी आहे ती पहातों. आणि वरची रीति लागू होईल असा, $क्ष^{\frac{१}{२}}$ याचा अर्थ काय आहे, ह्याविषयीं पहिल्यानें प्रश्न केला पाहिजे. $\frac{१}{२}+\frac{१}{२}=१$ ह्मणून यापक्षीं $क्ष^{\frac{१}{२}}$ याचा अर्थ-याप्रमाणें केला पाहिजे.

$$क्ष^{\frac{१}{२}} \times क्ष^{\frac{१}{२}} = क्ष^{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}} = क्ष^{१} \text{ अथवा } क्ष$$

यामुळें, $क्ष^{\frac{१}{२}}$ तेंच परिमाण आहे कीं त्याणें तेंच गुणिलें असतां, गुणाकार क्ष होतो, अथवा अंकगणितरूपाप्रमाणें त्यास क्षचें **वर्गमूळ** ह्मणतात. त्याचप्रमाणें, $\frac{१}{३}+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}=१$ ह्मणजे $क्ष^{\frac{१}{३}}$ याचा अर्थ याप्रमाणें केला पाहिजे, ह्मणजे $क्ष^{\frac{१}{३}} \times क्ष^{\frac{१}{३}} \times क्ष^{\frac{१}{३}} = क्ष^{\frac{१}{३}+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}} = क्ष^{१}$ अथवा क्ष

ह्मणजे, $क्ष^{\frac{१}{३}}$ हें क्षचें घनमूळ असावें. क्षचें **मूळ** ह्मटलें असतां तो शब्द **घात** या शब्दाचे उलटा आहे; ह्मणजे, जर म हा नचा **त्रिघात** आहे, तर न यास मचें तृतीय मूळ ह्मणतात.

जसें या पुढीलप्रमाणें;

नवें नाव.	मागल्या नावावरून समीकरण.
म चें वर्गमूळ	नन = म
म चें घनमूळ	ननन = म
म चें चतुर्घातमूळ	नननन = म
म चें पंचघातमूळ	ननननन = म
इत्यादि.	इत्यादि.

जसें, ४०९६ या अंकाला वर्गमूळ, घनमूळ, चतुर्घातमूळ, षड्घातमूळ, आणि द्वादशघातमूळ हीं निःशेष मुळें आहेत.

त्याचें वर्गमूळ ६४ आहे, कां कीं ६४×६४ = ४०९६

त्याचें घनमूळ १६ आहे .... १६×१६×१६ = ४०९६

त्याचें चतुर्घातमूळ ८ आहे .. ८×८×८×८ = ४०९६

त्याचें षड्घातमूळ ४ आहे .. ४×४×४×४×४×४ = ४०९६

त्याचें द्वादशघातमूळ २ आहे.. $\left\{\begin{matrix}२×२×२×२×२×२× \\ २×२×२×२×२×२\end{matrix}\right\} = ४०९६$

जर मागल्या अर्थावर विश्वास ठेविला, तर हीं उत्तरें अशा रितीनें लिहिलीं पाहिजेत;

$$६४ = (४०९६)^{\frac{१}{२}} \qquad ८ = (४०९६)^{\frac{१}{४}}$$

$$१६ = (४०९६)^{\frac{१}{३}} \qquad ४ = (४०९६)^{\frac{१}{६}}$$

$$२ = (४०९६)^{\frac{१}{१२}}$$

परंतु, अंकगणितांतील लिहिण्याचे पद्धतीप्रमाणें तीं अशीं लिहिलीं पाहिजेत;

$$६४ = ^{*}\sqrt{४०९६} \qquad ८ = \sqrt[४]{४०९६}$$

$$१६ = \sqrt[३]{४०९६} \qquad ४ = \sqrt[६]{४०९६}$$

$$२ = \sqrt[१२]{४०९६}$$

अपूर्ण प्रकाशकाचे अर्थाची गोष्ट पुढें चालत असतां, $क्ष^{\frac{२}{३}}$ याचा अर्थ $क्ष^{२}$ चें घनमूळ असा असावा; कां कीं, वरचा रिती खऱ्या असाव्या असें जर आहे, तर याप्रमाणें असावें,

$$क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} = क्ष^{\frac{२}{३}+\frac{२}{३}+\frac{२}{३}} = क्ष^{२}$$

आणि, तशेच कल्पनेनें, अनुमान होतें, कीं $क्ष^{\frac{म}{न}}$ हें $क्ष^{म}$ चे न मूळाचे ठिकाणीं असावें. परंतु मूळें आणि घात यांचे परस्पर संबंधाविषयीं कांहीं अधिक माहिती झाल्यावांचून, पूर्वीं सांगितलेला अर्थ खरा आहे कीं नाहीं, याचा निश्चय करवत नाहीं, असें एथें दाखवितों. उदाहरण,

$क्ष^{२\frac{१}{२}}$ अथवा $क्ष^{२+\frac{१}{२}}$ हें $क्ष^{२} \times क्ष^{\frac{१}{२}}$ अथवा $क्ष^{२}\sqrt{क्ष}$ असें असावें,

परंतु $२\frac{१}{२}=\frac{५}{२}$; यामुळें,

$क्ष^{२\frac{१}{२}}$ हें $क्ष^{\frac{५}{२}}$ अथवा $\sqrt{क्ष^{५}}$ असें असावें,

यामुळें, $क्ष^{२}\sqrt{क्ष}$ हें $\sqrt{क्ष^{५}}$ असें असावें,

यांत, **असें असावें**, या शब्दांवरून असें समजतें कीं जर असें नसलें, तर पूर्वींचे सांगितले अर्थानें घेतलेले अपूर्णांकरूप घातप्रकाशकांस,

* $\sqrt{}$ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखविण्यासाठीं आतां बहुतकरून कामांत घेतात, आणि, बीजगणितानें होणाऱ्या शंभर उदाहरणांतून नव्याण्णव उदाहरणांत वर्गमूळापेक्षां मोठें मूळ येत नाहीं.

अंकगणिताची चालती रीति लागू करवत नाहीं.* पुनः $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}=\frac{५}{६}$ तर $क्ष^{\frac{१}{२}}\times क्ष^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt{क्ष}\times\sqrt[३]{क्ष}$ हें $क्ष^{\frac{५}{६}}$ अथवा $\sqrt[६]{क्ष^{५}}$ असें असावें, परंतु अद्यापि सिद्ध केलें नाहीं, कीं

$$क्ष^{२}\sqrt{क्ष}=\sqrt{क्ष^{५}} \text{ अथवा } \sqrt{क्ष}\times\sqrt[३]{क्ष}=\sqrt[६]{क्ष^{५}}$$

कल्पिलेल्या अर्थावरून अद्यापि खोटें उत्तर होत नाहीं, हें दाखविण्याकरितां पुढील **अंकगणितरूपाचे** सिद्धांत पहिल्यानें सांगतों.

१ **सिद्धांत.** जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तर $ब^{२}$ पेक्षां $अ^{२}$, आणि $ब^{३}$ पेक्षां $अ^{३}$ **अधिक** आहे, इत्यादि. कां कीं या पक्षीं अअ हें अशा गुणाकाराचें उत्तर आहे कीं जांत, बमध्यें जितके एक आहेत त्यांहून अधिक वेळा, बहून कांहीं अधिक घेतलें आहे; यामुळें बब पेक्षां अअ अधिक आहे; $अ^{३}$, अथवा $अ^{२}अ$, यांत ब मध्यें जितके एक आहेत त्यांहून अधिक वेळा $ब^{२}$हून कांहीं अधिक घेतलें आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. अक्षरांचे क्रम फिरवून, दुसऱ्या शब्दांनीं सिद्धांत सांगतां येईल; जसें, जर अपेक्षां ब कमी आहे, तर $अ^{२}$ पेक्षां $ब^{२}$ कमी आहे, इत्यादि.

२ **सिद्धांत.** जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तर $ब^{-१}$यापेक्षां $अ^{-१}$ आणि $ब^{-२}$ यापेक्षां $अ^{-२}$ **कमी** आहेत. कां कीं जर ब पेक्षां अ अधिक आहे, तर $\frac{१}{ब}$ यापेक्षां $\frac{१}{अ}$ कमी होईल; आणि त्यापक्षीं, $ब^{२}$ पेक्षां $अ^{२}$ अधिक आहे, यामुळें $\frac{१}{ब^{२}}$ यापेक्षां $\frac{१}{अ^{२}}$ कमी आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. त्याच सारिखें, जर ब पेक्षां अ **कमी** असेल, तर $ब^{-१}$ यापेक्षां $अ^{-१}$ अधिक आहे. इत्यादि.

---

*शिकणारानें ध्यानांत आणावें, कीं $क्ष^{२\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{५}{२}}$, या दोहोंची घालमेल न होईं असें संभाळून, भिन्न भिन्न अर्थ मनांत आणितां येतील. परंतु $२\frac{१}{२}$ आणि $\frac{५}{२}$ हे कोठे कोठे भिन्न भिन्न अर्थाचे आहेत, अशी कल्पना करण्यास अडचण पडेल.

३ सिद्धांत. जर बचे **बरोबर** अ असेल, तर $ब^2$ याचे **बरोबर** $अ^2$ आहे, आणि $ब^3$ याचे बरोबर $अ^3$ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ही गोष्ट **५३ आणि ५४ पृष्ठांवरून** स्पष्ट आहे.

४ सिद्धांत. जर बचे **बरोबर** अ असेल, तर बचे वर्गमूळा **बरोबर** अचें वर्गमूळ होईल, आणि बचे घनमूळा बरोबर अचें घनमूळ होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ह्मणजे अ आणि ब बरोबर असून, त्यांचें पंचघातमूळ दाखविण्यासाठीं म आणि न घे, तर म आणि न यांचे पंचघात अ आणि ब आहेत; जर या दोहोंतून म अधिक असेल, तर, **पहिल्या सिद्धांता**प्रमाणें, त्याचा पंचघात अ, हा ब पेक्षां अधिक होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. त्याच सारिखें, जर दोहोंतून न अधिक असला तर अपेक्षां ब अधिक होईल; याजकरितां न चे बरोबर म खचित् असावा. याचप्रमाणें कोणताहि दुसरा पक्ष सिद्ध करितां येईल.

५ सिद्धांत. जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे. तर बचे वर्गमूळापेक्षां अचें वर्गमूळ **अधिक** आहे. अचे वर्गमूळाचा वर्ग अ आहे, आणि बचे वर्गमुळाचावर्ग ब आहे; ह्मणून जर **तिसरे सिद्धांता**प्रमाणें बचे वर्गमूळा **बरोबर** अचें वर्गमूळ असेल, तर पहिल्याचा वर्ग अथवा ब, याचे **बरोबर** दुसऱ्याचा वर्ग अथवा अ होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. जर **पहिल्या सिद्धांता**प्रमाणें बचे वर्गमूळापेक्षां अचें वर्गमूळ **कमी** असेल, तर पहिल्याचा वर्ग अथवा ब, या पेक्षां दुसऱ्याचा वर्ग अथवा अ **कमी** होईल; परंतु एथें तसें नाहीं. तर याशिवाय इतकाच संभव राहिला आहे, कीं जेव्हां ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तेव्हां ब चे वर्गमूळापेक्षां अचें वर्गमूळ **अधिक** आहे. त्याच सारिखें, जर ब पेक्षां अ **कमी** आहे; तेव्हां बचे वर्गमूळापेक्षां अचें वर्गमूळ कमी आहे. आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

६ सिद्धांत. अंकगणितरूप परिमाणाला अंकगणितरूप वर्गमूळ किंवा घनमूळ किंवा दुसरें कोणतें मूळ एकच आहे. कां कीं शक्य असेल, तर अ ला म आणि न हीं दोन **निरनिराळीं** घनमूळें आहेत अशी कल्पना कर; या दोहोंतून एक अधिक असावें, तें म असो. तेव्हां, १. **सिद्धांता**प्रमाणें नचा घन अथवा अ यापेक्षां मचा घन अथवा अ

अधिक आहे; परंतु असें ह्मणणें हें विरूद्ध आहे, याजकरितां अला दोन निरनिराळीं घन इत्यादि मूळें होऊं शकत नाहींत.

सर्व पूर्णांकांचीं वर्गमूळें किंवा घनमूळें, पूर्णांक नाहींत; आणि जसजसा मूळप्रकाशकांचा क्रम वाढतो, तसतसा कांहीं सांगीतलेल्या मर्यादेमध्यें जांस अशे जातीचें मूळ आहे त्या मूळांतील पूर्णांक कमी कमी होत जातात. ही गोष्ट या पुढील कोष्टकावरून दिसेल,

अंक जांस पूर्णांक					
वर्ग मूळ	घन मूळ	चतुर्घात मूळ	पंचघात मूळ	षडघात मूळ	मूळांची किंमत
१	१	१	१	१	१
४	८	१६	३२	६४	२
९	२७	८१	२४३	७२९	३
१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	४
२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	५
३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	६
४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६४९	७
६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	८
८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३१४४१	९
१००	१०००	१००००	१०००००	१००००००	१०
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०	

ज्या अंकास पूर्णमूळ नाहीं, त्यास बरोबर अपूर्णांकमूळहि नाहीं; सद्यः, सिद्ध केल्यावांचून, ही पुढील प्रतिज्ञा सांगतों; त्याचे विरूद्ध असेल तें शोधून पहाण्यासाठीं शिकणारावर ठेवितों.

अपूर्णांकाचा* कोणताहि घात किंवा कोणतेंहि मूळ पूर्णांक होऊं शकत नाहीं.

ज्या कृत्यांत अंकाचें मूळ काढावयाचें असतें, तो अंक त्या मूळासुद्धां

* ह्मणजे ज्या अपूर्णांकाची किंमत केवळ पूर्णांक नाहीं, त्याच अपूर्णांकाविषयीं ही गोष्ट आहे; कां कीं $\frac{4}{2}$, $\frac{9}{3}$, इत्यादि यांस जरी अपूर्णांकाचें रूप आहे, तथापि ते पूर्णांक आहेत.

अनंतपर्यंत वाढविलेल्या वरचा कोष्टकांतील असला, तर तें कृत्य खरे कल्पनेचें आहे; याशिवाय जांत अंकांचीं मूळें काढावयाचीं असतात, अशीं अंकगणिताचीं आणि बीजगणिताचीं सर्व कृत्यें खोट्या कल्पनेचीं आहेत. परंतु जरी अशे तऱ्हेचे कृत्यांचें **बरोबर निःशेष** उलगडणें होत नाहीं, तरी इच्छेप्रमाणें खरे उत्तराचे जवळ जवळ मूळें काढावयाचा रिती आहेत, हें दाखवितां येईल; ह्मणून, हा पुढील सिद्धांत स्थापिला आहे.

जरी असा कांहीं अपूर्णांक नाहीं, कीं जाचा न घात कांहीं सांगीतले पूर्णांकाचे बरोबर आहे, तरी असा अपूर्णांक कल्पून घेतां येईल कीं जाचा न घात आणि त्या सांगीतल्या पूर्णांकाचें अंतर, कोणत्याहि सांगीतलेल्या परिमाणापेक्षां कमी होईल, ह्मणजे ·०००१ अथवा ·०००००००१, अथवा दुसऱ्ये कोणत्याहि लहान अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल.

पहा. अशे तऱ्हेचा अपूर्णांक काढायाला कोणती रीति सोईस पडेल हें एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं, परंतु तें काढतां येतें ही गोष्ट मात्र सिद्ध करून दाखवायाची आहे. वर्गमूळ आणि घनमूळ यांविषयीं ही गोष्ट अंकगणितांत सांगीतली आहे. याचा ताळा सिद्ध करायासाठीं कांहीं विस्तारानें सांगीतलें पाहिजे, तर हे पुढील **लेम्मे*** स्थापितों.

१ **लेम्मा.** दोन या अंकाचे घात एक मिळवणीनें होतात; जसें,

$$२+२ = २^{२} \qquad २^{२}+२^{२} = २^{३} \qquad २^{३}+२^{३} = २^{४}$$

अथवा सामान्यतः $$२^{न}+२^{न} = २^{न}\times २ = २^{न+१}$$

२ **लेम्मा.** अपूर्णांकाचा, अंशाचे आणि छेदाचे घातापासून त्या अपूर्णांकाचे घात होतात; जसें,

$$\left(\frac{अ}{ब}\right)^{३} = \frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब} = \frac{अअअ}{बबब} = \frac{अ^{३}}{ब^{३}}$$

* लेम्मा ह्मणजे, प्रतिज्ञा आहे जी दुसऱ्ये कांहीं प्रतिज्ञेचा ताळा सिद्ध करायास साधनासाठीं कामांत घेतात.

३ **लेम्मा.** जर क पेक्षां प कमी असेल, तर अक पेक्षां अप कमी होईल.

जर क पेक्षां प कमी असेल, आणि ब पेक्षां अ कमी असेल, तर बक पेक्षां अप कमी होईल.

४ **लेम्मा.** जर एकंमापेक्षां वि कमी असेल, तर तिचे घात पदोपर्दी घटत जातात. उदाहरण, जर वि एक द्वितीयांश असेल, तर तिचा वर्ग ($\frac{१}{२}\times\frac{१}{२}$) ह्मणजे एक द्वितीयांशाचा द्वितीयांश हा वि पेक्षां कमी आहे; तिचा घन एक चतुर्थांशाचा द्वितीयांश आहे, ह्मणजे हा वि^{२} पेक्षां कमी आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

५ **लेम्मा.** जर कांहीं पद्धतीचा धन पदांतील एक पद अधिक केलें असतां, ती सर्व पद्धति अधिक होती, इत्यादि. जसें, अ−ब ह्या पद्धतींत अ अधिक केला असतां ती अधिक होईल, आणि अ कमी केला असतां कमी होईल; परंतु ब **अधिक** केला **असतां** ही पद्धति **कमी** होईल, आणि ब **कमी** केला असतां **अधिक** होईल.

६ **लेम्मा.** जर १ पेक्षां वि कमी असेल, तर

(१+वि)^{२} ही पद्धति, १+३वि अथवा १+(४−१)वि यापेक्षां कमी आहे

(१+वि)^{३} ही, १+७वि अथवा १+(८−१)वि हिजपेक्षां कमी आहे

(१+वि)^{४} ही, १+१५वि अथवा १+(१६−१)वि हिजपेक्षां कमी आहे

. . . .

अथवा (१+वि)^{न} ही, १+(२^{न}−१)वि हिजपेक्षां कमी आहे

पहिल्यानें.(१+वि)^{२} अथवा (१+वि)(१+वि) = १+२वि+वि^{२};

४ **लेम्मा** वरून वि^{२} पेक्षां वि अधिक आहे, तर वि^{२} चे स्थळीं वि मांडिली असतां ५ **लेम्मा** प्रमाणें ती पद्धति अधिक होती. परंतु असें केल्यानें ती याप्रमाणें होती, १+२वि+वि अथवा १+३वि. यामुळें १+२वि+वि^{२} ही १+३वि हिजपेक्षां कमी आहे; ह्मणजे, (१+वि)^{२} ही १+३वि हिजपेक्षां कमी आहे.

पुनः (१+वि)^{२} ही, १+३वि पेक्षां कमी आहे

तर **३ लेम्मा** वरून (१+वि)^{२} (१+वि) ही, (१+३वि)(१+वि) हिजपेक्षां कमी आहे

अथवा (१+वि)^{३} ही, १+४वि+३वि^{२} हिजपेक्षां कमी आहे

आणि पूर्वीप्रमाणें **४ आणि ५ लेम्मा**वरून (१+वि)^{३} ही १+४वि+३वि अथवा १+७वि हिजपेक्षां फार कमी असावी.

पुनः (१+वि)^{३} ही, १+७वि पेक्षां कमी आहे

यामुळें (१+वि)^{४} ही, (१+७वि)(१+वि) अथवा १+८वि+७वि^{२} } यांजपेक्षां कमी आहे

(१+वि)^{४} ही, १+८वि+७वि अथवा १+१५वि } यांजपेक्षां फार कमी असावी

याप्रमाणें हवे तितके क्रमक्रमानें पुढें चालतां येईल, परंतु खालीं लिहिलेली सिद्धता अशे तऱ्हेची आहे, कीं तिजमध्यें सर्व विषय येतात. वरचा पद्धतींतून एक खरी आहे असें मनांत आणून जीमध्यें न घात आहे ती खरी असें ह्मण; ह्मणजे याप्रमाणें असावें.

(१+वि)^{न} ही, १+(२^{न}–१)वि हिजपेक्षां कमी आहे

तर **३ लेम्मा**वरून (१+वि)^{न}(१+वि) ही, {१+(२^{न}–१)वि}(१+वि) हिजपेक्षां कमी आहे वरचा गुणाकार याप्रमाणें होईल;

१+(२^{न}–१)वि
१+ वि
———————
१+(२^{न}–१)वि
वि+(२^{न}–१)वि^{२}
———————
बेरीज १+२^{न}वि +(२^{न}–१)वि^{२}

अथवा (१+वि)$^{न+१}$ ही, १+२^{न}वि+(२^{न}–१)वि^{२} यापेक्षां कमी आहे

तर ४ आणि ५ लेम्मा वरून { $१+वि^{न+१}$ ही $१+२^{न}वि+(२^{न}-१)वि$
अथवा $१+(२^{न}+२^{न}-१)वि$
अथवा १ लेम्मावरून $१+(२^{न+१}-१)वि$ } यांजपेक्षां ही फार कमी असावी.

यावरून सिद्ध झालें कीं

जर $(१+वि)^{न}$ ही, $१+(२^{न}-१)$ वि हिजपेक्षां कमी आहे

तर असा निश्चय होतो, कीं $(१+वि)^{न+१}$ ही, $१+(२^{न+१}-१)$वि हिज पेक्षां कमी आहे,

अथवा या लेम्मांतल्ये वेगवेगळे सांगीतलेले प्रतिज्ञेचे क्रमांतून जर एक प्रतिज्ञा खरी आहे, तर दुसरी प्रत्येक प्रतिज्ञा खरी असावी. परंतु पहिली प्रतिज्ञा सिद्ध झाली, यामुळें बाकीचा सर्व सिद्ध झाल्या.

७ लेम्मा. अ अपेक्षां क्ष अधिक असेल, तर

$(क्ष+अ)^{२}$ ही $क्ष^{२}+३$ अक्ष अथवा $क्ष+(४-१)$ $अक्ष^{२}$ हिजपेक्षां कमी आहे

$(क्ष+अ)^{३}$ ही $क्ष^{३}+७$ $अक्ष^{२}$ अथवा $क्ष^{३}+(८-१)$ $अक्ष^{२}$ हिजपेक्षां कमी आहे

$(क्ष+अ)^{४}$ ही $क्ष^{४}+१५$$अक्ष^{३}$ अथवा $क्ष^{४}+(१६-१)$$अक्ष^{३}$ हिजपेक्षां कमी आहे

. . . .

अथवा $(क्ष+अ)^{न}$ ही $क्ष^{न}+(२^{न}-१)$ $अक्ष^{न-१}$. . . हिजपेक्षां कमी आहे

अपेक्षां क्ष मोठा आहे, यामुळें $\frac{अ}{क्ष}$ हा १ पेक्षां कमी आहे; यामुळें,

६ लेम्मावरून

$(+\frac{अ}{क्ष})^{न}$ ही $१+(२^{न}-१)\frac{अ}{क्ष}$ हिजपेक्षां कमी आहे

परंतु $१+\frac{अ}{क्ष}=\frac{क्ष+अ}{क्ष}$ ∴ **२ लेम्मा** वरून$(१+\frac{अ}{क्ष})^{न}=\frac{(क्ष+अ)^{न}}{क्ष^{न}}$

यामुळें $\frac{(क्ष+अ)^{न}}{क्ष^{न}}$ ही $१+(२^{न}-१)\frac{अ}{क्ष}$ हिजपेक्षां कमी आहे

दोन्ही बाजू $क्ष^{न}$ याणें गुण; तर ३ लेम्मा वरून याप्रमाणें होईल,

$$\left.\begin{array}{l} (क्ष+अ)^{न} \text{ ही } क्ष^{न} + (२^{न}-१)\frac{अक्ष^{न}}{क्ष} \\ \text{अथवा } (क्ष+अ)^{न} \text{ ही } क्ष^{न} + (२^{न}-१)अक्ष^{न-१} \end{array}\right\} \text{ यांजपेक्षां कमी आहे}$$

१८१ पृष्ठावरची प्रतिज्ञा एका विशेष पक्षाला लावून सांगतों. १० हा अंक घेतला असें ह्मण, आणि घन हा सांगीतला घात आहे असें मनांत आण. तर असा कांहीं अपूर्णांक काढितां येईल कीं ज्याचा घन १० यांचे आंत ·०००१ इतके अंतरानें होईल? $(२)^३=८$, आणि $(३)^३=२७$, तर २ कमी आहेत आणि ३ अधिक आहेत असें दिसतें. तर २ आणि ३ यांचे मधील २·१, २·२, २·३, इत्यादि या अपूर्णांकांचे घन तपासून पहा. $(२·१)^३ = ९·२६१$, आणि $(२·२)^३ = १०·६४८$; यांत २·१ हे कमी आहेत, आणि २·२ हे अधिक आहेत. आतां २·१ आणि २·२ यांचे मधले २·११, २·१२, २·१३, इत्यादि या अपूर्णांकांचे घन तपासून पहा. तर हें कळतें कीं

$(२·१५)^३ = ९·९३८३७५$ $(२·१६)^३ = १०·०७७६९६$
यमुळें २·१५ कमी आहेत, आणि २·१६ अधिक आहेत.

याप्रमाणें पुढें चाललें असतां, हें कळेल, कीं

$(२·१५४)^३$ हे १० पेक्षां कमी आहेत. } $(२·१५५)^३$ हे १० पेक्षां अधिक आहेत

$(२·१५४४)^३$ हे १० पेक्षां . . . $(२·१५४५)^३$ हे १० पेक्षां . . . .
$(२·१५४४३)^३$ हे १० पेक्षां . . . $(२·१५४४४)^३$ हे १० पेक्षां . . . .

इत्यादि. इत्यादि.

अशे रितीनें दोन अपूर्णांक काढितां येतील, कीं जांतून एकाचा घन १० पेक्षां कमी आणि दुसऱ्याचा घन १० पेक्षां अधिक होईल, परंतु ते दोनहि घन १० चा इतके जवळ असावे, कीं त्या घनांचे आणि १० चें अंतर ·०००१ इतकें होईल, हा मात्र प्रश्न करावयाचा राहिला आहे. वरचे क्रमांतून हें पहा कीं

२·२	हे	२·१	यांपेक्षां केवळ	·१	इतक्यानें अधिक आहेत.
२·१६	हे	२·१५	यांपेक्षां०	·०१	इतक्यानें अ०
२·१५५	हे	२·१५४	यांपेक्षां०	·००१	इतक्यानें अ०
२·१५४५	हे	२·१५४४	यांपेक्षां०	·०००१	इतक्यानें अ०
इत्यादि.		इत्यादि.			इत्यादि.

आणि ७ वे लेम्मा वरून जर क्ष पेक्षां अ कमी असेल, तर

$(क्ष+अ)^३$ हीं $क्ष^३ + ७अक्ष^२$ यांपेक्षां कमी आहे

अथवा $(क्ष+अ)^३ - क्ष^३$ ही $७अक्ष^२$ यांपेक्षां कमी आहे

वरचे क्रमांतील अपूर्णांकांतून एक कमी अपूर्णांक दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर १० पेक्षां $क्ष^३$ कमी आहे ह्मणून क्ष हा ३ पेक्षां कमी असावा, आणि त्याचा वर्ग ही ९ पेक्षां कमी असावा. यामुळें $७अक्ष^२$ हें ७अ×९, अथवा ६३अ या पेक्षां कमी असावें. आणि $(क्ष+अ)^३ - क्ष^३$ ही $७अक्ष^२$ पेक्षां कमी आहे यावरून ६३अ पेक्षां फारच कमी असावी. वरचे अधिक अपूर्णांक दाखविण्यासाठीं क्ष+अ घे; तर यांचें अंतर अ, कृतीचा क्रम पुढें चालविला असतां, ·०००००० १ इतकें होईल, यामुळें, ६३ अ हे ·०००००६३ हे ·००००१ या पेक्षां कमी आहेत. यामुळें क्षची किंमत अशी निघेल, कीं

$क्ष^३$ हा १० पेक्षां कमी आहे $(क्ष+·०००००० १)^३$ ही १० पेक्षां अधिक आहे

आणि $(क्ष+·०००००० १)^३ - क्ष^३$ ही ·००००१ हिजपेक्षां कमी आहे.

परंतु १० हे त्या दोन घनांचे मध्यें आहेत, ह्मणून १० यांशीं जीं दोन निरनिराळ्ये घनांचीं अंतरें आहेत, तीं त्या दोन घनांचे अंतरापेक्षां कमी होतील; यामुळें त्यांतून कोणताहि अपूर्णांक घेतला, तर त्याचा घन इच्छिल्याप्रमाणें १० चे जवळ होईल. इच्छिलेले अपूर्णांक

काढिले असतां याप्रमाणें होतील, २·१५४४३४६ आणि २·१५४४-३४७. तशेच रितीनें दुसरे पक्ष उलगडतील

यावरून, या पुढीलप्रमाणें बोलण्याची तऱ्हा कामांत आणावी लागती. १० यांस पूर्ण घनमूळ नाहीं, असें ह्मणण्याबद्दल याप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं जा अपूर्णांकाचे घन इच्छेप्रमाणें १० चे जवळ जवळ येतील असे अपूर्णांक काढितां येतील, आणि $\sqrt[3]{१०}$ हें पूर्ण घनमूळ असें जाणून, त्या अपूर्णांकांस १० चे घनमूळाचा जवळचे आहेत असें ह्मणतात. ह्मणजे, $(२·१५४४३४६)^3$ हे १० चा बरोबरीस जितके जवळ आहेत तितके $(२·१५४)^3$ हे नाहींत, असें ह्मणण्याबद्दल, २·१५४४३४६ हे जितके १० चा घनमूळा जवळचे आहेत तितके २·१५४ हे नाहींत असें ह्मणतात.

हे पुढील शब्द जा अर्थानें कामांत घेतात त्यांचा तो अर्थ आतां शिकणारास समजेल;

प्रत्येक पूर्णांकास आणि अपूर्णांकास अगदी बरोबरीचें किंवा जवळचें या दोहोंतून एक तरी मूळ असतें.

$\sqrt[6]{अ^5}$ यांत अ=१० घे, तर $अ^5 = १०००००$. आतां, $\sqrt{अ} \times \sqrt[3]{अ} = \sqrt[6]{अ^5}$ हें सर्व पक्षीं सिद्ध केल्यावर आणि अची किंमत वरप्रमाणें असली, तर या समीकरणावरून काय अर्थ समजावा ? हाच अर्थ समजावा कीं दोन अपूर्णांक निघतील जांचे वर्ग आणि घन इच्छेप्रमाणें १० चे जवळ जवळ होतील, ह्मणजे ·०००१ इतके जवळ आहेत असें ह्मण, तर अशे अपूर्णांकांस $\sqrt{१०}$ आणि $\sqrt[3]{१०}$ यांचा जवळचा किंमती असें ह्मणतां येईल, आणि हे दोन अपूर्णांक परस्पर गुणिले असतां, जो गुणाकार होईल, त्याचा षड्घात केला असतां, तो १०^5 यांचे तितकाच जवळ जवळ येईल, अथवा $\sqrt[6]{१०^5}$ यांचे जवळचे किंमतीचा होईल. या दोन प्रतिज्ञांचा ताळा अगोदरच अनुमानांत घेतों, कारण कीं शुद्ध प्रतिज्ञेपा-

सून जवळ जवळचे प्रतिज्ञेंत जावयाचे रितीचें एक उदाहरण सांगीत-ल्यानें तें सर्वांस लागू पडेल.

मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं ज्याला निःशेष वर्ग-मूळ आणि घनमूळ हीं दोन्हीं आहेत, जसें ६४, अथवा $\frac{१}{७२९}$. त्याचें वर्गमूळ दाखवायासाठीं क्ष घे, आणि घनमूळ दाखवायासाठीं य घे. तर

$$क्ष^{२} = अ \text{ यामुळें } (क्ष^{२})^{३} = अ^{३} \text{ अथवा } क्ष^{२} \cdot क्ष^{२} \cdot क्ष^{२} = अ \text{ अथवा } क्ष^{६} = अ^{३},$$

$$य^{३} = अ \text{ यामुळें } (य^{३})^{२} = अ^{२} \text{ अथवा } य^{३} \cdot य^{३} = अ^{२} \text{ अथवा } य^{६} = अ^{२}$$

$$\therefore क्ष^{६}य^{६} = अ^{३}अ^{२} \text{ अथवा } (क्षय)^{६} = अ^{५}$$

कां कीं $क्ष^{६}य^{६}$ हे क्षक्षक्षक्षक्षक्षययययय, ह्यासारिखेच आहेत, आणि त्यांचा गुणाकार या क्रमानें होईल

$$क्षय \cdot क्षय \cdot क्षय \cdot क्षय \cdot क्षय \cdot क्षय = (क्षय)^{६}$$

यामुळें, क्षय हें $अ^{५}$ याचें षड्घातमूळ आहे; परंतु क्ष हा अचें वर्गमूळ आहे, आणि य त्याचें घनमूळ आहे, म्हणजे,

$$क्षय = \sqrt[६]{अ^{५}} \text{ किंवा } \sqrt{अ} \times \sqrt[३]{अ} = \sqrt[६]{अ^{५}}$$

आतां मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं ज्याला निः-शेष वर्गमूळ आणि घनमूळ नाहीं, जसें १०. क्ष आणि य असे अपू-र्णांक काढितां येतील, कीं $क्ष^{२}$ आणि $य^{३}$ हे अचे जवळ जवळ इच्छेप्र-माणें होतील. मनांत आण, कीं $क्ष^{२} = अ + प$ आणि $य^{३} = अ + क$ म्हणजे प आणि क इच्छेस येईल तितके लहान* होतील. अपेक्षां प आणि क

* इच्छेस येईल तितके लहान होतील, म्हणजे त्यांचा लहानपणा कांहीं विशेष किंमतीचा आहे, असा अर्थ नाहीं. परंतु अर्थ हाच कीं कसाहि लहान अपूर्णांक घेतला तरी त्यापेक्षां हि कमी घेतां येईल.

हे कमी आहेत असें आरंभीं कल्पितों. तर ७ व्ये लेम्मावरून,

$$(अ+प)^{३} \text{ ही } अ^{३}+७पअ^{२} \text{ यापेक्षां कमी आहे}$$
$$(अ+क)^{२} \text{ ही } अ^{२}+२कअ \text{ यापेक्षां कमी आहे}$$

परंतु $(क्ष^{२})^{३}$ अथवा $क्ष^{६}=(अ+प)^{३}$ आणि $(य^{३})^{२}$ अथवा $य^{६}=(अ+क)^{२}$ यामुळें

$$क्ष^{६} \text{ हा } अ^{३}+७पअ^{२} \text{ यापेक्षां कमी आहे}$$
$$य^{६} \text{ हा } अ^{२}+२कअ \text{ यापेक्षां कमी आहे}$$

तर ३ लेम्मा वरून $क्ष^{६}य^{६}$ हा $(अ^{३}+७पअ^{२})(अ^{२}+२कअ)$ यापेक्षां कमी आहे

अथवा $(क्षय)^{६}$ हा $अ^{५}+अ^{४}(७प+२क)+२१पकअ^{३}$ यापेक्षां कमी आहे परंतु $क्ष^{२}$ अथवा अ+प हा अपेक्षां अधिक आहे, यामुळें $क्ष^{६}$ हा $अ^{३}$ पेक्षां अधिक आहे; आणि $य^{३}$ अथवा अ+क हा अपेक्षां अधिक आहे, यामुळें $य^{६}$ हा $अ^{२}$ पेक्षां अधिक आहे; तर $क्ष^{६}य^{६}$ अथवा $(क्षय)^{६}$ हा $अ^{३}\cdot अ^{२}$ अथवा $अ^{५}$ यापेक्षां अधिक आहे. यावरून,

$(क्षय)^{६}$ हा $अ^{५}$ याचे आणि $अ^{५}+अ^{४}(७प+२क)+२१पकअ^{३}$ यांचे कोठे तरी मध्यें आहे यामुळें त्याची किंमत $अ^{५}$ हून, $अ^{४}(७प+२क)+२१पकअ^{३}$ इतक्यानें भिन्न नाहीं.

वरचे पद्धतीमध्यें $अ^{४}$ आणि $अ^{३}$ हे कितीहि मोठे* असतील, तरी प आणि क इच्छेस येईल तितके लहान होतील, तर ७प+२क आणि २१पक हेहि इच्छेस येईल तितके लहान होतील, यामुळें ती वरची

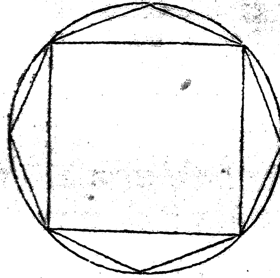
---

* न आणि म यांतून जर न कांहीं दिलेलें परिमाण असेल, आणि जर इच्छेस येईल इतका लहान म घेतां येईल, तर मन हा गुणाकार इच्छेस येईल तितका लहान करितां येईल; परंतु हें मात्र मनांत ठेविलें पाहिजे कीं गुणाकाराला इच्छिलेला लहानपणा देण्याकरितां, जितका न मोठा असेल तितका लहान म घ्यावा.

पद्धति इच्छेस येईल तितकी लहान करितां येईल. ह्मणजे, (क्षय)[६] हा अ[६] याचे इच्छेस येईल तितका जवळ करितां येईल, अथवा क्षय हा अ[६]चे षड्घातमूळाचा जवळचा आहे.

बीजगणिताचे पुस्तकामध्यें वरची सिद्धता बहुतकरून लिहून दाखवीत नाहीं, परंतु जास **क्रमनियम** ह्मणतात, त्यांत वरचें उत्तर खरें मानून घेतात. क्रमनियम या शब्दाचा अर्थ सांगतों, कां कीं त्यांत शिकणाराचे उपयोगी असे बहुत विषय आहेत; परंतु तो क्रमनियम शिकणारानें सोडून दिला, तरी या प्रकारणाचें अनुसंधान सुटत नाहीं, यामुळें याविषयींचा गोष्टी बारीक अक्षरांनीं पुढें लिहितों, आणि या विषयाचें सूचक नाम पृष्ठाचे वर तसेंच मांडितों.

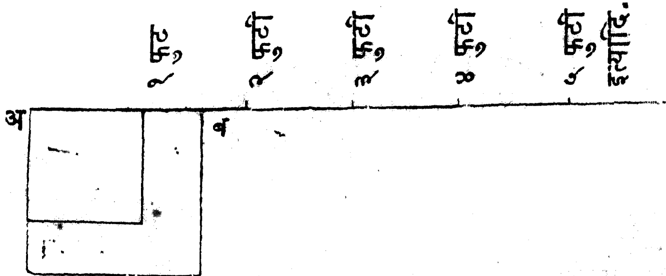
क्रमशः आणि आकस्मिक क्रम न सुटतां हे दोनहि शब्द सारिख्ये अर्थाचे आहेत. उदाहरण, असें मनांत आण, कीं एक चौरस आहे, ज्याचा दोन समांतर बाजू उत्तर आणि दक्षिण दिशेंत आहेत. जो कोणी पुरुष अशी चौरसाची प्रदक्षिणा करील त्यास प्रत्येक कोनावरून पुढें चालते समयीं एक वर्तुळपाद फिरावें लागतें, ह्मणजे जेव्हां तो उत्तर किंवा दक्षिण दिशेस चालतो, तेव्हां कांहीं मधल्ये दिशेंत न चालतां एकदांच पूर्वेकडे किंवा पश्चिमेकडे फिरतो, आणि पूर्व किंवा पश्चिमेकडे चालतो तेव्हां त्याचे उलटें घडतें. यापक्षीं त्याची दिशा क्रमभेदानें बदलती. जरी त्या आकृतीला आठ बाजू असल्या, तरी त्याची दिशा क्रमभेदानें पालटेल. परंतु तो पालट पूर्वीपेक्षां कमी होईल; त्या आकृतीला सोळा बाजू असल्यास कोनावरचे पालट पूर्वी पेक्षांहि कमी होतील, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.



परंतु वर्तुळाचे किंवा दीर्घवर्तुळाचे भोंवती प्रदक्षिणा केली, तर दिशाभेदक्रम सुटत नाहीं. जर भूमितीचा वर्तुळा भोंवतीं भूमितीचा बिंदू प्रदक्षिणा करितो, तर तो बिंदू चालत असतां त्याचें गमन अमुक दिशेंत झालें नाहीं अशी दिशा कल्पवत नाहीं; आणि कोणत्याहि दोन बिंदूंचे मध्येंच जर चालत आहे तर त्या दोन बिंदूंचा दिशेमधल्या सर्व दिशांत त्याचें गमन होईल.

भूमितीपासून वरचें उदाहरण दृष्टांतार्थ घेतलें आहे, आणि त्यांत क्रमशः भेद होतो असें कल्पिलें आहे; आणि या कल्पनेस कांहीं विरोध येत नाहीं, परंतु जेव्हां अशी कल्पना करितों, कीं बिंदूचे गती पासून रेषा उत्पन्न होतात, तेव्हां वरची भूमितीची कल्पनाहि नीट दिसती. परंतु अंकगणीत, आणि नंतर बीजगणित हीं दोन्हीं भूमितीला लागू केलीं असतां, हेंच विचारायाचें राहिलें, कीं भूमितीचीं सर्व परिमाणें अंकगणितरितीने दाखवितां येतील कीं काय? उदाहरण, अ पासून निघून ब सरळ रेषेंत शंभर फुटीपर्यंत चालतो अशी कल्पना कर, तर जा अनंत बिंदूवरून ब चालतो त्यांतील जा प्रत्येक बिंदूवरून अ पासून ब चालला त्या प्रत्येक बिंदूचें अंतर फुटी आणि फुटीचे अपूर्णांक यांचे सहाय्यानें दाखवितां येईल कीं काय?

स्पष्ट आहे कीं एक आणि दोन फुटींचे मध्यें हे पुढील अपूर्णांक येतील. ह्मणजे १·१,१·२,१·३, इत्यादि फुट; १·१ आणि १·२ फुटीमध्यें हे अपूर्णांक येतील ह्मणजे, १·११,१·१२,१·१३, इत्यादि फुट; १·११ आणि १·१२ फुटीमध्यें हे अपूर्णांक येतील, ह्मणजे १·१११,१·११२,१·११३, इत्यादि फुट; आणि याप्रमाणें अनत* पावेतों होईल. परंतु अ पासून १ आणि २ फुटींमध्यें ब ची कांहीं भूमितिरूप स्थिती नेमिली असतां, ती स्थिति केवळ बरोबर दाखविण्यासाठीं १ फुट आणि एक फुटीचा अपूर्णांक अशानें ती स्थिति बरोबर दाखवितां येणार, नाहीं. आतां जी स्थिति भूमितीने नेमितां येईल, परंतु अंक गणितानें नेमितां येणार नाहीं अशी दाखवितों.



वरचे आकृतीप्रमाणें अब रेषेवरचें चौरस १ फुटीचे चौरसाचे दुप्पट होण्या साठीं ब ची स्थिती कोठे असावी, याचा नेम भूमितीमध्यें भूमितिकृत्यानें दाखविला

* शिकणारानें मनांत आणावें, कीं अनंत पावेतों असें ह्मटलें असतां अर्थ हाच, कीं इच्छिल्या पावेतों.

आहे परंतु अंकगणितानें दाखविला नाहीं. एक फुट दाखविण्यासाठीं १ घे; आतां वर सांगितलेल्यापक्षीं अब रेषेला कांहीं अंकगणितरूपाचें परिमाण नेमितां येईल कीं नाहीं, याचा विचार करितों. फुटीचा प्रत्येक अपूर्णांकास असें अपूर्णांकरूप देतां येईल, कीं त्याचे अंश आणि छेद पूर्णांक होतील, यावरून जर अब रेषेला अंकगणित परिमाण नेमितां येईल,तर अब रेष $\frac{म}{न}$ फुटआहे,आणि म आणि न पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. ह्मणजे एक किंवा अधिक फुटी न समभागांत भागून,त्या भागांतून म भाग घेतले अशानें अब रेष झाली असें मनांत आण. या फुटीचा एक न भागास, सोईसाठीं, भागाचा भाग ह्मण; तेव्हां एक फुटीमध्यें न भागाचे भाग आहेत, आणि अब मध्यें म भागाचे भाग आहेत. तेव्हां फुटीचे रेषेवरचे चौरसामध्यें भागाचे भागाचीं चौरसें न×न इतकीं आहेत, आणि अब रेषेचे चौरसामध्यें म×म इतकीं त्याच जातीचीं चौरसें आहेत. यावरून, अब रेषेवरचें चौरस एक फुट रेषेवरचे चौरसाचे दुप्पट आहे, तर याप्रमाणें असावें.

$$मम=२नन$$

आतां म आणि न हे पूर्णांक असावे या संकेतानें हें समीकरण शक्य नाहीं असें दाखवितों. न पूर्णांक आहे, ह्मणून नन पूर्णांक आहे, आणि २ नन पूर्णांकाचीं दुप्पट आहे, आणि यामुळें तो सम अंक आहे; परंतु नन चे दुपटी बराबर मम आहे, यामुळें ममहीं सम आहे. ह्मणून नुसता म हिं सम आहे, कां कीं विषम अंक त्याणें तोच गुणिला असतां विषम अंक होतो. परंतु जर म सम आहे, तर त्याचें अर्ध पूर्णांक होईल; तर तें अर्ध दाखविण्यासाठीं म' घे, तेव्हां म=२म'. मची ही किंमत वरचे समीकरणांत मचे स्थळीं मांड, तर याप्रमाणें होईल

$$२म'×२म'=नन \qquad ४म'म'=२नन \text{ अथवा } २म'म'=नन$$

न सम अंक असावा हें दाखविण्याकरितां, वरचें समीकरण नन=२म'म' तशेच रितीनें कामांत घेतां येईल. नचें अर्ध न' पूर्णांक आहे असें मनांत आण, तर न=२न' आणि ही किंमत समीकरणांत नचेस्थळीं मांडिल्यानें याप्रमाणें होतें

$$२न'×२न'=२म'म' \qquad ४न'न'=२म'म' \text{ अथवा } २न'न'=म'म'$$

यावरून पूर्वीप्रमाणें म' सम अंक आहे असें सिद्ध होतें. म आणि न हे पूर्णांक असून मम=२नन हें समीकरण खरें आहे असें दाखविण्याविषयीं हे पुढील अंक निरंतर पूर्णांक, असले पाहिजेत

म (म' ह्मणजे मचें अर्ध) (म'' ह्मणजे म'चें अर्ध) इत्यादि
न (न' ह्मणजे नचें अर्ध) (न'' ह्मणजे न'चें अर्ध) इत्यादि

परंतु असें होण्यास अशक्य आहे; कां कीं कांहीं अंकाचें अर्ध केलें आणि त्या अर्धाचें अर्ध याप्रमाणें पुढें करीत गेलें असतां शेवटीं १ हून कमी असा कांहीं अपूर्णांक येईल. यामुळें, कोणत्याहि पूर्णांकाविषयीं ममम=२नन हें समीकरण खरें नाहीं, आणि त्यावरून अब रेघ $\frac{म}{न}$ या अपूर्णांकानें दाखवितां येत नाहीं.

जर वरचें समीकरण खरें असें मानिलें, तर त्यापासून याप्रमाणें होईल,

$\frac{मम}{नन}=२$ अथवा $\frac{म}{न}\times\frac{म}{न}=२$ अथवा क्षक्ष=२ यांत क्ष=$\frac{म}{न}$ आहे.

१८५ **पृष्ठाप्रमाणें** क्षक्ष=२ हें समीकरण या अर्थानें मात्र स्वीकारितां येतें; कीं, कांहीं एक लहान अपूर्णांक घेऊन क्षची कांहीं किंमत काढितां येईल, जिचा योगानें क्षक्ष हे २ पेक्षां त्या अपूर्णांकानें कमी होतील. ह्मणजे

क्षक्ष−२=० हें समीकरण स्थापण्याबद्दल

क्षक्ष−२=कांहीं गणित परिमाण (   ) याहून कमी

असें मात्र स्थापितां येईल. कुंडलीमध्यें इच्छेप्रमाणें कसाही लहान अपूर्णांक मांडितां येईल.

सर्व व्यवहारकामाकरितां वर सांगितलें इतकें पुरे; कां कीं व्यवहारकामांत जेव्हां बीजगणित लावावें लागतें त्याचा सूक्ष्मपणा मापण्याचे सुयंत्राचें सहाय्य पावलेल्या दृष्टीचा मर्यादेबाहेर, असण्याचें प्रयोजन नाहीं. जी अतिसूक्ष्म रेघ दृष्टीनें पहाण्यास शक्य, ती जर एक इंचाचा दशसहस्रांश असेल, तर तीं पुढील समीकरण उलगडण्यासाठीं खचित् सत्यतेचा जवळ जवळ पुरतेपणीं होईल, ह्मणजे

जर क्षक्ष−२=० हें समीकरण निश्चित खरें होण्यासाठीं

क्षक्ष−२= अंकगणितानें एक इंचाचा दशसहस्रांशापेक्षां कमी इतका पुरे

क्षक्ष−२=० असें समीकरण जवळ जवळ जें उत्तर स्थापितें तें उत्तर कदाचित् फार लहान किंवा मोठें असेल; ह्मणजे, क्षक्ष हा २ पेक्षां किंचित् कमी असेल किंवा किंचित् अधिक असेल. १८७,१८६ वें **पृष्ठ पहा**, त्यांत क्षक्षक्ष−१०=० या समीकरणाचा उलगडण्याचा दोन्ही तऱ्हा दाखविल्या आहेत. यावरून जरी क्ष अथवा $\sqrt[3]{१०}$ यांस खरी स्थिती नाहीं, तथापि, इच्छेप्रमाणें परस्पर जवळ जवळ होत, असे दोन अपूर्णांक काढितां येतील, ते अ आणि ब हे दोन अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण, त्यांतून पहिला अ कमी आहे, अथवा अअअ हा १० पेक्षां कमी, आणि दुसरा ब अधिक आहे, अथवा बबब हा १० पेक्षां अधिक; आणि अशा कृतीनें शुद्ध बरोबरीजवळ जाण्यास किंचित् अंतर

रहातें, तर पुढीलप्रमाणें बोलण्याची रीति कामांत घेण्याची चाल आहे; ह्मणजे १० यांस घनमूळ आहे, परंतु तें घनमूळ **असम*मान** परिमाण आहे, ह्मणजे समीपतेवांचून कांहीं पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें बरोबर दाखविलें जात नाहीं; ह्मणजे; $\sqrt[3]{१०}$ यांचे हवा तेवढा जवळ असा अपूर्णांक काढितां येईल.

तथापि हें पुढील विचारायाचें राहिलें; जरी, क्ष‌क्ष–२=० हें समीकरण इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ उलगडलें जातें, तरी त्या जवळ जवळ आलेल्या उत्तरावर अधिक कांहीं कृति लावायाची गरज पडेल. अशा कांहीं कृती असतील कीं नाहीं आणि जा परिमाणास त्या कृती लाविल्या, त्यांत कितीहि लहान चूक असली ती चूक, आरंभीं कशीहि लहान असली तरी तीपासून अशी चूक होती कीं ती कांहा मर्यादेबाहेर कमी होणार नाहीं, असा गुण त्या कृतींत असेल कीं नाहीं? उदाहरण, जेव्हां शिकणारास अंकांचें **लाग्रतंम** ह्मणजे काय हें समजूं लागल्यावर, असें एकादें कृत्य येईल कीं जाचें उत्तर क्षचें **लाग्रतंम असेल आणि त्या क्षची किंमत क्ष‌क्ष–२=० या समीकरणांतून काढायाची असेल**- तर या पुढील दोन मतिन्नेंतून शिकणारानें कोणती घ्यावी? त्यांतून एक तरी खरी असावी.

१. क्षची किंमत काढितानां जी कांहीं चूक केली असेल ती चूक क्षचें लाग्रतंम घेतानां इतकी कमी होईल, कीं लाग्रतंमांतील चूक कोणत्याहि सांगीतल्या अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल.

२. अंक काढण्यांत कितीहि लहान चूक केली असली तर लाग्रतंमांतली चूक कोणत्याहि दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां अधिक असावी, सांगीतलेला अपूर्णांक ·००१ हाच आहे असें मनांत आण.

या पुढील सूचनेवांचून वरचा दोन गोष्टींविषयीं कांहीं उत्तर देववत नाहीं;

जेव्हां एकादी नवी कृति किंवा नवी पद्धति कायांत आणितात तेव्हां जा कृत्यांत ती कृति येती त्या कृत्याचें उलगडणें जरी केवळ बरोबर होत नाहीं, तरी बरोबरीचे जवळ जवळ येईल असें मानून घेऊं नये, परंतु हें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवावें.

पूर्वी जा कृती सांगीतल्या आहेत, त्याविषयींची ही वरची गोष्ट शिकणारानें सिद्ध करण्याकडे लक्ष द्यावें. यासाठीं एक उदाहरण विस्तारपूर्वक करून दाखवितों.

$\frac{अ+ब}{क+इ}$ हें कांहीं कृत्याचें उत्तर आहे असें मनांत आण. ब आणि इ यांची कि-

* ह्मणजे १ याचीं कांहीं सममान नाहीं; ह्मणजे १ याचे कोणत्याहि भागाचा भागाचे मिळवणीनें तो दाखवितां येत नाहीं.

मत काढिते समयीं, कांहीं चूक केली आणि ती चूक इच्छेप्रमाणें हवी तितकी लहान आहे असें मनांत आण. अथवा वरचे बोलण्याचे रितीप्रमाणें बब−२=०, आणि इइइ−३=० जाचें उत्तर इच्छेप्रमाणें केवळ जवळ येतें अशा दोन समीकरणांत ब आणि इ आहेत असें घे. बचा जवळ जवळचा किंमती दाखविण्यासाठीं $ब'$ आणि $ब''$ घे, त्यांतून $ब'$ कमी, आणि $ब''$ अधिक; इचा जवळ जवळचा किमती दाखवायासाठीं $ई'$ आणि $ई''$ घे. तर वरचे पद्धतीमध्यें या जवळचा किमती मांडिल्यानें याप्रमाणें होईल,

$$\frac{अ+ब'}{क+ई'} \text{ आणि } \frac{अ+ब''}{क+ई''}$$

या दोन पद्धतींस ताडून पाहायासाठीं, पहिलींतून दुसरी वजा कर, ह्मणजे याप्रमाणें होईल,

$$\frac{अ+ब'}{क+ई'} - \frac{अ+ब''}{क+ई''} = \frac{(अक+अई''+कब'+ब'ई'') - (अक+अई'+कब''+ई'ब'')}{कक+कई'+कई''+ई'ई''}$$

$$= \frac{अ(ई''-ई')-क(ब''-ब')+(ब'ई''-ई'ब'')}{कक+(ई'+ई'')क+ई'ई''}$$

आणि १८५,१८६ पृष्ठांप्रमाणें $ई'$ याचे जवळ जवळ $ई''$ आणि $ब'$ याचे जवळ जवळ $ब''$ इच्छेप्रमाणें करितां येतील, यामुळें $ई''-ई'$ आणि $ब''-ब'$ इच्छेप्रमाणें फार लहान करितां येतील; यावरून $अ(ई''-ई')$ आणि $क(ब''-ब')$ १८८ **पृष्ठावरचे** टीपेवरून हवे तितके लहान करितां येतील. आणि त्याचसारिखे $ब'ई''-ई'ब''$ हेंहि. कां कीं ती आणि खालीं लिहिलेली पद्धति सारिखीच आहे असें दिसेल.

$$ब'(ई''-ई')-ई'(ब''-ब').$$

यावरून वरचे अपूर्णांकांचीं वेगळालीं पदें इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतात त्यावरून त्या अपूर्णांकाचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान करितां येईल. परंतु $ई'$ यापेक्षां $ई''$ नेहेमी अधिक आहे, म्हणून १८२ **पृष्ठावरचे ५ व्ये लेम्माप्रमाणें** त्या अपूर्णांकाचा छेद या पुढीलपेक्षां नेहेमी मोठा होईल,

$$कक+(ई'+ई')क+ई'ई'$$

या उदाहरणावरून दिसतें, कीं एक अपूर्णांक आहे जाचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान लहान करितां येईल, परंतु त्याचा छेद तसा लहान करितां येत नाहीं; यामुळें, तो अपूर्णांक हवा तितका लहान करितां येईल. म्हणजे, $\frac{अ+ब}{क+ इ}$ याचा नि-

रनिराळ्या किमती $\frac{अ+ब'}{क+इ'}$ आणि $\frac{अ+ब''}{क+इ''}$ हे अपूर्णांक आहेत जे इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ आणितां येतील, अथवा ज्यांचें अंतर इच्छेप्रमाणें लहान करितां येईल. पूर्वीं सारिखे विस्तीर्ण अर्थाचे भाषणानें, $\frac{अ+ब}{क+इ}$ या अपूर्णांकास वास्तवीक किंमत आहे, ब आणि इ यांचा जवळ जवळ किमती मांडिल्या असतां, त्या वास्तवीक किमतीचे जवळ जवळ होतील.

बीज गणितरूप पद्धतीमध्यें जो **क्रमनियम** आहे असें मानिलें, तो या पुढील सिद्धांतांत आहे, आणि तो नियम विशेष पक्षांनीं शिकणारानें सिद्ध करावा.

सामान्य सिद्धांत	**विशेषपक्ष**
प एक बीजरूप पद्धति आहे जीमध्यें क्ष येतो, त्या पद्धतींत क्षचे जागीं अ मांडिला असतां त्या पद्धतीची किंमत प बरोबर होईल.	$प = क्ष + क्ष^2$ $प = अ + अ^2$
क्षचे जागीं अ+म मांडला असतां प पद्धति क चे बरोबर होईल असें मनांत आण.	$क = (अ+म) + (अ+म)^2$ $= अ+अ^2 + (१+२अ)म+म^2$ $= प \quad + (१+२अ)म+म^2$
तेव्हां जर इच्छेप्रमाणें अ आणि अ+म हे हवे तितके जवळ जवळ करितां येतील; ह्मणजे, हवा तितका म लहान करितां येईल; तेव्हां **प** आणि **क** यांचें अंतर जितकें पाहिजे तितकें लहान करितां येईल.	या वरचे समीकरणां पासून $क - प = (१+२अ)म + म^2$ जर हवा तितका म लहान केला तर यांतील प्रत्येक पद हवें तितकें लहान करितां येईल.

या पूर्वीं ज्या पद्धती काढिल्या आहेत, त्यांविषयीं एक गोष्टीवर मात्र संशय येतो, म्हणजे, $\sqrt{क्ष}$, $\sqrt[3]{क्ष}$, इत्यादि, जसा जसा पक्ष असेल, तसा तसा तो संशय यांचे खऱ्या किंवा जवळजवळचा किमतीविषयीं असतो. जर इच्छेप्रमाणें हवा तितका म लहान करितां येतो, तर $\sqrt[3]{अ}$ आणि $\sqrt[3]{अ+म}$ यांचा जवळ जवळचा किंमती इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या जवळ जवळ करितां येतील कीं काय?

या प्रश्नास उत्तर देण्यासाठीं, एक सिद्धांत अगोदर सांगीतला पाहिजे, जो सिद्धांत दुसऱ्या पुष्कळ जागीं उपयोगी पडेल.

तो सिद्धांत या पुढीलप्रमाणें आहे.

$$क्ष^2 - य^2 = (क्ष - य)(क्ष + य)$$
$$क्ष^3 - य^3 = (क्ष - य)(क्ष^2 + क्षय + य^2)$$
$$क्ष^4 - य^4 = (क्ष - य)(क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3)$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$क्ष^न - य^न = (क्ष - य)(क्ष^{न-1} + क्ष^{न-2}य + \cdots + क्षय^{न-2} + य^{न-1})$$

वरचीं समीकरणें गुणाकारापासून समजतील; उदाहरण,

$$\begin{array}{l} क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 \\ क्ष - य \\ \hline क्ष^4 + क्ष^3य + क्ष^2य^2 + क्षय^3 \\ \quad - क्ष^3य - क्ष^2य^2 - क्षय^3 - य^4 \\ \hline क्ष^4 + 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad - य^4 \end{array}$$

वरचा गुणाकार, प्रवेशकांतील गुणाकाराचे दुसरे रितीप्रमाणें केला आहे असें पाहाण्यांत येईल आणि पुढेंहि या रितीप्रमाणें गुणाकार नेहेमी केले जातील.

$क्ष + य$, $\quad क्ष^2 + क्षय + य^2$, $\quad क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3$, इत्यादि.

ह्या पद्धतींचा क्रम शोधिला असतां पाहाण्यांत येईल, कीं प्रत्येक पद्धति तिचे पूर्वींचे पद्धतीस य ने गुणून, त्या गुणाकाराला क्षचा एक घात अधिक मिळवून झाली आहे. जसें,

$$क्ष^2 + क्षय + य^2 = क्ष^2 + य(क्ष + य)$$
$$क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 = क्ष^3 + य(क्ष^2 + क्षय + य^2) \quad \text{इत्यादि.}$$

वरचा तीन पद्धतींचे जागीं $प_१$, $प_२$, $प_३$, इत्यादि अशीं चिन्हें घेतलीं*, तर याप्रमाणें होईल $प_२= क्ष^२+यप_१$, $प_३=क्ष^३+यप_२$, $प_४=क्ष^४+यप_३$, इत्यादि.

$$\text{अथवा सामान्यत:}\quad प_न=क्ष^न+यप_{न-१}$$

हेंहि पहाण्यांत येईल, कीं क्षनें गुणून आणि यचा एक घात मिळवून त्याच पद्धती निघतील, जसें;

$$क्ष^२+क्षय+य^२ = य^२+क्ष(क्ष+य)$$

$$क्ष^३+क्ष^२य+क्षय^२+य^३ = य^३+क्ष(क्ष^२+क्षय+य^२) \text{ इत्यादि.}$$

अथवा $प_२ = य^२+क्षप_१$, $प_३ = य^३+क्षप_२$, $प_४=य^४+क्षप_३$, इत्यादि

अथवा सामान्यतः, $$प_न = य^न+क्षप_{न-१}$$

हा सिद्धांत याप्रमाणें मांडितां येतो;

$$क्ष^न-य^न = (क्ष-य)प_{न-१}$$

आणि याप्रमाणें सिद्ध करितां येतो;

सामान्य सिद्धांत	विशेषपक्ष
$प_न=क्ष^न+यप_{न-१}$	$प_४=क्ष^४+यप_३$
$प_न=य^न+क्षप_{न-१}$	$प_४=य^४+क्षप_३$
$(-)० = क्ष^न-य^न-(क्ष-य)प_{न-१}$	$(-)० = क्ष^४-य^४-(क्ष-य)प_३$
$क्ष^न-य^न=(क्ष-य)प_{न-१}$	$क्ष^४-य^४=(क्ष-य)प_३$

आतां $\sqrt[३]{१०}$ आणि $\sqrt[३]{१०+म}$ यांस शोधितों, जांत म इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो. यांचा जवळ जवळ किंमती दाखविण्यासाठीं य आणि क्ष घे, अशानें १८५ आणि १८६ व्ये पृष्ठावरून

* या मोठ्ये पचे पायांखालीं जे अंक आहेत त्यांसीं आणि मूळप्रकाशकचिन्हांसीं घालमेल होऊं देऊं नये. १०७ पृष्ठावरचे डाव्याचे चिन्हांप्रमाणें हे कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांस प एक, प दोन, प तीन, इत्यादि, याप्रमाणें वाचितात.

$$\left.\begin{array}{l} क्ष^{३} = (१०+म)+वि \\ य^{३} = १० \quad +व \end{array}\right\}$$ यांत वि आणि व इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतील.

$$(-) \quad क्ष^{३}-य^{३} = म+वि-व$$

$$अथवा \quad (क्ष-य)(क्ष^{२}+क्षय+य^{२}) = म+वि-व$$

$$क्ष-य = \frac{म+वि-व}{क्ष^{२}+क्षय+य^{२}}$$

आतां क्ष आणि य हे दोन्हीं २ पेक्षां मोठे आहेत, कां कीं $२^{३}=८$ म्हणून १० पेक्षां लहान आहेत; यामुळें वरचे अपूर्ण पद्धतीचा छेद १२ पेक्षां अगत्य मोठा होईल, आणि तिचे अंश इच्छेप्रमाणें लहान लहान करितां येतील. यावरून वरची अपूर्ण पद्धति जी $=क्ष-य$, ती इच्छेप्रमाणें हवी तितकी लहान करितां येती, यामुळें इच्छेप्रमाणें क्ष आणि य हवे तितके जवळ जवळ करितां येतील. परंतु क्ष आणि य हे $\sqrt[३]{१०+म}$ आणि $\sqrt[३]{१०}$ यांचा जवळ जवळचा किमती आहेत.

शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत उलगडून सिद्ध करावा;

$$क्ष^{२}-य^{२} = (क्ष+य)(क्ष-य)$$

$$क्ष^{४}-य^{४} = (क्ष+य)(क्ष^{३}-क्ष^{२}य+क्षय^{२}-य^{३})$$

$$क्ष^{६}-य^{६} = (क्ष+य)(क्ष^{५}-क्ष^{४}य+क्ष^{३}य^{२}-क्ष^{२}य^{३}+क्षय^{४}-य^{५})$$

इत्यादि इत्यादि

$$क्ष^{३}+य^{३} = (क्ष+य)(क्ष^{२}-क्षय+य^{२})$$

$$क्ष^{५}+य^{५} = (क्ष+य)(क्ष^{४}-क्ष^{३}य+क्ष^{२}य^{२}-क्षय^{३}+य^{४})$$

इत्यादि इत्यादि

आतां घात आणि मूळप्रकाशक चिन्हांची सामान्य सिद्धता दाखवितों.

क्षचे घाताचा कोणताहि घात करायाचा असेल, तर दोन्ही घातांचीं घातप्रकाशक चिन्हें परस्पर गुणून तो गुणाकार घाताचें प्रकाशक चिन्ह होईल;

उदाहरण,

$(क्ष^{३})^{४} = क्ष^{३\times४} = क्ष^{१२}$, कां कीं $(क्ष^{३})^{४} = क्ष^{३}\cdot क्ष^{३}\cdot क्ष^{३}\cdot क्ष^{३} = क्ष^{३+३+३+३}$

या सारिखें,

$$(क्ष^{२})^{१२} = क्ष^{२४} \qquad (क्ष^{३})^{६} = क्ष^{१८} \qquad (क्ष^{अ})^{ब} = क्ष^{अब}$$

$$(क्ष^{अ+ब})^{अ-ब} = क्ष^{अ^{२}-ब^{२}} \qquad (क्ष^{अ-ब})^{अ+ब} = क्ष^{अ^{२}-ब^{२}}$$

$$(क्ष^{म})^{न} = (क्ष^{न})^{म} = क्ष^{मन}$$

गुण्य आणि गुणक यांचे घातांचे गुणाकाराबरोबर गुणाकाराचा घात आहे.

जसें, $(अबक)^{३} = अबक\cdot अबक\cdot अबक = अअअबबबककक = अ^{३}ब^{३}क^{३}$

$$(अब^{२}क^{३})^{४} = अ^{४}(ब^{२})^{४}(क^{३})^{४} = अ^{४}ब^{८}क^{१२}$$

$$(अ^{म}ब^{न}क^{प})^{र} = (अ^{म})^{र}(ब^{न})^{र}(क^{प})^{र} = अ^{मर}ब^{नर}क^{पर}$$

हीच रीति भागाकारास लागती. जसें, $\left(\frac{अ}{ब}\right)^{३} = \frac{अ^{३}}{ब^{३}}$; कां कीं पहिलें पद याज बरोबर आहे $\frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब}$, अथवा १८१ पृष्ठावरच्या २ लेम्मा प्रमाणें $= \frac{अअअ}{बबब}$

मूळाचें मूळ तेंच आहे, ज्याचें प्रकाशक चिन्ह दोन पहिल्या सांगीतलेल्या दोन मूळांचे प्रकाशक चिन्हाचे गुणाकारा बरोबर आहेत. जसें घनमूळ अथवा त्रिघातमूळ याचें चतुर्घातमूळ, बाराघातमूळ आहे. हें सिद्ध करायासाठीं, क्ष याचे त्रिघातमूळाचें चतुर्घातमूळ दाखवायासाठीं य घे. तेव्हां

$$\sqrt[४]{\sqrt[३]{क्ष}} = य \therefore \sqrt[३]{क्ष} = य^{४} \qquad क्ष = (य^{४})^{३} = य^{१२}$$

अथवा $य = \sqrt[१२]{क्ष}$, परंतु $य = \sqrt[४]{\sqrt[३]{क्ष}}$

१७९ व्ये **पृष्ठावरचे** ६ व्या सिद्धांतांत असें दाखविलें गेलें कीं क्षला अंकगणित रूपाचें केवळ एक घनमूळ, किंवा १२ घातमूळ होऊं शकतें; आणि घनमूळाला अंकगणितरूपानें केवळ एक चतुर्घातमूळ होऊं शकतें. यावरून वरची कृति सिद्ध झाली; ह्मणजे क्षचे **एक** घनमूळाचें **एक** चतुर्घातमूळ हें क्षचें **एक** १२ घातमूळ आहे; आणि प्रत्येक तऱ्हेचे मूळाचें अंकगणितरूपानें केवळ एक मूळ आहे, असें वरचे गोष्टीवरून दाखवितां येतें. परंतु जीं बीजरूप चिन्हें क्ष चीं मूळें आहेत, त्यांस अंकगणितरूपाचा अर्थ असेल किंवा नसेल, अशा या सर्व चिन्हांविषयीं मनन करिते समयीं, शिकणारानें स्मरण ठेवावें, कीं वरचे कृतीपासून हें सिद्ध होत नाहीं कीं क्ष चे **हरएक** तृतीय घातमूळाचें **हरएक** चतुर्घातमूळ क्ष चें १२ घातमूळ आहे. अशी गोष्ट घडेल. परंतु अद्यापि सिद्ध झाली नाहीं.

त्याच रितीनें सिद्ध करितां येतें, कीं

$$\sqrt{\sqrt{क्ष}} = \sqrt[4]{क्ष}; \quad \sqrt{\sqrt[3]{क्ष}} = \sqrt[6]{क्ष} = \sqrt[3]{\sqrt{क्ष}}$$

$$\sqrt[अ]{\sqrt[ब]{क्ष}} = \sqrt[अब]{क्ष} = \sqrt[ब]{\sqrt[अ]{क्ष}}; \quad \sqrt[5]{\sqrt[5]{क्ष}} = \sqrt[25]{क्ष}$$

गुणाकाराचें मूळ, गुण्यगुणकाचे मूळांचा गुणाकार केल्यानें निघतें. जसें.

$$\sqrt[4]{अबक} = \sqrt[4]{अ} \times \sqrt[4]{ब} \times \sqrt[4]{क} \quad \text{. . . . . (अ)}$$

वरचे दोन पद्धतींचा चतुर्घात एकच आहे. ह्मणजे, अबक. कां कीं **१७४ व्ये पृष्ठावरचे** व्याख्यानाप्रमाणें

$$(\sqrt[4]{अबक})^4 = अबक$$

आणि **२०० पृष्ठावरून,**

$$(\sqrt[4]{अ} \times \sqrt[4]{ब} \times \sqrt[4]{क})^4 = (\sqrt[4]{अ})^4 \times (\sqrt[4]{ब})^4 \times (\sqrt[4]{क})^4 = अ \times ब \times क$$

ह्मणजे, (अ) समीकरणाची प्रत्येक बाजू अबकचें चतुर्घातमूळ आहे. परंतु अबक यास अंकगणितरूपाचें केवळ एक चतुर्घातमूळ आहे; यामुळें (अ) समीकरणाची प्रत्येक बाजू तें मूळ आहे; आणि त्यामुळें त्या दोन बाजू बरोबर आहेत. तशेच रितीनें सिद्ध करितां येतें, कीं

$\sqrt{अबक} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब} \times \sqrt{क}$ $\qquad$ $\sqrt{अब^{२}} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब^{२}} = ब\sqrt{अ}$

$\sqrt[३]{अ^{२}ब^{२}क^{४}} = \sqrt[३]{अ^{२}} \times \sqrt[३]{ब^{२}} \times \sqrt[३]{क^{४}}$ $\qquad$ $\sqrt[४]{३२} = \sqrt{१६} \times \sqrt[४]{२} = २\sqrt[४]{२}$

हीच रीति भागाकारास लागेल, असें. $\sqrt[३]{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt[३]{अ}}{\sqrt[३]{ब}}$; कां कीं या दोहोंचा घन एकच आहे असें काढितां येईल, ह्मणजे, $\frac{अ}{ब}$.

जर क्षचा भलता घात वाढविला, आणि त्या घाताचें मूळ काढिलें, तर कृतीचा क्रम बदल केल्यानें उत्तरामध्यें कांहीं फेर पडत नाहीं.

ह्मणजे, $\sqrt[३]{क्ष^{४}}$ आणि $\{\sqrt[३]{क्ष}\}^{४}$ हीं दोन्ही बरोबर आहेत

हें सिद्ध करायासाठीं, २०० वें पृष्ठ पाहा,

$$\sqrt[३]{क्ष^{४}} = \sqrt[३]{क्षक्षक्षक्ष} = \sqrt[३]{क्ष} \times \sqrt[३]{क्ष} \times \sqrt[३]{क्ष} \times \sqrt[३]{क्ष} = \{\sqrt[३]{क्ष}\}^{४}$$

त्याचप्रमाणें. $\sqrt[अ]{क्ष^{ब}} = (\sqrt[अ]{क्ष})^{ब}$; $\qquad$ $\sqrt{क्ष^{३}} = (\sqrt{क्ष})^{३}$.

$\sqrt[अ]{क्ष^{ब}}$ या पद्धतींतले, जर अ आणि ब हे दोन्ही एकच अंकानें गुणिले किंवा भागिले, तर त्या पद्धतीचे किमतींत फेर पडत नाहीं. ह्मणजे,

$$\sqrt[मअ]{क्ष^{मब}} = \sqrt[अ]{क्ष^{ब}}$$

कारण, पूर्वीं दाखविलें गेलें, कीं

$\sqrt[\text{मअ}]{\text{क्ष}^{\text{मब}}} = \sqrt[\text{अ}]{\sqrt[\text{म}]{\text{क्ष}^{\text{मब}}}}$ हीं याप्रमाणें आहेत $\sqrt[\text{अ}]{\sqrt[\text{म}]{(\text{क्ष}^{\text{ब}})^{\text{म}}}} = \sqrt[\text{अ}]{\text{क्ष}^{\text{ब}}}$

कां कीं $\sqrt[\text{म}]{(\text{क्ष}^{\text{ब}})^{\text{म}}} = \text{क्ष}^{\text{ब}}$

त्याचसारिखें, $\sqrt[६]{\text{अ}^{४}} = \sqrt[३]{\text{अ}^{२}} = \sqrt[९]{\text{अ}^{६}} = \sqrt[१२]{\text{अ}^{८}}$

घाताचें मूळ काढायाचें असेल, तेव्हां जर घातप्रकाशक आणि मूळप्रकाशक यांचा भागाकार निःशेष होत असल्यास, घातप्रकाशकास मूळप्रकाशकानें भाग.

जसें, $\sqrt[४]{\text{क्ष}^{१२}} = \text{क्ष}^{\frac{१२}{४}} = \text{क्ष}^{३}$. कां कीं $\text{क्ष}^{१२} = (\text{क्ष}^{३})^{४}$; यामुळें $\sqrt[४]{\text{क्ष}^{१२}} = \text{क्ष}^{३}$.

त्याचसारिखें, $\sqrt{\text{क्ष}^{१६}} = \text{क्ष}^{८}$, $\sqrt{\text{क्ष}^{२०}} = \text{क्ष}^{१०}$; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

जेव्हां घाताचें प्रकाशक चिन्ह मूळाचे प्रकाशकानें निःशेष भागिलें जात नाहीं, जसें, $\sqrt[३]{\text{क्ष}^{७}}$, यापक्षींहि, अद्यापि बीजगणिताचे तऱ्हेनें करण्याची रीति कांहीं सांपडली नाहीं, जिणेंकरून $\sqrt[३]{\text{क्ष}^{७}}$ यास याचें $\sqrt[३]{}$ चिन्ह नाहींसें होई* असें रूप देववत नाहीं. यामुळें, क्ष हा कोणत्या पूर्ण किंवा अपूर्णांकाचे स्थळीं आहे हें काढावें, आणि नंतर† त्या कि-

---

* याप्रमाणें कृति करावी. $\text{क्ष}^{७} = \text{क्ष}^{६}.\text{क्ष}$, तर $\sqrt[३]{\text{क्ष}^{७}} = \sqrt[३]{\text{क्ष}^{६} \times \text{क्ष}} = \sqrt[३]{\text{क्ष}^{६}} \times \sqrt[३]{\text{क्ष}} = \text{क्ष}^{२} \sqrt[३]{\text{क्ष}}$; यांत तरी $\sqrt[३]{}$ हें चिन्ह राहिलें.

† बीजगणित आणि अंकगणित यांचे कृतीमध्यें कांहीं फेर आहे असें समजलें पाहिजे. बीजगणितामध्यें उत्तरें काढितात असें वास्तवीक ह्मणवत नाहीं, परंतु उत्तरांस केवळ असें रूप देववतें कीं जा रूपापासून त्याची किंमत अंकगणित रीतीनें सहज काढितां येईल. उदाहरण, अ आणि ब यांची बेरीज काय आहे? खरें ह्मटलें असतां अ+ब हें या प्रश्नाचें उत्तर नाहीं, परंतु त्याचें दर्शक मात्र आहे, ह्मणून अ आणि ब हे कोणत्ये अंकस्थळीं आहेत, हें कळे पावेतों प्रश्नाचें योग्य उत्तर काढण्यास थांबलें पाहिजे. परंतु ८अ+५अ यांची बेरीज काय आहे? असा प्रश्न केल्यावर पूर्वींपेक्षां एक पायरी पुढें जाऊं शकतों; कां कीं, ८अ+५अ ही पद्धती जरी बीजगणितरूप दर्शक आहे, तथापि या विद्येचे भाषणानें जें अति सरळरूप होऊं शकतें तें रूप नाहीं. परंतु तें अति सरळरूप १३ अ हें आहे; तथापि अ कोणत्या अंकस्थळीं आहे हें कळेपावेतों उत्तर सांपडत नाहीं. उलगडण्याचे अशे क्रमास पोंचल्यावर पुढें उत्तराचे जवळ जाण्यासाठीं बीज सोडून अंकगणित घ्यावें लागतें, तेव्हां असें ह्मणतात

मतीनें $\sqrt[३]{क्ष^{७}}$ अथवा $क्ष^{२}\sqrt[३]{क्ष}$ याची किंमत अंकगणित रितीनें काढायाची मात्र राहिली.

$\sqrt[३]{क्ष^{७}}$ यास दर्शविण्याचे रितीविषयींचा मात्र प्रश्न राहिला, आणि तो प्रश्न १७५ आणि १७६ व्ये पृष्ठांवर हा प्रश्न मनांत आला, आणि तेथें कळलें, कीं $\sqrt{क्ष}$, $\sqrt[३]{क्ष}$, इत्यादिकांचे जागीं $क्ष^{\frac{१}{२}}$, $क्ष^{\frac{१}{३}}$, इत्यादि अशे रूपानें मांडणें एकपक्षीं मोठ्ये सोयीस पडलें असतें. परंतु त्या ठिकाणीं इतकेंच सांगून पुढें कांहीं लिहिलें नाहीं. कां कीं, **व्यवहारी अपूर्णांकांस जा रिती लाविता येतात, त्यांहून निराळ्या रिती अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून, अथवा पूर्णांक प्रकाशक चिन्हांस जा रिती लागतात त्यांहून निराळ्या रिती अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून**, या प्रकाशक चिन्हें लिहिण्याचे तऱ्हेपासून मूळांचे सर्व दुर्बोध संबंध जाणण्यास कांहीं स्पष्ट कारण नव्हतें. पूर्ण घातप्रकाशकांविषयीं जा रिती सिद्ध केल्या त्यांचीं, आणि अपूर्ण घातप्रकाशकांविषयींचा जा रितींचा शोध करायाचा आहे, या दोहोंचीं उदाहरणें दोन उभ्ये ओळींत लिहून दाखवितों; आतां हें विचारायाचें आहे, कीं पुढें लिहिलेल्या कल्पनेवरून दुसरे ओळींतले **सिद्धांत खरे आहेत कीं काय?** ती कल्पना याप्रमाणें

जर $क्ष^{\frac{म}{न}}$ हा $\sqrt[न]{क्ष^{म}}$ यास दाखवितों.

$क्ष^{६}\times क्ष^{४}=क्ष^{६+४}=क्ष^{१०}$	$क्ष^{\frac{२}{३}}\times क्ष^{\frac{१}{२}}=क्ष^{\frac{२}{३}+\frac{१}{२}}=क्ष^{\frac{७}{६}}$ हें खरें आहे कीं नाहीं!
$\frac{क्ष^{६}}{क्ष^{४}}=क्ष^{६-४}=क्ष^{२}$	$क्ष^{\frac{२}{३}}\div क्ष^{\frac{१}{२}}=क्ष^{\frac{२}{३}-\frac{१}{२}}=क्ष^{\frac{१}{६}}$ हें खरें०?
$(क्ष^{६})^{२}=क्ष^{६\times२}=क्ष^{१२}$	$(क्ष^{\frac{२}{३}})^{\frac{२}{५}}=क्ष^{\frac{२}{३}\times\frac{२}{५}}=क्ष^{\frac{४}{१५}}$ हें खरें०?
$\sqrt[३]{क्ष^{६}}=क्ष^{\frac{६}{३}}=क्ष^{२}$	$\sqrt[३]{क्ष^{\frac{४}{५}}}=क्ष^{\frac{४}{५}\div३}=क्ष^{\frac{४}{१५}}$ हें खरें०?

की बीजगणिताचे शेवटील रूपास पोंचला. जसें अ+ब हें शेवटील रूप आहे; परंतु ८अ+५अ हें तसें नाहीं. पुनः $\sqrt[३]{क्ष^{७}}$, अथवा $क्ष^{२}\sqrt[३]{क्ष}$, हें शेवटील रूप आहे; $\sqrt[३]{क्ष^{१२}}$ हें तसें नाहीं.

पहिल्यानें हें लक्षांत येतें, कीं ज्या तऱ्हेनें पूर्वींचा दुसरा विस्तार झाला होता, त्या तऱ्हेनें वरचे शेवटील रितीपासून हा विस्तार होतो. यावरून हेंच कळलें कीं जर ब हा अनें भागिला जातो, तर $\text{क्ष}^{\frac{\text{ब}}{\text{अ}}}$ हा $\sqrt[\text{अ}]{\text{क्ष}^{\text{ब}}}$ याचा खरा दर्शक आहे. परंतु जेव्हां ब हा अनें भागिला जात नाहीं. तेव्हां $\text{क्ष}^{\frac{\text{ब}}{\text{अ}}}$ यास कांहीं अर्थ नाहीं. तर त्याला अर्थ देतों; ह्मणजे $\sqrt[\text{अ}]{\text{क्ष}^{\text{ब}}}$, हें कसेंहि असो तथापि हें पद त्यास दर्शवितें, असें ह्मणतों. आतां या नवे चिन्हास ज्या रिती लावल्या पाहिजेत त्यांचा शोध करितों. खालच्या पहिल्या उभ्ये ओळींमध्यें सामान्य पक्ष दाखविला आहे आणि दुसऱ्ये उभ्ये ओळींत विशेष पक्ष दाखविला आहे. ज्या ज्या पृष्ठांवर वेगळाल्या रिती आहेत, त्या पृष्ठांचा अंक एक्ये बाजूस मांडिला आहे.

$\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \times \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ हें काय आहे ?

$\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}$ याचा अर्थ $\sqrt[\text{न}]{\text{क्ष}^{\text{म}}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}}}$

$\text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ याचा अर्थ $\sqrt[\text{क}]{\text{क्ष}^{\text{प}}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{नप}}}$

यामुळें. $\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \times \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$

$= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}}} \times \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{नप}}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}} \times \text{क्ष}^{\text{नप}}}$

१७१ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}+\text{नप}}}$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$\text{क्ष}^{\frac{\text{मक}+\text{नप}}{\text{नक}}}$

परंतु, $\frac{\text{मक}+\text{नप}}{\text{नक}} = \frac{\text{म}}{\text{न}} + \frac{\text{प}}{\text{क}}$

यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \times \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}} = \text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}} + \frac{\text{प}}{\text{क}}}$

$\text{क्ष}^{\frac{2}{3}} \times \text{क्ष}^{\frac{1}{2}}$ हें काय आहे?

$\text{क्ष}^{\frac{2}{3}}$ याचा अर्थ $\sqrt[3]{\text{क्ष}^{2}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[6]{\text{क्ष}^{3}}$

$\text{क्ष}^{\frac{1}{2}}$ याचा अर्थ $\sqrt{\text{क्ष}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[6]{\text{क्ष}^{3}}$

यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{2}{3}} \times \text{क्ष}^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt[6]{\text{क्ष}^{4}} \times \sqrt[6]{\text{क्ष}^{3}}$

२०२ पृ० $= \sqrt[6]{\text{क्ष}^{4} \times \text{क्ष}^{3}}$

१७१ पृ० $= \sqrt[6]{\text{क्ष}^{7}}$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$\text{क्ष}^{\frac{7}{6}}$

परंतु, $\frac{7}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{2}{3}} \times \text{क्ष}^{\frac{1}{2}} = \text{क्ष}^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$

आतां हीं पुढील पृष्ठांचे खुणेंवांचून, अधिक संक्षेपानें दाखविलीं आहेत.

$\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \div \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ हें काय आहे ?

म्हणजे $\sqrt[\text{न}]{\text{क्ष}^{\text{म}}} \div \sqrt[\text{क}]{\text{क्ष}^{\text{प}}}$ हें आहे

अथवा $\sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}}} \div \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{नप}}}$

अथवा $\sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}} \div \text{क्ष}^{\text{नप}}}$

अथवा $\sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}-\text{नप}}}$

अथवा $\text{क्ष}^{\frac{\text{मक}-\text{नप}}{\text{नक}}}$

परंतु, $\frac{\text{मक}-\text{नप}}{\text{नक}} = \frac{\text{म}}{\text{न}} - \frac{\text{प}}{\text{क}}$

यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \div \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}} = \text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}} - \frac{\text{प}}{\text{क}}}$

$\left(\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}\right)^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ हें काय आहे ?

याचा अर्थ $\sqrt[\text{क}]{\left\{\sqrt[\text{न}]{\text{क्ष}^{\text{म}}}\right\}^{\text{प}}}$ हा आहे

अथवा २०२ पृ० $\sqrt[\text{क}]{\sqrt[\text{न}]{(\text{क्ष}^{\text{म}})^{\text{प}}}}$

अथवा २०० पृ० $\sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मप}}}$

अथवा $\text{क्ष}^{\frac{\text{मप}}{\text{नक}}}$

परंतु, $\frac{\text{मप}}{\text{नक}} = \frac{\text{म}}{\text{न}} \times \frac{\text{प}}{\text{क}}$

यामुळें, $\left(\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}\right)^{\frac{\text{प}}{\text{क}}} = \text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}} \times \frac{\text{प}}{\text{क}}}$

$\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \div \text{क्ष}^{\frac{१}{२}}$ हें काय आहे ?

म्हणजे $\sqrt[३]{\text{क्ष}^{२}} \div \sqrt{\text{क्ष}}$ हें आहे

अथवा $\sqrt[६]{\text{क्ष}^{४}} \div \sqrt[६]{\text{क्ष}^{३}}$

अथवा $\sqrt[६]{\text{क्ष}^{४} \div \text{क्ष}^{३}}$

अथवा $\sqrt[६]{\text{क्ष}^{४-३}}$

अथवा $\text{क्ष}^{\frac{१}{६}}$

परंतु, $\frac{१}{६} = \frac{२}{३} - \frac{१}{२}$

यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \div \text{क्ष}^{\frac{१}{२}} = \text{क्ष}^{\frac{१}{६}}$

$\left(\text{क्ष}^{\frac{४}{५}}\right)^{\frac{२}{३}}$ हें काय आहे ?

याचा अर्थ $\sqrt[३]{\left\{\sqrt[५]{\text{क्ष}^{४}}\right\}^{२}}$ हा आहे

अथवा २०२ पृ० $\sqrt[३]{\sqrt[५]{(\text{क्ष}^{४})^{२}}}$

अथवा २०० पृ० $\sqrt[१५]{\text{क्ष}^{८}}$

अथवा $\text{क्ष}^{\frac{८}{१५}}$

परंतु, $\frac{८}{१५} = \frac{४}{५} \times \frac{२}{३}$

यामुळें, $\left(\text{क्ष}^{\frac{४}{५}}\right)^{\frac{२}{३}} = \text{क्ष}^{\frac{४}{५} \times \frac{२}{३}}$

या शेवटील कृतींत, २०४ व्ये पृष्ठावरचे तिसऱ्ये आणि चवथ्ये प्रश्नांचीं उत्तरें आहेत.

१७३ आणि १७४ पृष्ठ पाहून, स्मरण केल्यानें जा मूळ रिती तेथें कामांत आणिल्या, त्या अपूर्ण घातमूळप्रकाशक चिन्हांस लावितां

येतात, त्या एथें सिद्ध झाल्या त्यावरून ऋण अपूर्ण घातमूळप्रकाशकांचा अर्थ, आणि त्यांविषयींचा रिती स्थापितां येतील. जसें

$$क्ष^{-\frac{२}{३}} \text{ हे } \frac{१}{क्ष^{\frac{२}{३}}} \text{ अथवा } \frac{१}{\sqrt[३]{क्ष^{२}}} \text{ अथवा } \sqrt[३]{\left(\frac{१}{क्ष}\right)^{२}} \text{ याचेजागीं आहेत.}$$

वर्ग, घन आणि चतुर्घातमूळांविषयीं किती **बीजगणित रूप** मूळें असतील, आणि तीं कोणकोणत्या जातींचीं आहेत, तीं आतां शोधितों. यापुढें जाण्यास सद्यः शिकणारास अवघड पडेल.

पहिल्यानें वर्गमूळाविषयीं. +१ आणि −१ हीं दोन्हीं +१याचीं वर्गमूळें, आणि +अ आणि −अ हीं दोन्हीं, + अअ यांचीं वर्गमूळें आहेत, हें स्पष्ट आहे. कां कीं,

$$-१\times-१=+१ \qquad -अ\times-अ=+अअ$$

$$+१\times+१=+१ \qquad +अ\times+अ=+अअ$$

आतां हेंच विचारायाचें आहे, कीं +१ याचीं दोन वर्गमूळांपेक्षां अधिक वर्गमूळें होऊं शकतात कीं नाहीं ? +१ याचें भलतें कांहीं वर्गमूळ क्ष असो, तर **वर्गमूळ शब्दाचे व्याख्याना प्रमाणें**, क्षक्ष=१, अथवा क्षक्ष−१=० असें असावें, परंतु क्षक्ष−१ = (क्ष+१)(क्ष−१); यामुळें (क्ष+१)(क्ष−१) =०. यावरून*, क्ष+१ अथवा क्ष−१=०. क्ष+१=० याचें उत्तर क्ष=−१ हें मात्र आहे; क्ष−१ =०, याचें उत्तर क्ष=+१ हें आहे; यामुळें +१ आणि −१ हीं मात्र १ याचीं वर्गमूळें आहेत. हीच कृति, क्षक्ष=अअ, अथवा (क्ष−अ)(क्ष+अ) =० यास लावितां येती.

यामुळें ऋण परिमाणाला, धन किंवा ऋण परिमाणरूप वर्गमूळ होऊं शकत नाहीं; कां कीं त्यांतून, कोणतेंही एक, त्याणें तेंच गुणिलें

---

* जेव्हां याप्रमाणें कांहीं गुणाकार अब=०, तेव्हां त्यांतून अ किंवा ब एक तरी ० असावें, कां कीं जर दोहोंलाहि किंमत असेल, तर चालते रितीप्रमाणें, त्यांचे गुणाकारासहि कांहीं किंमत होईल.

असतां, गुणाकार धन होतो. तथापि $\sqrt{-1}$ हें कांहींच **परिमाण** नाहीं असें ह्मणवणार नाहीं, कां कीं गणिताचे रितीवरून जीं चिन्हें निघतात त्यांस तें नांव देण्यास ठरविलें. परंतु जेव्हां $\sqrt{-1}$ येतो तेव्हां तो ११९ व्या पृष्ठावर जो −१ आहे त्याचे अर्थाचा आहे. ह्मणजे तो −१ कृत्याचे खोट्ये कल्पनेचा दाखला आहे, याकरितां कृत्याला, अगत्यानुरूप, तपासून फिरविलें पाहिजे, किंवा त्याचा विस्तार केला पाहिजे, किंवा त्याला टाकून दिलें पाहिजे. परंतु−१ याचा अर्थ ज्या क्रमांनीं स्थापिला आहे, त्याजवर लक्ष्य दिलें असतां, ते या पुढीलप्रमाणें आहेत असें कळेल;

१. पूर्वी ३−४ इत्यादि, अशे जातीचे चिन्हांचे संयोग आढळले, आणि ३, −, ४, या चिन्हांस जो तेव्हां अर्थ होता त्याचे विरुद्ध कृति करण्याचें त्या संयोगांत सुचविलें होतें.

२. ज्या कृत्यांपासून अशे तऱ्हेचे संयोग उत्पन्न झाले, त्यांस तपासून कृति पुनः केल्यावांचून तीं नीट कशीं करावीं हें समजलें; यावरून ३−४ इत्यादि, पद्धतींपासून काय समजावें, कीं तेणेंकरून त्या केव्हां येतील याचें अनुमान करितां यावें, अथवा त्या आल्या असतां त्यांचा अर्थ सांगतां यावा याचा निश्चय केला.

३. ३−४ इत्यादि यांस चालती रीति लाविल्यानें काय काय उत्पन्न होईल हें, आणि खोट्ये कल्पनेचें नीट करणें कृतीचा कोणत्याहि पुढल्या क्रमापावेतों बंद ठेविलें असतां काय घडेल हें शोधिलें.

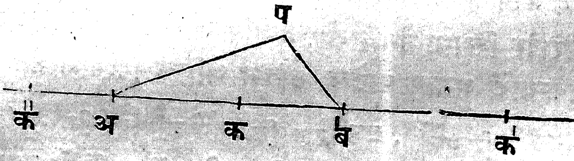
४. पूर्वीं जें सर्व सांगीतलें त्यावरून, व्यवहारांतील शब्दांचे अर्थाचा विस्तार अशे तऱ्हेनें केला, कीं त्यापूर्वीं जीं केवळ, खोट्ये कल्पनेचीं उत्तरें होतीं तीं, नियमित अर्थाचीं असून ओळखीचीं चिन्हें झालीं, आणि तीं सिद्ध केलेल्या रितीनीं, कामांत आणिलीं गेलीं, अशानें यांत आणि संकोचित् अर्थानें कामांत घेतलीं होतीं त्यांत कांहीं भेद नव्हता.

५. सर्व पक्षांत असें दिसून आलें, कीं जेव्हां निघालेलें उत्तर केवळ अंकगणित रूपाचें होतें, ह्मणजे जेव्हां पदांस संकोचित् अर्थ होता, तेव्हां तें उत्तर यथायोग्य आणि समजायाजोगें होतें. तेव्हां पूर्वींचे क्रमाचे संकोचित् अर्थ ठेऊन न समजाया जोगे चिन्हानें, कृति करून उत्तरामध्यें कांहीं चूक राहिली नव्हती; परंतु जरी आपल्ये कृतीचा क्रम

उलटून, प्रत्येक क्रम अंकगणितरूपानें केला असता, तर उत्तर वरचे कृतीचे उत्तरासारिखेंच आलें असतें असें सर्व पक्षांत दिसून आलें.

यावरून दिसण्यांत आलें कीं, ३ अशी कांहीं संख्येचे पूर्वीं + हें चिन्ह असलें, तर त्याचा अर्थ मिळवणीचा आहे, तें + चिन्ह −३ यांचे पूर्वीं आलें असतां, पद्धतीचे पूर्व भागास −३ जोडायाचे आहेत असा अर्थ सुचवितें; आणि त्यावरून दिसण्यांत आलें, कीं + (−६)−(+४) या- पद्धतीमध्यें + आणि − यांचा विस्तार अर्थ जरी सोडववत नाहीं, तथापि +६+३ हें जरी कित्येक विस्ताररूप कृतींचें उत्तर आहे, तरी त्यास गणितरूपाचा अर्थ होतो.

$\sqrt{-१}$, $\sqrt{-२}$, इत्यादि यांस प्रस्तुत कांहीं अर्थ नाहीं, आणि विरुद्ध रूपाचीं आहेत, तथापि वरचे सांगीतलेल्या कृतीचे क्रमाप्रमाणें + आणि − यांचे अर्थाचा अधिक विस्तार करून, $\sqrt{-१}$, $\sqrt{-२}$, इत्यादि यांस कामांत आणण्याची आणि याचा अर्थ करण्याची योग्य रीति देतां येईल, असें वरचे सगळ्ये गोष्टीवरून, **अनुमान** करितां येतें. केवळ **अनुमान** असें ह्मणतों, कां कीं जरी एकच उदाहरणापासून कार्य झालें, तथापि जा रितीवरून तें झालें ती रीति सर्वत्र लागू पडेल असा निश्चय करवत नाहीं. पूर्वीं अशी रीति सांगीतली आहे, परंतु त्या रिती विषयीं कांहीं एथें सांगण्याचा अभिप्राय नाहीं. ती समजून घेण्यास जागा पुष्कळ राहिली आहे इतकें मात्र एथें दाखवितों.



कोणी पुरुष **अ** स्थळापासून निघून, प्रथम कोठे तरीं **अब** रेघेवर, किंवा तिचे वाढविलेल्या दोन टोंकांवर थांबून, शेवटीं **ब** स्थळीं थांबतो असें मनांत आण; आणि उजव्ये कडेस मोजलेलें अंतर धन आणि डाव्येकडेस मोजलेलें अंतर ऋण अशी कल्पना केली असतां, त्याचा पहिल्या स्थळापासून जितका लांब जातो त्या सर्व अंतरांतून + **अब** याचें अंतर मागल्ये रितीचे सहाय्यावरून काढितां येतें, तें याप्रमाणें;

१. जर तो क जवळ थांबतो, तर (+अक) + (+ कब) = + अब

२. जर तो क' जवळ थांबतो, तर (+अक') + (−क'ब) = + अब

३. जर तो क'' जवळ थांबतो, तर (−अक'') + (+क''ब) = + अब

आतां पहा, जर तो पुरुष अब रेघ अथवा तिचा वाढविलेला भाग या वरून निघून दुसऱ्येकडे जाईल, ह्मणजे जर तो अप, पब, रेघेवरून जाईल, तर अप इत्यादिकांचे संबंधाचीं कांहीं चिन्हें नाहींत; तर त्यांचे जागीं ¶ असें कांहीं नवें चिन्ह घेऊन मांडलें असतां याप्रमाणें होईल

¶ (¶ अप) ¶ (¶ पब) = + अब

यावरून बीजगणित लागू करण्यांत असें दिसतें, कीं कांहीं नवीं चिन्हें कामांत घ्यावीं लागतील, आणि $\sqrt{-१}$, इत्यादि अशीं निरर्थक चिन्हें आढळतील. तर+ आणि− या चिन्हांस विस्तारपूर्वक कामांत आणून, जीं जीं नवीं चिन्हें या पुढें योजून काढावीं लागतील त्यांचे जागीं, $\sqrt{-१}$ इत्यादि, हें येई असा कांहीं विस्तार करितां येणार नाहीं कीं काय ? ही गोष्ट शिकणारास केवळ अनुमान करण्याविषयीं आहे, परंतु यावरून त्यास ही पुढील कृति करणें योग्य आहे.

१. $\sqrt{-१}$. इत्यादि तऱ्हेचा पद्धतींस बीजगणिताचा रिती लाविल्यानें काय होतें हें पहाण्याकरितां मात्र त्या रिती त्यांस लाव, परंतु त्यांचे उत्तरावर विश्वास ठेवूं नको, तथापि पुष्कळ उत्तरांचे अनुभवावरून विश्वास ठेवण्याचें अगत्य वाटेल, त्यांहून अधिक विश्वास ठेवूं नको.

२. कृति करितानां $\sqrt{-१}$, इत्यादि तऱ्हेची पद्धती नाहींशी झाली असें जेव्हां दिसेल, तेव्हां उत्तर खरें आहे कीं नाहीं तें तपास.

आतां घनमूळाचा विचार करितों. क्ष हा १ याचें कोणतेंहि घनमूळ असो. तेव्हां $क्ष^३ = १$, अथवा $क्ष^३ - १ = ०$; $क्ष^३ - १ = (क्ष - १)(क्ष^२ + क्ष + १) = ०$ १९३ पृष्ठ पहा, आणि य = १ असें घे;

यामुळें, $क्ष - १ = ०$. अथवा $क्ष^२ + क्ष + १ = ०$

पहिल्यापासून क्ष=१, असें निघतें. आणि स्पष्ट आहे, कीं १ हा १ चें

घनमूळ आहे. पुढला अध्याय समजल्याचे पूर्वीं दुसऱ्या रूपाचें उलगडणें शिकणाराचानें करवणार नाहीं; परंतु एथें जाणावें कीं त्यास दोन उत्तरें आहेत, आणि दोहोंमध्यें $\sqrt{-}$अ हें चिन्ह ज्याचा अर्थ अजून कळला नाहीं तें त्यांत येतें. तीं दोन उत्तरें याप्रमाणें आहेत

$$\frac{-१+\sqrt{-३}}{२} \text{ आणि } \frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$$

यांतून दुसरें उत्तर शिकणारानें स्वबुद्धीनें काढावें. आणि पहिल्याविषयीं ह्या पुढील गोष्टी दाखवितों; १. $\sqrt{-३}$ यास जर चालत्या रिती लागतात असें मानिलें, तर तें क्ष^२+क्ष+१ या समीकरणास स्थापितें; २. त्याच कल्पनेनें, तें १ चें घनमूळ आहे.

$$\text{जर क्ष} = \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}, \text{ तर क्ष}^२ = \frac{(-१)^२+२(-१)(\sqrt{-३})+(\sqrt{-३})^२}{}$$

$$= \frac{१-२\sqrt{-३}+(-३)}{४} = \frac{-२-२\sqrt{-३}}{४} = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$$

यामुळें

$$\text{क्ष}^२+\text{क्ष}+१ = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२} + \frac{-१+\sqrt{-३}}{२} + १ = \frac{-१-१}{२} + १ = ०$$

$$\text{पुनः}\quad \text{क्ष}^३ = \text{क्ष}^२ \times \text{क्ष} = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२} \times \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$= \frac{(-१)^२-(\sqrt{-३})^२}{४} = \frac{१-(-३)}{४} = \frac{४}{४} = १$$

$$\text{प} = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२} \qquad \text{क} = \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}, \text{ असें घे,}$$

तर अअअ अथवा अ^३ याचीं तीन घनमुळें अ, प अ, आणि कअ, अगत्य असावीं. कां कीं अ $\times$ अ $\times$ अ $=$ अ^३.

$$\text{प अ} \times \text{प अ} \times \text{प अ} = \text{प}^३ \text{अ}^३ = \text{अ}^३ \text{ कां कीं प}^३ = १$$

$$\text{क अ} \times \text{क अ} \times \text{क अ} = \text{क}^३ \text{अ}^३ = \text{अ}^३ \text{ कां कीं क}^३ = १$$

आणि $क्ष^२ + अक्ष + अ^२ = ०$ हें उलगडण्याचें समजल्यानंतर, $क्ष^३ - क्ष^३ = ०$ या समीकरणांतून वर प्रमाणें निघेल.

क्ष हा १ याचा चतुर्घातमूळांतून एक चतुर्घातमूळ असो. तेव्हां $क्ष^४ = १$, अथवा $क्ष^४ - १ = ०$; ह्मणजे,

$(क्ष^२ - १)(क्ष^२ + १) = ०$, यामुळें, $क्ष^२ - १ = ०$ अथवा $क्ष^२ + १ = ०$, $क्ष^२ - १ = ०$ याचीं उत्तरें पूर्वीप्रमाणें, -१ आणि $+१$ अशीं आहेत; आणि $क्ष^२ + १ = ०$ याचीं उत्तरें, $क्ष = +\sqrt{-१}$ अथवा $क्ष = -\sqrt{-१}$. यामुळें १ यास चार चतुर्घातमूळें आहेत, ह्मणजे $+१, -१, +\sqrt{-१}$ आणि $-\sqrt{-१}$. चालती रीति लाविल्यानें हें खरें आहे असें कळेल; उदाहरण,

$$(\sqrt{-१})^२ = -१,\ (\sqrt{-१})^३ = (\sqrt{-१})^२ . \sqrt{-१} = -\sqrt{-१}$$
$$(\sqrt{-१})^४ = (\sqrt{-१})^३ . \sqrt{-१} = -\sqrt{-१} . \sqrt{-१} =$$
$$-(\sqrt{-१})^२ = -(-१) = १$$

अधिक शोध झाल्यावांचून $\sqrt{-क्ष}$ अशे तऱ्हेचा पद्धतीचा केवळ तर्कानें उपयोग करणें पुढीलप्रमाणें आहे; अ, ब, क, आणि ड, हीं धन किंवा ऋण परिमाणें असोत. तर

$$अ + ब\sqrt{-क्ष} = क + ड\sqrt{-क्ष}$$

अ = ब आणि क = ड असे नसतील तर वरचें समीकरण खरें होणार नाहीं. कां तर मनांत आण कीं $अ = क \pm ई$ असें आहे, ह्मणजे क आणि अ यामध्यें कांहीं भेद आहे, तेव्हां

$$क \pm ई + ब\sqrt{-क्ष} = क + ड\sqrt{-क्ष} \qquad \sqrt{-क्ष} = \frac{\pm ई}{ड - ब}$$

ह्मणजे $\sqrt{-क्ष}$ हा धन किंवा ऋण परिमाण आहे, हें अशक्य. यामुळें $(\pm ई) \div (ड - ब)$ हें च्यालीप्रमाणें बीजगणितानुरूप परिमाण होण्यास अशक्य. आतां जर ई = ०, आणि ड आणि ब हे बरोबर नसतील, तर याप्रमाणें होईल. $\sqrt{-क्ष} = ० \div (ड - ब) = ०$, हेंही खरें नाहीं; जर

ईला कांहीं नियमित किंमत असेल आणि ड=ब असेल तेव्हां याप्रमाणें होईल, $\sqrt{-क्ष} = \pm ई \div ०$, हें ८७ **पृष्ठावरचे** लिहिलेल्या विषयाशीं मिळत नाहीं, कां कीं कोणतेंहि परिमाण त्याणें तेंच गुणिलें असतां तें मोठें आहे ह्मणून गुणाकार ऋण होत नाहीं, अथवा जरी परिमाण अधिक मोठें होत जातें तरीहि तो गुणाकर ऋण होण्यास अधिक जवळ होत नाहीं. ही कल्पना मात्र राहिली, कीं ई=० आणि ड−ब=०, ह्मणजे अ=क आणि ड=ब; आणि $\sqrt{-क्ष}$ यांविषयीं एथपर्यंत हेंच मात्र रूप मिळालें, ह्मणजे $\frac{०}{०}$. परंतु जा समीकरणापासून हें निघालें तें समीकरण नेहेमी खरें आहे इतकें मात्र हें दाखवितें; जर अद्यापि असें समीकरण अगदीं खरें असें मान्य केलें, तर जेव्हां अ=क आणि ब=ड असेल तेव्हां वरचे रूपाचें उत्तर निघेल. पहा वरचे गोष्टीवरून पुरता निर्वाह होत नाहीं; त्यापासून हें मात्र सिद्ध होतें, कीं अ=क आणि ब=ड असें **नसेल**, तर समीकरण कधींहि खरें होऊं शकत नाहीं; तथापि अ=क आणि ब=ड असें जरी आहे तरी समीकरण खरें **आहे**, याविषयीं अद्यापि वाद आहे. जर क्ष कांहीं तऱ्हेचे परिमाणाचा दर्शक नसेल, तर क्ष=क्ष ह्या समीकरणास खरें आहे असें विचारपूर्वक मानणार नाहीं; = या चिन्हाचे अर्थांत अशी कांहीं कल्पना आहे, कीं ती परिमाणावांचून दुसरे कशासहि लागत नाहीं, असें ह्मणण्यांत येईल. परंतु जर कोणी असें मानील, तर त्याणें १३९ **पृष्ठावर**,= या चिन्हाचें विस्तार रूप व्याख्यान पहावें, तथापि शिकणारानें ध्यानांत धरावें कीं जोंपर्यंत $\sqrt{-क्ष}$ इत्यादि चिन्हाशीं चांगली माहितगारी झाली नाहीं, तोंपर्यंत $\sqrt{-क्ष}$, इत्यादि चिन्हांवर, त्यांतले व्याख्यानाची **अर्थशक्ती** लागू होती असें त्याचे ध्यानांत पक्कें येणार नाहीं.

परंतु वरचे सारिखीं दुसरीं कांहीं बीजानुरूप परिमाणें आहेत त्यांचा आतां विचार केला पाहिजे. तीं याप्रमाणें आहेत, $\sqrt{३}$, $\sqrt{५}$, $\sqrt[३]{२}$, इत्यादि यांचा निःशेष किंमती निघत नाहींत, परंतु १८३ **पृष्ठाप्रमाणें** जवळ जवळ मात्र निघतात. या पुढील समीकरणामध्यें, अ, ब, क, आणि ड, पूर्ण किंवा अपूर्णांक असतील, आणि जर अ=क आणि ब=ड असें नसेल, तर तें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं असें ह्मणतों. तें हें समीकरण

$$अ+ब\sqrt{३} = क+ड\sqrt{३}$$

$\sqrt{३}$ याचे जागीं $\sqrt{-क्ष}$ मांडिला असतां, प्रतिशब्दीं वरची कल्पना, लागू होईल, परंतु जर ड, ब, ई, पूर्ण किंवा अपूर्णांक असतील, तर

$$\sqrt{३} = \frac{\pm ई}{ड-ब}$$

असें खोटें रूप जें होऊं शकत नाहीं तें निघतें.

क्ष आणि य हे पूर्णांकाचे वर्ग अथवा अपूर्णांक नसतील, आणि जर नियमित पूर्ण किंवा अपूर्णांकांचे जागीं सर्व अक्षरें असतील, तर वरचे रितीप्रमाणें हें सिद्ध होईल कीं

$$अ+ब \sqrt{क्ष} = क+ड \sqrt{य} \;\cdots\cdots (अ)$$

तर यांत $अ = क$ असावा, आणि यामुळें $ब \sqrt{क्ष} = ड \sqrt{य}$. कां कीं जर असें नसलें, तर $अ = क \pm ई$ घे; यास अचे जागीं मांड, आणि क वजा कर,

तर $$\pm ई + ब \sqrt{क्ष} = ड \sqrt{य}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून याप्रमाणें होतें

$$(\pm ई)^२ + २(\pm ई) ब \sqrt{क्ष} + (ब \sqrt{क्ष})^२ = (ड\sqrt{य})^२$$

अथवा $$ई^२ \pm २ ईब\sqrt{क्ष} + ब^२ क्ष = ड^२ य$$

यामुळें $$\sqrt{क्ष} = \frac{ड^२य - ब^२क्ष - ई^२}{\pm २ईब}$$

ह्मणजे, $\sqrt{क्ष}$ यास नियमित अपूर्णांकानें दाखवितां येत नाहीं, तो येथें तसा दाखविला आहे हें खोटें आहे. तर यामुळें $अ = क$ आणि $ब \sqrt{क्ष} = ड \sqrt{य}$ असें केल्यानें मात्र वरचे (अ) समीकरणास खरें रूप देतां येतें.

$४+२\sqrt{३}$, $२१+४\sqrt{५}$, इत्यादि जातीचे परिमाणांचें वर्गमूळ काढण्यास कांहीं पक्षीं हें वरचें मूळकारण लावलें जाईल. $२+\sqrt{७}$ असें परिमाण घे, आणि त्याचा वर्ग कर.

$$(२+\sqrt{७})^२ = २^२ + २\times २\sqrt{७} + (\sqrt{७})^२$$
$$= ४ + ४\sqrt{७} + ७ = ११ + ४\sqrt{७}$$

आतां मनांत आण कीं, $११+४\sqrt{७}$ असें परिमाण दिलें असेल, तर या दोन पुढील गोष्टी कशा काढाव्या ? १. कीं त्यास त्याच रूपाचें वर्गमूळ आहे.* २. तें वर्गमूळ $२+\sqrt{७}$ असें आहे कीं काय? यापुढील प्रमाणें काढाव्या; जर $११+४\sqrt{७}$ यास वर्गमूळ तशेच रूपाचें असेल, तर तें वर्गमूळ $क्ष+\sqrt{य}$ आहे असें मान, ह्मणून

$\sqrt{११+४\sqrt{७}} = क्ष+\sqrt{य}$, या समीकरणाचे दोन्हीं बाजूंचा वर्ग कर.

$$११+४\sqrt{७} = क्ष^२ + २क्ष\sqrt{य} + (\sqrt{य})^२$$
$$= क्ष^२ + य + २क्ष\sqrt{य}$$

यावरून $क्ष^२+य = ११$ आणि $२क्ष\sqrt{य} = ४\sqrt{७}$

यामुळें (–) $क्ष^२ - २क्ष\sqrt{य} + य = ११ - ४\sqrt{७}$

परंतु या समीकरणाची पहिली बाजू, $क्ष-\sqrt{य}$, याचा वर्ग आहे. अथवा

$(क्ष-\sqrt{य})^२ = ११-४\sqrt{७}$ ह्मणजे, $क्ष-\sqrt{य} = \sqrt{११-४\sqrt{७}}$

परंतु $क्ष+\sqrt{य} = \sqrt{११+४\sqrt{७}}$

हीं वरचीं दोन समीकरणें परस्पर गुण. तर

---

* पाहा, कीं $११+४\sqrt{७}$ आणि $क्ष+\sqrt{य}$ या दोहींमध्यें रूपाचा बहुत फेर नाहीं, का कीं $४\sqrt{७}=\sqrt{(४)^२\times ७}=\sqrt{११२}$; यावरून $११+४\sqrt{७}=११+\sqrt{११२}$.

$(क्ष+\sqrt{य})(क्ष-\sqrt{य}) = \sqrt{११+४\sqrt{७}}\sqrt{११-४\sqrt{७}}$

अथवा $क्ष^२-य = \sqrt{(११+४\sqrt{७})(११-४\sqrt{७})} = \sqrt{१२१-११२} = ३$

परंतु $क्ष^२+य = ११$

$(+)\quad २क्ष^२=१४ \qquad क्ष^२=७ \qquad क्ष=\sqrt{७}$

$(-)\quad २य=८ \qquad य=४ \qquad \sqrt{य}=२$

यामुळें $\sqrt{११+४\sqrt{७}}$ अथवा $क्ष+\sqrt{य} = \sqrt{७}+२$, ह्मणून, जा रितीनें $११+४\sqrt{७}$ असें निघालें तसेंच हें आहे.

$\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$ हें करण्यासाठीं वरची रीति लावितों. याचे जागीं $क्ष+\sqrt{य}$ घे,

तर $$अ+ब\sqrt{क} = (अ+\sqrt{य})^२$$
$$= क्ष^२+य+२क्ष\sqrt{य}$$

यामुळें $\quad अ=क्ष^२+य$ आणि $ब\sqrt{क}=२क्ष\sqrt{य}$

यामुळें $\quad अ-ब\sqrt{क}=क्ष^२+य-२क्ष\sqrt{य}=(क्ष-\sqrt{य})^२$

अथवा $\quad क्ष-\sqrt{य}=\sqrt{अ-ब\sqrt{क}}$

परंतु $\quad क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$

$(\times)\quad क्ष^२-य=\sqrt{(अ-ब\sqrt{क})(अ+ब\sqrt{क})}=\sqrt{अ^२-ब^२क}$

परंतु $\quad क्ष^२+य = अ$

$(+)\quad २क्ष^२=अ+\sqrt{अ^२-ब^२क}$

$$क्ष=\sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

$(-)\quad २य=अ-\sqrt{अ^२-ब^२क}$

$$\sqrt{य}=\sqrt{\tfrac{१}{२}अ-\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

$$क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}+\sqrt{\tfrac{१}{२}अ-\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

आणि या समीकरणाची दुसरी बाजू $\text{अ}+\text{ब}\sqrt{\text{क}}$ चें वर्गमूळ आहे.

ताळा $\frac{1}{2}\text{अ}+\frac{1}{2}\sqrt{\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क}}$ हें दाखविण्यासाठीं प घे.

$\frac{1}{2}\text{अ}-\frac{1}{2}\sqrt{\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क}}$ हें दाखविण्यासाठीं क घे.

$$\text{पक} = \left(\frac{1}{2}\text{अ}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क}}\right)^2=\frac{1}{4}\text{अ}^2-\frac{1}{4}(\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क})$$

$$=\frac{1}{4}\text{अ}^2-\frac{1}{4}\text{अ}^2+\frac{1}{4}\text{ब}^2\text{क}=\frac{1}{4}\text{ब}^2\text{क};\ \text{यामुळें}\ \sqrt{\text{पक}}=\frac{1}{2}\text{ब}\sqrt{\text{क}}.$$

पूर्वींचे सिद्धांताप्रमाणें,

$$\sqrt{\text{अ}+\text{ब}\sqrt{\text{क}}}=\sqrt{\text{प}}+\sqrt{\text{क}},\ (\text{अ}+\text{ब}\sqrt{\text{क}})=(\sqrt{\text{प}}+\sqrt{\text{क}})^2$$

$$=(\sqrt{\text{प}})^2+2\sqrt{\text{प}}\sqrt{\text{क}}+(\sqrt{\text{क}})^2=\text{प}+2\sqrt{\text{पक}}+\text{क}$$

परंतु $\text{प}+\text{क}=\frac{1}{2}\text{अ}+\frac{1}{2}\text{अ}=\text{अ},\quad 2\sqrt{\text{पक}}=\text{ब}\sqrt{\text{क}}$

यामुळें $\text{प}+\text{क}+2\sqrt{\text{पक}}=\text{अ}+\text{ब}\sqrt{\text{क}}$; यावरून दिसतें, कीं वरचा सिद्धांत खरा आहे.

हा सिद्धांत व्यवहारी कामाचे फार उपयोगी नाहीं, परंतु $\text{ब}\sqrt{\text{क}}$ इत्यादि तऱ्हेचीं पदें कामांत आणायाचे अभ्यासासाठीं फार उपयोगी आहे. जेव्हां $\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क}$ याचें खरें वर्गमूळ असेल, तेव्हां तो सिद्धांत याचें केवळ सरळ रूप करितो; असें नसलें, तर त्याचे उलटें करितो, कांकीं $\sqrt{\text{अ}+\text{ब}\sqrt{\text{क}}}$ यांत वर्गमूळाचें वर्गमूळ एक वेळा येतें, परंतु त्याचे वर काढलेल्या किंमतीमध्यें त्याचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ दोन वेळा येतें. जसें, या पुढील दोन पद्धती जरी सारख्या खऱ्या आहेत तरी तो सिद्धांत पहिल्या पद्धतीला सरळ रूप देतो, परंतु दुसऱ्ये पद्धतीस सरळ रूप देत नाहीं.

$$\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{13+2\sqrt{31}}=\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{45}}+\sqrt{\frac{13}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{45}}$$

उलटा विषय. अ^2 पेक्षां $\text{ब}^2\text{क}$ अधिक आहे. किंवा $\text{अ}^2-\text{ब}^2\text{क}$

ऋण परिमाण आहे, अशा पक्षाला वरचें उत्तर लाव, उदाहरण, $२+\sqrt{८}$, यांत अ=२, ब=१, क=८ असा पक्ष ह्मण,

$$\sqrt{२+\sqrt{८}}=\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}}+\sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}}\ldots\ldots \quad (अ)$$

$\sqrt{-१}$, इत्यादि अशे तऱ्हेचे चिन्हाचा अर्थ अद्यापि समजाविला नाहीं, तर $२+\sqrt{८}$ याचें वर्गमूळ त्याच तऱ्हेचें आहे कीं काय? खचित् नाहीं; कांकीं अंकगणित रितीनें त्याचें वर्गमूळ $२+\sqrt{४}$ आणि $२+\sqrt{९}$ या दोहोंचे वर्गमूळामध्यें किंवा ४ आणि ९ यांचे वर्गमूळामध्यें, कोठे तरी जवळ जवळ सांपडेल.

तर (अ) ही पद्धति खचित् अंकगणित रूपाची आहे असें मान्य करावें कीं काय? याविषयीं हें लक्षांत आलें पाहिजे, कीं जी पद्धति खरी अंकगणितरूपाची पद्धति आहे, ती केवळ रितीनें, अशक्यरूप दिसे असें करितां येईल.

उदाहरण,

$$क्ष+य=(क्ष+क\sqrt{-१})+(य-क\sqrt{-१})$$
$$क्ष^२+य^२=क्ष^२-(-य^२)=(क्ष)^२-(य\sqrt{-१})^२$$
$$=(क्ष+य\sqrt{-१})\ (क्ष-य\sqrt{-१})$$

(अ) ही पद्धति अधिक तपासून पहाण्यासाठीं, तिचे प्रत्येक पदाचें वर्गमूळ रितीप्रमाणें काढ.

$$अ=१,\ ब=\frac{१}{२},\ \ क=-४,\ \text{असें घे.}$$
$$\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}}=\sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}}+\sqrt{\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$
$$\sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}}=\sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}}-\sqrt{\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

वरचे दोन समीकरणांचे दुसऱ्ये दोन बाजूंमध्यें अद्यापि ऋण परिमाणाचें वर्गमूळ आहे; कांकीं, $\sqrt{२}$ पेक्षां १ कमी आहे, यामुळें $\frac{१}{२}\sqrt{२}$

यापेक्षां $\frac{१}{२}$ कमी आहे, अथवा $\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}$ ऋण आहे, वरचे दोन समीकरणांची बेरीज कर;

$$\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}}+\sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}}=२\sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

परंतु जा पद्धतीनें आरंभ केला ती वेगळ्ये रूपानें हीच आहे;

$$\sqrt{४(\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२})} \text{ अथवा} \sqrt{२+२\sqrt{२}} \text{ अथवा} \sqrt{२+\sqrt{४\times२}}$$

वरचा क्ष+य, यामध्यें बुध्या जो फेरफार केला त्या सारिखी हयगय, लागू पडे अशी रीति घेतल्यानें घडली; आणि जर $ब^२क$ यापेक्षां $अ^२$ कमी असेल, तर $\sqrt{२+\sqrt{२}}$, अथवा सामान्य रूपानें $\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$ यास उत्तराचे जागीं जर क ऋण परिमाण नसेल तर पुढें लिहिलेल्या रूपाप्रमाणें मांडतां येणार नाहीं,

$$\sqrt{प+\sqrt{क}}+\sqrt{प-\sqrt{क}}$$

$\sqrt[३]{अ+ब\sqrt{क}}$ याचें मूळ काढायास अवघड आहे आणि तें फार उपयोगी नाहीं, याजकरितां तें सोडून देतों.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. हे पुढील सांगीतलेले सिद्धांत सिद्ध कर;

१. −१ याचीं तीन बीजगणितरूप घनमूळें आहेत. पहिलें −१ आणि $क्ष^२-क्ष+१=०$ याचीं उत्तरें; $\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{-३}$ आणि $\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{-३}$ हीं दोन, मिळून तीन.

२. −१ याचीं चार बीजगणितरूप चतुर्घातमूळें या पुढीलप्रमाणें आहेत.

$$\frac{१}{२}\sqrt{२}(१+\sqrt{-१}) \qquad \frac{१}{२}\sqrt{२}(१-\sqrt{-१})$$
$$\frac{१}{२}\sqrt{२}(-१+\sqrt{-१}) \qquad \frac{१}{२}\sqrt{२}(-१-\sqrt{-१})$$

३. १ याचीं आठ बीजगणितरूप अष्टघातमूळें या पुढीलप्रमाणें आहेत.

$\pm १, \pm\sqrt{-१}, \pm\frac{१}{२}\sqrt{२}(१+\sqrt{-१}), \pm\frac{१}{२}\sqrt{२}(१-\sqrt{-१}),$

$\sqrt[२]{-१}$ याचा सगळ्या किमती वरचे पद्धतीमध्यें आहेत, त्या कशा साठीं आहेत याचें कारण सांग ?

असें परिमाण दिलें असेल, जामध्यें दुसऱ्या वर्णाचीं करणीचिन्हें असतील ह्मणजे जामध्यें वर्गमूळें आहेत, तर असा एक गुणक काढ कीं त्याणें तें परिमाण गुणिलें असतां, गुणाकार, करणी मुक्त होईल.

१. एकाकी करणी पद जसें, $\sqrt{३}$. एथें $\sqrt{३}$ हा त्याचा गुणक आहे अथवा जर अ ***राशिनल्** आहे, तर अ $\sqrt{३}$ हाहि त्याचा गुणक आहे; कांकीं $\sqrt{३}\times$ अ $\sqrt{३}=$ ३अ, हाहि राशिनल् आहे.

२. द्वियुक्पद, जाचीं एक किंवा दोन्ही पदें नित्य करणी असतील, जसें $\sqrt{३}+\sqrt{२}$. (अ+ब)(अ−ब) = $अ^२-ब^२$, तेव्हां जर अ आणि ब हीं एकाकी करणीं पदें असतील, तर अ−ब राशिनल् आहे; यामुळें अ+ब यांचा गुणक अ−ब आहे, आणि याचे उलटेंहि. उदाहरण, $\sqrt{३}+\sqrt{२}$ हे $\sqrt{३}-\sqrt{२}$ यांणीं गुणिले तर ३−२, अथवा १ होतो; $२\sqrt{३}-\frac{१}{२}\sqrt{७}$ हे $२\sqrt{३}+\frac{१}{२}\sqrt{७}$ यांणीं गुणिले तर $४\times३-\frac{१}{४}\times७$, अथवा $१०\frac{१}{४}$ होतात.

३. त्रियुक्पद, जामध्यें दोन किंवा तीन करणी पदें आहेत; जसें $\sqrt{३}+\sqrt{५}-\sqrt{७}$, अथवा $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}+\sqrt{क}$. शेवटची पद्धति $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}-\sqrt{क}$ यांणीं गुण. त्यापासून हें होतें, $(\sqrt{अ}+\sqrt{ब})^२-(\sqrt{क})^२$ अथवा $अ+२\sqrt{अब}+ब-क$ अथवा $अ+ब-क+२\sqrt{अब}$. आतां $अ+ब-क-२\sqrt{अब}$ यांणीं गुण; त्यापासून हें होतें, $(अ+ब-क)^२-(२\sqrt{अब})^२$ अथवा

* राशिनल्. हा शब्द बीजगणितामध्यें कामांत आणितात, त्याचा अर्थ करणीचिन्हापासून मोकळा असा आहे; ह्मणजे कांहीं व्यवहारी पूर्ण किंवा अपूर्णांक राशिनल् आहेत, जसें २ हा अंक राशिनल् आहे आणि $\sqrt{४}$ यास जरी करणी चिन्ह आहे तरी तें राशिनल् आहे परंतु $\sqrt{२}$ हा अंक करणीगत अथवा इरराशिनल् आहे.

$(अ+ब-क)^२-४$ अब. यामुळें $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}-\sqrt{क}$ आणि $अ+ब-क-२\sqrt{अब}$ या दोहोंचा गुणाकार इच्छिलेला गुणक आहे,

$$(\sqrt{३}+\sqrt{५}-\sqrt{७})(\sqrt{३}+\sqrt{५}+\sqrt{७}) = १+२\sqrt{१५}$$
$$(१+२\sqrt{१५})(१-२\sqrt{१५}) = १-६० = -५९$$

त्रियुक्पदापेक्षां दुसऱ्या बहुयुक् करणीपदांचा विचार करण्याचें प्रयोजन क्वचित् पडतें किंवा कधींहि पडत नाहीं.

अपूर्णांकाचा छेदस्थळीं करणीपदें असतील तर त्यांची किंमत काढायास वरची कल्पना लावितां येईल. उदाहरण, $१\div(\sqrt{३}+१)$ याची किंमत काढणें असेल, तर छेद शुद्ध करायासाठीं तिहींचें वर्गमूळ काढूं नको, परंतु अंश आणि छेद या दोहोंस $\sqrt{३}-१$ यांणीं गुण, यावरून हें होईल.

$$\frac{१}{\sqrt{३}+१} = \frac{\sqrt{३}-१}{(\sqrt{३}+१)(\sqrt{३}-१)} = \frac{\sqrt{३}-१}{३-१} = \frac{१}{२}(\sqrt{३}-१)$$

स्पष्ट आहे कीं या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूची किंमत काढण्यापेक्षां दुसऱ्ये बाजूची किंमत काढायास सोपी आहे;

$$\frac{\sqrt{६}+\sqrt{७}}{\sqrt{६}-\sqrt{५}} = \frac{(\sqrt{६}+\sqrt{७})\,(\sqrt{६}+\sqrt{५})}{(\sqrt{६}-\sqrt{५})\,(\sqrt{६}+\sqrt{५})} = ६+\sqrt{४२}+\sqrt{३०}+\sqrt{३५}$$

यापेक्षां अधिक मोठ्ये मूळाचा विचार करण्याचें प्रयोजन असेल तेव्हां जा एकाकी करणीपदांत असें पद येतें, जसें $\sqrt[५]{ट}$, $अ\sqrt[न]{च}$. यांतून प्रथमाचा गुणक $(\sqrt[५]{ट})^४$ अथवा $ट^{\frac{४}{५}}$ आहे, कां कीं $ट^{\frac{१}{५}}\times ट^{\frac{४}{५}} = ट^{\frac{५}{५}} = ट$. या तऱ्हेनें हीं पुढील उत्तरें निघतील;

$$\frac{\sqrt[३]{२}}{\sqrt[३]{३}}=\frac{\sqrt[३]{२}\cdot\sqrt[३]{३}\cdot\sqrt[३]{३}}{\sqrt[३]{३}\cdot\sqrt[३]{३}\cdot\sqrt[३]{३}}=\frac{\sqrt[३]{१८}}{३}\;;\quad\frac{\sqrt[५]{३}}{\sqrt[५]{२}}=\frac{\sqrt[५]{४८}}{२}$$

$$\frac{\sqrt[न]{अ}}{\sqrt[न]{ब}}\text{ अथवा }\frac{अ^{\frac{१}{न}}}{ब^{\frac{१}{न}}}=\frac{अ^{\frac{१}{न}}\times ब^{\frac{न-१}{न}}}{ब^{\frac{१}{न}}\times ब^{\frac{न-१}{न}}}=\frac{अ^{\frac{१}{न}}\,ब^{\frac{न-१}{न}}}{ब}.$$

$$\frac{१}{क^{\frac{१}{न}}\,र^{\frac{१}{ब}}}=\frac{क^{\frac{न-१}{न}}\,र^{\frac{ब-१}{ब}}}{कर}\;;\quad\frac{२}{\sqrt[३]{३}\,\sqrt[४]{४}}=\frac{२\sqrt[३]{९}\,\sqrt[४]{१४}}{१२}$$

या अध्यायांतील सर्व गोष्टीविषयींचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत; त्यांस जपून उलगडून ताळा पहावा.

$$अ\times ब^{-१}\times अ^{-३}\times ब^{\frac{२}{३}}=अ^{-२}ब^{-\frac{१}{३}}=\frac{१}{अ^{२}ब^{\frac{१}{३}}}$$

$$अ^{६}\div अ^{-६}=अ^{१२}=अ^{६}\times अ^{६}=१\div अ^{-१२}$$

$$अ^{म}\times ब^{न}=ब^{न}\div अ^{-म}=अ^{म}\div ब^{-न}=१\div अ^{-म}ब^{-न}$$

$$\sqrt{अ\sqrt{अ\sqrt{अ}}}=अ^{\frac{७}{८}}\qquad\sqrt[३]{\left(अ\sqrt{(अ\sqrt[३]{अ})}\right)}=अ^{\frac{५}{९}}$$

$$\sqrt[न]{\left\{\sqrt[म+१]{अ^{म-१}ब}\right\}^{म}}=अ^{\frac{म^{२}-म}{मन+न}}\;ब^{\frac{म}{मन+न}}$$

$$\left\{\frac{प}{कर^{-१}}\right\}^{\frac{३}{५}}\times\left\{\frac{क}{प^{२}र}\right\}^{-\frac{१}{३}}=(पक^{-१}र)^{\frac{३}{५}}\times(प^{-२}\,कर^{-१})^{\frac{१}{३}}$$

$$=प^{\frac{३}{५}}क^{-\frac{३}{५}}र^{\frac{३}{५}}\times प^{\frac{२}{३}}क^{-\frac{१}{३}}र^{\frac{१}{३}}=प^{\frac{१९}{१५}}क^{-\frac{१४}{१५}}र^{\frac{१४}{१५}}$$

$$=\sqrt[१५]{\frac{प^{१९}र^{१४}}{क^{१४}}}=\sqrt[१५]{प^{१९}}\;\sqrt[१५]{\left(\frac{र}{क}\right)^{१४}}=\frac{प^{\frac{१९}{१५}}क^{\frac{१}{१५}}र^{\frac{१४}{१५}}}{क}$$

$$\sqrt{अ^२ब^३क} = \sqrt{अ^२ब^२\cdot बक} = अब\sqrt{बक} = \frac{अब^२क}{\sqrt{बक}}$$

$$\sqrt[३]{अ^४ब^८क^{१३}} = \sqrt[३]{अ^३ब^६क^{१२}\cdot अब^२क} = अब^२क^४\sqrt[३]{अब^२क}$$

$$अ^{\frac{४}{३}}ब^{\frac{८}{३}}क^{\frac{१३}{३}} = अ^{१+\frac{१}{३}}ब^{२+\frac{२}{३}}क^{४+\frac{१}{३}} = अब^२क^४\, अ^{\frac{१}{३}}\, ब^{\frac{२}{३}}\, क^{\frac{१}{३}}$$

$\sqrt[\frac{१}{२}]{अ} = अ^२ \quad \sqrt[\frac{१}{३}]{अ^२} = अ^६$ {असें लिहिण्याचा पाठ नाहीं, परंतु लिहितां येईल, कां तें सांग ?

$$\sqrt{१६०} = \sqrt{१६\times १०} = ४\sqrt{१०};\ \sqrt[३]{१६०} = \sqrt[३]{८\times २०} = २\sqrt[३]{२०}$$

$$\sqrt{३३३२} = १४\sqrt{१७} \qquad \sqrt[३]{३३४८} = ३\sqrt[३]{१२४},\ \sqrt[४]{३२} = २\sqrt[४]{२}$$

$$\sqrt{\frac{३}{७}} = \frac{\sqrt{२१}}{७} = \frac{३}{\sqrt{२१}},\ \sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब} = \frac{अ}{\sqrt{अब}}$$

$$अ : \sqrt{अब} :: \sqrt{अब} : ब \qquad अ^{\frac{१}{३}} : अ^{\frac{१}{२}} :: अ^{-\frac{१}{२}} : अ^{-\frac{१}{६}}$$

$$\frac{१}{\sqrt{\frac{१}{२}}+\sqrt{\frac{१}{३}}} = ६\left(\sqrt{\frac{१}{२}}-\sqrt{\frac{१}{३}}\right),\ \frac{१}{\sqrt{अ}-\sqrt{अब}} = \frac{१+\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}(१-ब)}$$

$$\frac{१}{\sqrt{अ+१}-१} = \frac{१}{अ}\left(\sqrt{अ+१}+१\right)$$

$$\frac{१}{\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}} = \frac{१}{२क्ष}\left(\sqrt{अ+क्ष} - \sqrt{अ-क्ष}\right)$$

$$\frac{\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}}{\sqrt{अ+क्ष}-\sqrt{अ-क्ष}} = \frac{२अ+२\sqrt{अ^२-क्ष^२}}{२क्ष} = \frac{अ}{क्ष} + \sqrt{\frac{अ^२}{क्ष^२}-१}$$

$$\sqrt{अ^२-क्ष^२} = अ\sqrt{१-\frac{क्ष^२}{अ^२}} = क्ष\sqrt{\frac{अ^२}{क्ष^२}-१} = \sqrt{अक्ष}\sqrt{\frac{क्ष}{अ}-\frac{अ}{क्ष}}$$

$$\sqrt{अ+क्ष} = \sqrt{अ}\sqrt{१+\frac{क्ष}{अ}} = \sqrt{क्ष}\sqrt{\frac{अ}{क्ष}+१} = \sqrt{अक्ष}\sqrt{\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{अ}}$$

$$\frac{१}{२}\sqrt{ब^२-४अक} = \sqrt{\frac{ब^२}{४}-अक} = \frac{ब}{२}\sqrt{१-\frac{४अक}{ब^२}} = \sqrt{\frac{ब^२-४अक}{४}}$$

$$\sqrt{२अक्ष-क्ष^२} = क्ष\sqrt{२\frac{अ}{क्ष}-१} = \sqrt{क्ष}\sqrt{२अ-क्ष} = अ\sqrt{२\frac{क्ष}{अ}-\frac{क्ष^२}{अ^२}}$$

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{क्ष+य\sqrt{-१}} = \frac{अक्ष+बय+(बक्ष-अय)\sqrt{-१}}{क्ष^२+य^२}$$

$$(१+\sqrt{-१}) = \sqrt{-१}\,(१-\sqrt{-१}) \qquad \sqrt{-७} = \sqrt{७}.\sqrt{-१}$$

$$\sqrt{-४} = २\sqrt{-१} \qquad \sqrt{-\frac{१}{२}} = \frac{१}{२}\sqrt{२}\cdot\sqrt{-१}$$

$$\sqrt{-\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब}\cdot\ \sqrt{-१} \qquad \sqrt{-४}\times\sqrt{-३} = -\sqrt{१२}$$

$$(अ-ब) = (अ^{\frac{१}{२}}-ब^{\frac{१}{२}})(अ^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}}) = (अ^{\frac{१}{३}}-ब^{\frac{१}{३}})(अ^{\frac{२}{३}}+अ^{\frac{१}{३}}ब^{\frac{१}{३}}+ब^{\frac{२}{३}})$$

$$= (अ^{\frac{१}{४}}-ब^{\frac{१}{४}})(अ^{\frac{३}{४}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{४}}+अ^{\frac{१}{४}}ब^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{३}{४}})$$

$$अ+ब = (अ^{\frac{१}{६}}+ब^{\frac{१}{६}})(अ^{\frac{४}{६}}-अ^{\frac{३}{६}}ब^{\frac{१}{६}}+अ^{\frac{२}{६}}ब^{\frac{२}{६}}-अ^{\frac{१}{६}}ब^{\frac{३}{६}}+ब^{\frac{४}{६}})$$

$$(अ^{\frac{२}{३}}+अ^{\frac{१}{३}}+१)^{२} = अ^{\frac{४}{३}}+२अ+३अ^{\frac{२}{३}}+२अ^{\frac{१}{३}}+१$$

$$(अ^{\frac{२}{३}})^{\frac{३}{२}} = अ \qquad \left(अब^{\frac{१}{३}}क^{-२}\right)^{-\frac{१}{५}} = अ^{-\frac{१}{५}}ब^{-\frac{१}{१५}}क^{\frac{२}{५}}$$

पहा. अ $\sqrt{-१}$ अथवा $\sqrt{-अ^{२}}$, अ + $\sqrt{-ब}$ अथवा अ + $\sqrt{ब}\,\sqrt{-१}$, या रूपाचे परिमाणांस अशक्यरूप परिमाणें ह्मणण्याची चाल आहे. त्यांला अर्थ दिला नाहीं ह्मणून आद्यापि त्यांला तेंच नांव आहे; तशेच रितीनें पहिले अध्यायामध्यें १०–१४ अशक्यरूपाचे होते. या पुस्तकांत त्यांचा मोठा बीज अर्थ समजायाचा नाहीं परंतु त्यांचा अर्थ याहून पुढील विषयांत कळेल; तर त्यांस एथें शुद्धचिन्हें ह्मणतों. बीजगणिताची भाषा चिन्हरूप आहे; परंतु एथपर्यंत जितक्या पद्धती आल्या आहेत, जांमध्यें अक्षर किंवा अंक आहे, त्यांस अंकसंबंधीं अर्थ आहे, ह्मणून त्या पद्धती महत्वाचा दर्शक आहेत. परंतु $\sqrt{-१}$ यास अशे तऱ्हेचा अर्थ दिला नाहीं, यामुळें तें + किंवा − या चिन्हासारिखें, किंवा यापेक्षां अधिक चिन्हरूप जातीचें आहे का कीं त्यापासून महत्वाचा बोध अथवा कृति करण्याचा समज होत नाहीं. यावरून

शुद्ध चिन्हाशीं कृति करितांना, आपल्यास अनुभव मात्र आश्रय आहे, आणि जेव्हां अनुभवापासून कार्य होत नाहीं, तेव्हां मनांत कांहीं नवा संकेत धरिला पाहिजे. जर अशे तऱ्हेचे चिन्हांचा अर्थ आपले दृष्टीस येत नाहीं, कीं जेणेकरून त्या चिन्हांशीं चालते रितीनें कृति करितां येईल, तर पूर्वींच समजांत आलें आहे, कीं कृतीचे शेवटीं तीं सर्व टाकितां येतील, आणि त्या चिन्हांस ह्या रिती मात्र लावितां येतील. लक्ष्य देण्याजोगा पुढला मात्र पक्ष आहे, ह्मणजे, $\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$ याला दर्शवायास चिन्ह करावें. चालते रितीप्रमाणें, ही पद्धति $\sqrt{-अ \times -ब}$ अथवा $\sqrt{अब}$, अथवा $\sqrt{अ} \times \sqrt{-१}$ गुणिला $\sqrt{ब} \times \sqrt{-१}$ अथवा $\sqrt{अब} \times -१$, ह्मणजे $-\sqrt{अब}$. शिकणारानें नेहमी हें शेवटचें रूप घ्यावें, ह्मणजे

$\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$ ही पद्धति $+\sqrt{अब}$ अशी नसावी परंतु $-\sqrt{अब}$ अशी असावी याचें कारण पुढें दिसेल.

अचें न मूळ दाखविण्यास $\sqrt[न]{अ}$ आणि $अ^{\frac{१}{न}}$ अशीं दोन चिन्हें आहेत, त्यांतून पहिलें चिन्ह शुद्ध अंकगणिताचे अर्थानें घेतां येईल, आणि दुसरें कोणतेंहि बीजरूप मूळ दाखविण्यास घेतां येईल, ह्मणजे जर कांहीं विशेष मूळ सांगितलें नसलें, तर इच्छेप्रमाणें हवें तें रूप घेतां येईल. जसें, चिन्ह मनांत न आणितां $\sqrt{४}$ हे २ आहेत; परंतु $(४)^{\frac{१}{२}}$ हे $+२$ अथवा -२ होतील. जसें $\sqrt[३]{अ}$ हें गणितरूपाचें घनमूळ आहे, परंतु $(अ)^{\frac{१}{३}}$ हा $\sqrt[३]{अ}$, किंवा $\frac{-१+\sqrt{-3}}{२} \times \sqrt[३]{अ}$, किंवा $\frac{-१-\sqrt{-3}}{२} \times \sqrt[३]{अ}$ या प्रमाणें आहे.

$(अ)^{\frac{१}{४}}$ हा $\sqrt[४]{अ}$, किंवा $-\sqrt[४]{अ}$, किंवा $\sqrt{-१} \cdot \sqrt[४]{अ}$ किंवा $-\sqrt{-१} \cdot \sqrt[४]{अ}$ याप्रमाणें आहे.

याच प्रमाणें $अ+ब^{\frac{१}{२}}$ यास दोन किमती आहेत, ह्मणजे, $अ+\sqrt{ब}$, किंवा $अ-\sqrt{ब}$.

यावरून जेव्हां ब धन आहे तेव्हां $\sqrt{ब}$ हा नेहेमी धन गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह आहे. चिन्हरहित, ब याची **गणितरूपाची** किंमत मात्र दर्शावयाची इच्छा असेल, तर हें पुढील संक्षेप वाक्य सांगण्यानें होईल; **ब धन किंवा ऋण असेल, तर ज्या अंकस्थळीं ब घेतला तो अंक धन मानून,** $\sqrt{ब}$ याणें दर्शविला जातो ह्मणजे ते दोन्ही* एकच आहेत. जसें ब धन किंवा ऋण असेल त्याप्रमाणें $ब=\pm\sqrt{ब^२}$ होईल.

दोन वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य विचार आतां पुढें करितों.

---

* $अ\pm क्ष$, अथवा त्याच अर्थाचा $अ+(क्ष^२)^{\frac{१}{२}}$, यास $अ+\sqrt{क्ष^२}$ या रूपानें मांडितांना पाहिलें, यांत चिन्हांविषयीं भ्रम $\sqrt{}$ · या चिन्हास लाविला होता. परंतु असें एके ठिकाणीं मात्र पाहिलें, आणि वर्गमूळ चिन्हें आणि अपूर्णांक जाति मूळप्रकाशक चिन्हें यांमध्यें भेद दाखविण्यास कांहीं नियमित रीति नवती, ह्मणून तीं कामांत आणण्याचा तऱ्हेतऱ्हेचा चाली पडल्या आहेत, तथापि वर लिहिलेले संकेत दुसऱ्ये पुष्कळ ग्रंथकर्त्यांचा चालीस मिळतील असें वाटतें. $\pm\sqrt{अ}$ हें बहुतकरून पहाण्यांत येतें, तसें $\pm अ^{\frac{१}{२}}$ हें पहाण्यांत येत नाहीं.

पांचवा अध्याय.

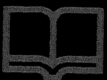
पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य सिद्धांत यामध्यें दुसऱ्या वर्णांचे समीकरणांचें अंकगणित रूपाने उलगडण्याचा विचार आहे.

पहिल्या अध्यायामध्यें एकवर्ण समीकरणांचें जें मनन केलें तें, त्यांचे केवळ **अंकगणितरूपाचे उलगडण्या**विषयीं होतें; ह्मणजे क्षविषयीं पहिल्यावर्णापेक्षां अधिक वर्णाचा नाहींत, अशा दोन पद्धती दिल्या असून, त्यांपासून क्ष ची किंमत काढायाची होती, जिणेंकरून त्या दोन पद्धती बरोबर होतील. त्या अध्यायामध्यें असें पाहिलें कीं, पहिल्यावर्णाचा सगळ्ये समीकरणांस याप्रमाणें संक्षेपरूप देतां येत होतें, ह्मणजे अक्ष = ब; जसें **५४ पृष्ठावर**

$\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$ यास १३ क्ष = १२ असें संक्षेपरूप केलें.

समीकरणाचीं सगळीं पदें समीकरणाचे एक्ये बाजूस आणल्यानें सोईस पडतें; जसें अक्ष = ब यापेक्षां अक्ष−ब = ० हें रूप समीकरण शोधायास अधिक सोईस पडतें. समीकरणांचे सगळ्ये सिद्धांतांमध्यें दोन मुख्य विचार आहेत. त्यांतील पहिला विचार; **ज्यामध्यें क्ष येतो अशी बीजानुरूप पद्धति दिली आहे, तर क्षचा एक किंवा अधिक किंमती काढाव्या, अशा कीं त्याहींकरून ती पद्धति नाहींशी होईल, ह्मणजे ती शुन्याबरोबर होईल.**

याचे पूर्वींचे अध्यायामध्यें **मूळ** हा शब्द ज्या अर्थानें घेतला, त्याहून भिन्न अर्थानें तो एथें वहिवाटीचे चालीप्रमाणें कामांत आणितों. ज्या पद्धतीमध्यें क्ष येतो तीस जी कोणतीहि क्षची किंमत शून्याबरोबर करिती, अथवा बोलण्याचे चालीप्रमाणें तीस **नाहींसें करिते**, त्या



किमतीस त्या पद्धतीचें **मूळ** ह्मणतात. जसें ५२ व्ये **पृष्ठावरचें** जें बोलणें कामांत आणिलें तें आतां या पुढीलप्रमाणें फिरवितां येईल; **२ क्ष −१−५ क्ष+१९ याचें मुळ ६आहे; १६क्ष−क्ष^{२}− ४८ याचीं मूळें ४ आणि १२ आहेत; क्ष^{३}−६क्ष^{२}+११क्ष−६ याचीं मुळें १,२, आणि ३ आहेत.**

दुसरा मुख्य विचार या पुढीलप्रमाणें आहे; **जामध्यें क्ष येतो अशी बीजानुरूप पद्धति दिली आहे, तर क्षचा कोणत्या किमती त्या पद्धतीस धन करितात, व कोणत्या किमती तीस ऋण करितात, आणि कोणत्या किमती तीस शुद्ध चिन्हरूप करितात? २२४ वें पृष्ठ पहा.** एकवर्ण समीकरणांचे पद्धतीविषयीं, या वरचे दोन प्रश्नांचें उत्तर आतां सांगतों. आरंभीं ही पुढील सूचना लिहितों.

१. क्षचा निरनिराळ्या किमती, आणि त्या किमतींपासून पद्धतीचा चिन्हांवरून जीं उत्तरें निघतात त्यांचा विचार करितों, तर जेव्हां अगत्य पडेल तेव्हां मूळ दाखविण्यासाठीं, त्या अक्षरास कांहीं फेर करून कामांत आणूं. जसें जेव्हां क्ष= ७, अथवा क्ष= ७ हें मूळ आहे, तेव्हां २क्ष−१४ ही नाहींशी होईल असें ह्मणण्याचे जागीं, मूळाला क्ष$_{।}$ असें ह्मणूं; दुसरें मूळ असेल त्याला क्ष$_{।।}$, आणि इत्यादि असें ह्मणूं, हें शिकणारानें मनांत धरावें.

२. **उलटी गोष्ट स्पष्ट करून** सांगीतली नसली तर, अक्ष+ब, अक्ष^{२}+बक्ष+क, इत्यादि अशा पद्धतींतील अ, ब, इत्यादि, गुणक धन किंवा ऋण बीजगणित रूपाचीं परिमाणें आहेत, अशी नेहेमी कल्पना धरिली पाहिजे. जसें जेव्हां अ हा १,२,−१,−$\frac{१}{२}\sqrt{३}$, इत्यादि असेल अशे पक्षांशीं कृति करितां येईल; परंतु स्पष्ट सांगीतल्या वांचून जा पक्षीं अ हा $\sqrt{-१}$, अथवा १+$\sqrt{-३}$, इत्यादि अशे जातीचें परिमाण आहे, त्या पक्षीं अशी कधीं कल्पना करीत नाहीं. **परंतु क्षविषयीं अशे तऱ्हेचा निबंध होत नाहीं.**

३. असें मनांत धरिलें पाहिजे कीं १५५ **पृष्ठावरचे** स्थळांतर करण्याचे रीतीशीं शिकणारा माहितगार आहे; ह्मणजे, अ=२, ब=−३, असें कल्पून आणि २क्ष−३ यास २क्ष+(−३)अशा रूपानें लिहून, अक्ष+ब हा २क्ष−३ याशीं मिळती होई असें शिकणारा करूं शकतो.

जांत क्ष येतो अशे एकवर्ण पद्धतीचें सामान्यरूप अक्ष+ब आहे.

उदाहरण.

$$\frac{क्ष-५}{२} - \frac{क्ष-२}{३} + क्ष \text{ ही } \frac{क्ष}{२} - \frac{५}{२} - \frac{क्ष}{३} + \frac{२}{३} + क्ष \text{ ही आहे}$$

अथवा $(\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १)क्ष - (\frac{५}{२} - \frac{२}{३})$

$$अ = \frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १ \text{ आणि } ब = -(\frac{५}{२} - \frac{२}{३})$$

अशी कल्पना केल्यानें वरची पद्धति अक्ष+ ब याशीं मिळेल
अक्ष+ब याचें मूळ सहज काढितां येतें; कां कीं

अक्ष+ब = ० असें असल्यास $क्ष = -\frac{ब}{अ}$, यास $क्ष_{१}$ ह्मण. जेव्हां अक्ष+ब हि पद्धति नाहींशी होते, तेव्हां ती अक्ष+ब या प्रमाणें मांडितां येईल, आणि यांत $-\frac{ब}{अ}$ यास $क्ष_{१}$ दर्शवितो. $क्ष_{१} = -\frac{ब}{अ}$ यापासून $अक्ष_{१} = -ब$ अथवा $ब = -अक्ष_{१}$ असें होतें. बचीहि किंमत अक्ष+ब या पद्धतींत बचे जागीं मांड, तेव्हां ती याप्रमाणें होती. ह्मणजे $अक्ष - अक्ष_{१}$ अथवा $अ(क्ष - क्ष_{१})$. यावरून हा पुढील **सिद्धांत** होतो. **अक्ष+ब याचें मूळ जर $क्ष_{१}$ असेल, तर**

अक्ष+ब = $अ(क्ष - क्ष_{१})$ **असें क्ष चे सगळ्ये किमतीविषयीं होईल.**

हें वरचें **संकेत समीकरण** नाहीं, परंतु त्याशीं **एकरूप** समीकरण आहे. त्यापासून ध्वनित होतें, कीं त्याचा दोन्ही बाजू अगदी सारिख्या आहेत, परंतु त्यांचीं रूपें निरनिराळीं आहेत; रूप बदल केल्याशिवाय, दुसरे कांहीं भेदावांचून अक्ष+ब यापासून लागलेंच तें निघवें असें दिसेल.

अक्ष+ब = $अ(क्ष + \frac{ब}{अ}) = अ\{क्ष - (-\frac{ब}{अ})\} = अ(क्ष - क्ष_{१})$ कारण वर सांगीतलें गेलें कीं $-\frac{ब}{अ}$ याचे जागीं $क्ष_{१}$ मांडितां येतो.

वरचें हें पुनःपुनः सांगणें अनुपयोगी दिसेल, परंतु जेव्हां दोन वर्णांचे पद्धतींचा विचार करण्याचा प्रसंग येईल, तेव्हां याचें कारण समजेल.

अभ्यासा करितां उदाहरणें. या पुढील पद्धतींचीं मूळें नुसतींपाहून काढून दाखीव.

पद्धती $३क्ष+\frac{१}{२}$, $-४क्ष-३$, $\frac{१}{२}क्ष-\frac{२}{३}$

मूळें $-\frac{\frac{१}{२}}{३}$, $-\frac{-३}{-४}$, $-\frac{-\frac{२}{३}}{\frac{१}{२}}$

संक्षेप मूळें $-\frac{१}{६}$, $-\frac{३}{४}$, $+\frac{४}{३}$

रूपांतर पद्धती $३\left\{क्ष-\left(-\frac{१}{६}\right)\right\}$, $-४\left\{क्ष-\left(-\frac{३}{४}\right)\right\}$, $\frac{१}{२}\left\{क्ष-\frac{४}{३}\right\}$

सिद्धांत. मूळापेक्षां जेव्हां क्ष अधिक असेल, तर अक्ष+ब ही पद्धति अचे चिन्हाची आहे, आणि जेव्हां मूळापेक्षां क्ष कमी असेल, तर ही पद्धति अ हून निराळ्ये चिन्हाची आहे.

कां कीं, अक्ष+ब=अ($क्ष-क्ष_{१}$); जर $क्ष_{१}$ पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर $क्ष-क्ष_{१}$ धन आहे, **१४२ पृष्ठ पहा,** आणि अ× **धन परिमाणानें,** तर अ चें चिन्ह राहातें, **१४२ पृष्ठ पहा;** परंतु जर $क्ष_{१}$ पेक्षां क्ष कमी असेल, तर $क्ष-क्ष_{१}$ ऋण आहे, आणि अ× **ऋण परिमाणानें,** तर अ चें चिन्ह बदलतें.

उदाहरणें. प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{१}{६}$ पेक्षां अधिक आहे, तिजविषयीं $३क्ष+\frac{१}{२}$ ही पद्धति धन आहे; ह्मणजे $-\frac{१}{८}$ याविषयीं; ही गोष्ट ताडून पहातों. जर $क्ष=-\frac{१}{८}$ तर

$$३क्ष+\frac{१}{२}=३\times-\frac{१}{८}+\frac{१}{२}=+\frac{१}{२}-\frac{३}{८}=+\frac{१}{८}$$

प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{१}{६}$ पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं $३क्ष+\frac{१}{२}$ ही पद्धति ऋण आहे; उदाहरण, जर $क्ष=-\frac{१}{५}$ तर

$$३क्ष+\frac{१}{२}=३\times-\frac{१}{५}+\frac{१}{२}=\frac{१}{२}-\frac{३}{५}=-\frac{१}{१०}$$

याचप्रमाणें, प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{३}{४}$ या पेक्षां अधिक आहे, तिजविषयीं $-४क्ष-३$ ही पद्धती किंवा तिचे बरोबरीचे $-\frac{३}{४}$ ऋण आहेत, आणि प्रत्येक क्षची किंमत जी $-\frac{३}{४}$ पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं ही पद्धति धन आहे; परंतु क्षची किंमत जी $\frac{४}{३}$ पेक्षां अधिक आहे, तिज-

विषयीं $\frac{१}{२}$ क्ष − $\frac{२}{३}$ ही पद्धति धन आहे; आणि प्रत्येक क्षची किंमत जी $\frac{४}{३}$ पेक्षां कमी आहे, तिजविषयीं तीच पद्धति ऋण आहे.

दोन वर्णांचे पद्धतींविषयीं जी गोष्ट आतां पुढें सांगायाची आहे, तिशीं एकवर्ण पद्धतीचा कल्पना मिळतात, यासाठीं वर सांगीतलेल्या गोष्टीनें निर्वाह होतो.

१. लेम्मा. जर क्ष+य = प+क, आणि क्षय = पक, तर क्ष त्या दोहोंतून प अथवा क याचे बरोबर आहे, आणि य राहिलेल्या दुसऱ्याचे बरोबर आहे.

पहिल्या समीकरणाचा वर्ग कर, नंतर दुसरें समीकरण ४ नीं गुणून त्या वर्गांतून वजा कर, जसें पुढील प्रमाणें,

$$क्ष^२+२क्षय+य^२ = प^२+२पक+क^२$$

$$(\times ४) \qquad ४क्षय = ४पक$$

$$(-) \qquad क्ष^२-२क्षय+य^२ = प^२-२पक+क^२$$

या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूचें वर्गमूळ, क्ष−य किंवा य−क्ष आहे; दुसऱ्या बाजूचें वर्गमूळ, प−क किंवा क−प आहे. या दोहों बाजूंचें वर्गमूळ काढ, ह्मणजे या पुढील चार समीकरणांतून एक निघेल;

क्ष−य = प−क . . . . (१) य−क्ष = प−क . . . . (२)

क्ष−य = क−प . . . . (३) य−क्ष = क−प . . . . (४)

परंतु क्ष+य = प+क; हें समीकरण वरल्या चार समीकरणांशीं, वेगळालें मिळविलें असतां या पुढीलप्रमाणें होईल;

(१)अथवा (४) यांशीं मिळविलें असतां क्ष = प य = क } हें सिद्ध करा-
(२)अथवा (३) यांशीं मिळविलें असतां क्ष = क य = प } याचें होतें

हा लेम्मा सांगण्याची गरज नव्हती असें शिकणाराचे मनांत येईल;

परंतु त्याणें लक्षांत धरावें कीं जरी क्ष=प अथवा क, आणि य=क अथवा प, तर क्ष+य=प+क, आणि क्षय=पक हें उघड आहे; तथापि याचें उलटें, ह्मणजे जर क्ष+य=प+क आणि क्षय=पक, तर प किंवा क याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर क्ष होत नाहीं, आणि क अथवा प याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर य होत नाहीं, हें मागल्यासारिखें उघड नाहीं. जसें जर

$$क्ष^2-२अक्ष = ब^2-२अब$$

तर क्ष=ब हें या समीकरणास स्थापितें हें साफ उघड दिसतें, परंतु क्ष=ब याशिवाय दुसरें कोणतें समीकरण त्यास स्थापील, असें निखालस उघड नाहीं. खरें ह्मटलें असतां क्ष=२अ−ब हें त्या समीकरणास स्थापील असें दिसेल.

२. लेम्मा. अक्ष+ब आणि अ'क्ष+ब' या पद्धतीस, क्षशीं निराधार परिमाणानें गुणून किंवा भागून, जर कक्ष+इ आणि क'क्ष+इ' या पद्धती उत्पन्न होत नाहींत, तर पहिल्या दोन पद्धतींचा गुणाकार, या दुसऱ्या दोन पद्धतींचा गुणाकाराबरोबर सर्वदां होऊं शकत नाहीं, ह्मणजे, अक्ष+ब=म(कक्ष+इ) आणि अ'क्ष+ब'=$\frac{1}{म}$(क'क्ष+इ'), यांत म, क्षशीं निराधार असून जर याप्रमाणें होऊं शकणार नाहीं, तर ते गुणाकार बरोबर होणार नाहींत. कां कीं

(अक्ष+ब)(अ'क्ष+ब') = अअ'क्ष^2+(अब'+अ'ब) क्ष+बब' . . . . . . (अ)

(कक्ष+इ)(क'क्ष+इ') = कक'क्ष^2+(कइ'+क'इ) क्ष+इइ' . . . . . . (ब)

जर असें होऊं शकतें, तर क्षला कशींहि किंमत दिली, तरी वरचा दोन उलगडलेल्या पद्धती, सर्वदां बरोबर होतात अशी कल्पना कर. ह्मणजे, याप्रमाणें असो,

$$पक्ष^{२}+कक्ष+र = प'क्ष^{२}+क'क्ष+र'$$

यांत अअ' यांचे जागीं प घेतला, कक' यांचे जागीं प' घेतला; अब'+अ'ब यांचे जागीं क घेतला, बब' यांचे जागीं र घेतला, इत्यादि. **असें हें संक्षेपासाठीं घेतलें.** आतां प = प', क=क' आणि र=र' अशीं स्पष्ट एकरूप नसतील, तर या दोन पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहींत. पुढें याचा ताळा दाखवितों; जर वरचा समीकरणाचा दोन बाजू सर्वदां बरोबर आहेत, तर क्ष=१, असें असलें तर त्या दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि जेव्हां क्ष=२ अथवा क्ष=३ असें असलें, तरी त्याचा दोन बाजू बरोबर आहेत. जेव्हां क्ष अनुक्रमानें १,२, आणि ३ याप्रमाणें केला आहे, तेव्हां समीकरणाचा पहिल्या बाजूचा किमती दाखविण्यासाठीं $त_{१}$, $त_{२}$, $त_{३}$*, असें अनुक्रमानें घे. यावरून कल्पना केल्याप्रमाणें, समीकरणाचा दुसऱ्या बाजूचा किमती त्याच होतील ह्मणजे;

जेव्हां क्ष = १. $प + क + र = त_{१}$ आणि $प' + क' + र' = त_{१}$

जेव्हां क्ष = २. $४प + २क + र = त_{२}$ आणि $४प' + २क' + र' = त_{२}$

जेव्हां क्ष = ३. $९प + ३क + र = त_{३}$ आणि $९प' + ३क' + र' = त_{३}$

$त_{१}$, $त_{२}$, $त_{३}$, हे व्यक्त आहेत अशी कल्पना करून, **१६४ पृष्ठावरचे** रितीवरून, वरचे समीकरणाचे पहिल्ये समुदायापासून प, क, आणि र, यांचा किंमती काढ. नंतर त्याच रितीवरून प', क', आणि र', यांचा किंमती काढ. वरचीं समीकरणें बहुतकरून सारिखीं दिसतात. यास्तव जा रितीनें प, क, आणि र, यांचा किंमती जा परिमाणापासून काढिल्या, त्याच रितीनें प', क', आणि र', यांचा किमती निघतील. यामुळें, उत्तरें एक सारिखींच होतील, ह्मणजे, प=प', क = क', आणि र=र' असें होईल. अभ्यासासाठीं, पहिल्या समुदायाचीं उत्तरें सांगतों, तीं याप्रमाणें आहेत,

$$प = \frac{त_{३}-२त_{२}+त_{१}}{२},\quad क = \frac{८त_{२}-३त_{३}-५त_{१}}{२}\qquad र=त_{३}-३त_{२}+३त_{१},$$

* या तऱ्हेची संक्षेप रीति मांडण्याविषयीं १९८ पृष्ठ पहा.

वरचे ताळ्यापेक्षां हा पुढील ताळा अधिक सोपा आहे, परंतु एक अक्षर ० याचे बरोबर आहे अशी कल्पना करावी लागती, याचे पुढला अध्याय पक्का ध्यानांत येईपर्यंत अशी कल्पना करायास इच्छित नाहीं.

जर सर्वदां $\text{पक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{र}=\text{प}'\text{क्ष}^2+\text{क}'\text{क्ष}+\text{र}'$ असें आहे, तर जेव्हां $\text{क्ष}=0$, या पक्षांत, आणि दुसऱ्या पक्षांत; ही गोष्ट खरी आहे परंतु तेव्हां त्याचा रूपभेद याप्रमाणें होतो,

$$0+0+\text{र}=0+0+\text{र}' \text{ अथवा } \text{र}=\text{र}'$$

यामुळें, सर्वदां, $\text{पक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{र}=\text{प}'\text{क्ष}^2+\text{क}'\text{क्ष}+\text{र}$ असें आहे

(−) र सर्वदां, $\text{पक्ष}^2+\text{कक्ष}=\text{प}'\text{क्ष}^2+\text{क}'\text{क्ष}$ असें आहे

(÷) क्ष सर्वदां, $\text{पक्ष}+\text{क}=\text{प}'\text{क्ष}+\text{क}'$ असें आहे

जेव्हां $\text{क्ष}=0$ तेव्हां हेंहि खरें आहे, अथवा

$$0+\text{क}=0+\text{क}' \text{ ह्मणजे, } \text{क}=\text{क}'$$

यामुळें $\text{पक्ष}+\text{क}=\text{प}'\text{क्ष}+\text{क}$ (−) क, $\text{पक्ष}=\text{प}'\text{क्ष}$ अथवा $\text{प}=\text{प}'$

याचप्रमाणें सिद्ध झालें, कीं क्ष कसाहि असो, २३२ पृष्ठावरचा (अ) आणि (ब) पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहीं, या संकेता खेरीज, ह्मणजे,

$$\text{अअ}'=\text{कक}',\ \text{अब}'+\text{अ}'\text{ब}=\text{कइ}'+\text{क}'\text{इ},\ \text{आणि}\ \text{बब}'=\text{इइ}'$$

दुसरें आणि तिसरें पहिल्याने भाग, तर हें होतें

$$\frac{\text{अब}'}{\text{अअ}'}+\frac{\text{अ}'\text{ब}}{\text{अअ}'}=\frac{\text{कइ}'}{\text{कक}'}+\frac{\text{क}'\text{इ}}{\text{कक}'},\quad \frac{\text{बब}'}{\text{अअ}'}=\frac{\text{इइ}'}{\text{कक}'},$$

$$\text{अथवा}\quad \frac{\text{ब}'}{\text{अ}'}+\frac{\text{ब}}{\text{अ}}=\frac{\text{इ}'}{\text{क}'}+\frac{\text{इ}}{\text{क}},\quad \frac{\text{ब}'}{\text{अ}'}\times\frac{\text{ब}}{\text{अ}}=\frac{\text{इ}'}{\text{क}'}\times\frac{\text{इ}}{\text{क}}$$

यावरून, **पहिल्या लेम्माप्रमाणें** $\frac{ब'}{अ'}=\frac{इ'}{क'}$, आणि $\frac{ब}{अ}=\frac{इ}{क}$ अथवा $\frac{ब'}{अ'}=\frac{इ}{क}$ आणि $\frac{ब}{अ}=\frac{इ'}{क'}$.

यांतून पहिला संकेत घे.

$$परंतु,\ अक्ष+ब=अ\left(क्ष+\frac{ब}{अ}\right)=अ\left(क्ष+\frac{इ}{क}\right)$$

$$=अ-\frac{कक्ष+इ}{क}=\frac{अ}{क}(कक्ष+इ)$$

याचप्रमाणें $अ'क्ष+ब'=\frac{अ'}{क'}(क'क्ष+इ')$

परंतु $\frac{अअ'}{कक'}=१$ अथवा $\frac{अ}{क}\times\frac{अ'}{क'}=१$, जर $\frac{अ}{क}=म$, तर $\frac{अ'}{क'}=\frac{१}{म}$

यामुळें $\qquad अक्ष+ब=म(कक्ष+इ)$

आणि $\qquad अ'क्ष+ब'=\frac{१}{म}(क'क्ष+इ')$

दुसऱ्या संकेताची कल्पना करून शिकणारानें उलगडून दाखवावें, कीं त्यांपासून उत्तर यासारिखेंच होतें.

दोन वर्ण समीकरणांचें अंकगणितरूप उलगडणें दाखविण्याकरितां, बीजगणितांतील सर्वांपेक्षां सरळरूप पद्धति घेतों, ती ही आहे, $अक्ष^२+बक्ष+क$. दोन वर्णांचे कोणत्याहि दुसऱ्ये पद्धतीस, रूपांतर करून, अशे रूपांत आणितां येईल.

२२८ वें पृष्ठ पहा. जसें, जर $अ=-\frac{१}{२}$, $ब=२$, आणि $क=-२$ तर $-\frac{१}{२}क्ष^२+२क्ष-२$ हें समीकरण त्या संक्षेपरूपाशीं मिळतें.

व्याख्या. क्षविषयीं त्या पद्धतीस पूर्णवर्ग ह्मणतात, जेव्हां तिचें वर्गमूळ अशे रूपानें काढितां येतें कीं त्यांत √ या चिन्हांत क्ष येत नाहीं. शोधल्यानें याप्रमाणें दिसेल, जसें,

$$\sqrt{अक्ष^२+२अ^२क्ष+अ^३}=\sqrt{अ}\,(क्ष+अ)$$

$$\sqrt{अ^२क्ष+२अक्ष^२+क्ष^३}=\sqrt{क्ष}\,(अ+क्ष)$$

यावरून क्षविषयीं अक्ष^२+२अ^{२}क्ष+अ^३ हा पूर्ण वर्ग आहे, परंतु अविषयीं नाहीं; अविषयीं अ^{२}क्ष+२अक्ष^२+क्ष^३ हा पूर्णवर्ग आहे. परंतु क्षविषयीं नाहीं. पहा, जर क्षविषयीं पक्ष^२+कक्ष+र हा पूर्ण वर्ग असेल. तर कोणतीहि पद्धति जीमध्यें क्ष नाहीं तिणें गुणून पूर्णवर्ग रहातो, कां कीं जर

$$पक्ष^२+कक्ष+र = (गक्ष+ह)^२$$

तर (×)म $$मपक्ष^२+मकक्ष+मर = \{\sqrt{म}\ (गक्ष+ह)\}^२$$

लेम्मा. क्षविषयीं पक्ष^२+कक्ष+र हा पूर्णवर्ग आहे त्यापासून या संकेताचा बोध होतो ह्मणजे, क^२ = ४ पर

पक्ष^२+कक्ष+र याचें वर्गमूळ गक्ष+ह आहे, अशी कल्पना कर. याशिवाय दुसरी कोणत्याहि रूपाची पद्धति होऊं शकत नाहीं, हें शोधल्यानें कळेल. तर

$$(गक्ष+ह)^२ = पक्ष^२+कक्ष+र$$

अथवा $$ग^२क्ष^२+२गहक्ष+ह^२ = पक्ष^२+कक्ष+र,$$ असें सर्वदां आहे. यामुळें २३२ पृष्ठाप्रमाणें,

$$ग^२ = प, \qquad २गह = क, \qquad ह^२ = र$$

एथें, तर, तीन समीकरणें आहेत, जांपासून जीं अद्यापि ठरविलेलीं नाहीं अशीं ग आणि ह परिमाणें ठरवायाचीं आहेत. जर पहिलें आणि तिसरें समीकरण परस्पर गुणून त्यांचा गुणाकार ४नीं गुणिला, आणि जर दुसऱ्याचा वर्ग केला, तर याप्रमाणें होईल,

$$४ग^२ह^२ = ४पर \text{ आणि } (२गह)^२ \text{ अथवा } ४ग^२ह^२ = क^२$$

यामुळें क^२ = ४पर, ग आणि ह यांचीं तीन समीकरणें खरीं होण्याकरितां, असा संकेत स्थापिला पाहिजे.

वरचे समीकरणांपासून ग = $\sqrt{प}$, ह = $\sqrt{र}$, अथवा, जर क^{२} = ४पर, तर पक्ष^{२} + कक्ष+र याचें वर्गमूळ = $\sqrt{प}$ क्ष+$\sqrt{र}$, असें होतें.

$\sqrt{प}$ आणि $\sqrt{र}$ या दोन पदांपासून कांहीं भ्रांती होईल. कां कीं **२०८ पृष्ठाप्रमाणें**, ग^{२} = प यापासून ग = + $\sqrt{प}$ अथवा − $\sqrt{प}$ होईल, आणि त्यासारिखें, ह हा +$\sqrt{र}$ अथवा − $\sqrt{र}$ होईल.

परंतु एथें ध्यानांत आणलें पाहिजे, कीं २गह = क यास ४ग^{२}ह^{२}=क^{२} असा रूपभेद केल्यानें क^{२} = ४पर हें समीकरण मिळालें. परंतु २गह = −क, जांत कचे जागीं −क मांडिला आहे, यापासून क^{२} = ४पर हें समीकरण निघेल; यामुळें, त्याच समीकरणापासून असें कळलें, कीं पक्ष^{२}+कक्ष+र आणि पक्ष^{२}−कक्ष+र, हे दोन्ही पूर्णवर्ग आहेत. आणि जर गक्ष+ ह या पद्धतीशीं ग आणि ह या दोहोंचा किमतीचा, होईल तितक्या तऱ्हानीं संयोग केला असतां, या पुढील चार पद्धती होतात;

$\sqrt{प}$ क्ष+$\sqrt{र}$	−$\sqrt{प}$ क्ष+$\sqrt{र}$
$\sqrt{प}$ क्ष−$\sqrt{र}$	−$\sqrt{प}$ क्ष−$\sqrt{र}$

यांतून कोणतीहि पद्धति पक्ष^{२}+कक्ष+र अथवा पक्ष^{२}−कक्ष+र यांचें वर्गमूळ होईल. परंतु २गह = क हें समीकरण पहिल्या पद्धतीस मात्र लागतें, आणि त्याचप्रमाणें २गह = −क, हें दुसरे पद्धतीस मात्र लागतें, आणि **हीं दोन्हीं समीकरणें ४ ग^{२}ह^{२} = क^{२} याणें दर्शवितां येतात,** तर पहिलें समीकरण रूपभेद न करितां घेतलें, तर गक्ष+ह याचा सगळ्या चार किमती पक्ष^{२}+कक्ष+र यांचीं वर्गमुळें होऊं शकत नाहींत, परंतु जांत ग आणि ह यांचीं चिन्हें अशीं आहेत कीं त्यांचा गुणाकार गह याचें चिन्ह कचे चिन्हासारिखें होईल, तींच पदें मात्र या पद्धतीचीं वर्गमूळें होतील. ह्मणजे, जर क धन आहे, तर ग आणि ह हीं दोन्हीं धन किंवा दोन्ही ऋण असावीं; कां कीं त्यापक्षीं गह धन असावा; जर क ऋण असला तर ग धन आणि ह ऋण अथवा ग ऋण आणि ह धन असावा.

जसें, जर, क धन आहे, आणि क^{२} = ४पर, तर पक्ष^{२}+कक्ष+र याचीं वर्गमूळें $\sqrt{प}$क्ष+$\sqrt{र}$, आणि −$\sqrt{प}$क्ष−$\sqrt{र}$ आहेत; जर क ऋण आहे तर पक्ष^{२}−कक्ष+र याचीं वर्गमूळें $\sqrt{प}$क्ष−$\sqrt{र}$ आणि −$\sqrt{प}$क्ष

$+\sqrt{र}$ आहेत. २०८ **पृष्ठावर** सांगीतलें कीं परिमाणाचे दोन वर्गमूळांमध्यें चिन्हांचा मात्र भेद असतो, ह्मणून वरची गोष्ट त्याशीं मिळती आहे; कां कीं

$$-\sqrt{प}क्ष-\sqrt{र} = -(\sqrt{प}क्ष+\sqrt{र})$$
$$-\sqrt{प}क्ष+\sqrt{र} = -(\sqrt{प}क्ष-\sqrt{र})$$

उदाहरणें. $३क्ष^२+२क्ष+१$ हा पुरा वर्ग नाहीं, कां कीं $(२)^२$, अथवा ४ हें ४ (३×१), अथवा १२ यांचे बरोबर नाहीं; परंतु $२क्ष^२-१२क्ष+१८$ हा पूर्णवर्ग आहे, कां कीं $(-१२)^२$, अथवा १४४ हे = ४(२×१८), अथवा १४४. **यांत क ऋण आहे ह्मणून त्याचें वर्गमूळ** $\sqrt{२}क्ष-\sqrt{१८}$ अथवा $-\sqrt{२}क्ष+\sqrt{१८}$ आहे.

जास **वर्गपूरीकरण** असें ह्मणतात तें या वरचे सिद्धांताचें मुख्य कारण आहे; ह्मणजे $पक्ष^२$, कक्ष अथवा र या तिहींतून कोणत्याहि दोहोंचे सहाय्यानें तिसऱ्या पदाची किंमत किंवा तें पद काढितां येईल. उदाहरण, $२क्ष^२+३क्ष$ हीं दिलीं असतां वर्ग पुरा कर. यांत प=२, क=३, रची किंमत सांगीतली नाहीं परंतु वरची पद्धति पूर्ण होण्यास $क^२=४पर$ असावें, ह्मणजे, ९ = ८र, अथवा $र=\frac{९}{८}$, यावरून असें दिसतें कीं $२क्ष^२+३क्ष+\frac{९}{८}$ हा पूर्ण वर्ग आहे, त्याचीं मूळें

$$\sqrt{२}क्ष+\frac{३}{\sqrt{८}} \text{ अथवा } -\sqrt{२}क्ष-\frac{३}{\sqrt{८}} \text{ हीं आहेत.}$$

सामान्यतः, जर $क^२ = ४पर$, तर $र=\frac{क^२}{४प}$ ह्मणजे $पक्ष^२+कक्ष$ याचा पूर्णवर्ग हें पुढील मिळविल्यानें होतो,

$$\frac{(\text{क्षचा गुणक})^२}{४(\text{क्ष}^२\text{चा गुणक})}$$

जसें, $अक्ष^२+बक्ष+\frac{ब^२}{४अ}$ हा पूर्णवर्ग आहे, आणि त्याचप्रमाणें $४अ^२क्ष^२+४अबक्ष+ब^२$, हाहि पुरा वर्ग आहे त्याचीं मूळें ±(२अक्ष+ब) आहेत.

आतां या पुढील पद्धतीचे वेगळाल्ये रूपांचा विशेष लक्षणभेद दाखवितों.

$$अक्ष^2+बक्ष+क.$$

या पद्धतींत, जर $ब^2=४अक$ आहेत, तर ही पद्धति पूर्णवर्ग आहे असें पूर्वीं दिसलें. ज्या पक्षांत ४अक पेक्षां $ब^2$ अधिक आहे, आणि ज्या पक्षांत ४अक पेक्षां $ब^2$ कमी आहे, या दोन पक्षांचा निरनिराळा विचार करितों.

१. ४अक यापेक्षां $ब^2$ अधिक आहे, अशी कल्पना कर, अथवा या प्रमाणें

$$ब^2=४अक+{}^*इ^2 \text{ अथवा } ४अक=ब^2-इ^2$$

$$\text{आतां } अक्ष^2+बक्ष+क=\frac{४अ^2क्ष^2+४अबक्ष+४अक}{४अ}=\frac{४अ^2क्ष^2+४अबक्ष+ब^2-इ^2}{४अ}$$
$$=\frac{(२अक्ष+ब)^2-इ^2}{४अ}=\frac{(२अक्ष+ब+इ)(२अक्ष+ब-इ)}{४अ}$$

अथवा, हा पुढील सिद्धांत होतो,

जर $इ^2=ब^2-४अक$. अथवा $इ=\sqrt{ब^2-४अक}$, तर

$अक्ष^2+बक्ष+क=\frac{1}{४अ}(२अक्ष+ब+इ)(२अक्ष+ब-इ)$ या दोन्हीं एकरूपानें बरोबर आहेत.

२. $ब^2=४अक$ अशी कल्पना कर, तर $अक्ष^2+बक्ष+क$ पूर्णवर्ग आहे, आणि $४अ^2क्ष^2+४अबक्ष+४अक$ ही पद्धति आणि $४अ^2क्ष^2+४अबक्ष+ब^2$ ही एकच आहे. तरी तीहि पूर्णवर्ग आहे; आणि

* $४अक+इ^2$ असें कां, $४अक+इ$ कां नाहीं, कां कीं ४अक हें खचित वाढविलें असें दाखवायाचें आहे. इ धन किंवा ऋण हें कळेपावेतों, $४अक+इ$ ही वाढविली किंवा कमी झाली हें कळत नाहीं. परंतु इ धन किंवा ऋण असो तथापि $इ^2$ धन आहे. शुद्धचिन्हरूप पदें एथें उपयोगांत घेत नाहीं. यावरून कोणतेंहि वर्गरूप पद, परिमाण वाढवितें असें शिकणारानें समजावें.

$$\text{अक्ष}^2+\text{बक्ष}+\text{क}=\frac{\text{४अ}^2\text{क्ष}^2+\text{४अबक्ष}+\text{ब}^2}{\text{४अ}}=\frac{(\text{२अक्ष}+\text{ब})^2}{\text{४अ}}$$

२. ४अक यापेक्षां ब^2 कमी आहे, अशी कल्पना कर, ह्मणजे

$$\text{ब}^2=\text{४अक}-\text{इ}^2 \quad \text{अथवा} \quad \text{४अक}=\text{ब}^2+\text{इ},^2 \text{ तर}$$

$$\text{अक्ष}^2+\text{बक्ष}+\text{क}=\frac{\text{४अ}^2\text{क्ष}^2+\text{४अबक्ष}+\text{४अक}}{\text{४अ}}=\frac{\text{४अ}^2\text{क्ष}^2+\text{४अबक्ष}+\text{ब}^2-\text{इ}^2}{\text{४अ}}$$

$$=\frac{(\text{२अक्ष}+\text{ब})^2+\text{इ}^2}{\text{४अ}}$$

पुढें जाण्याचे पूर्वीं वरचा पद्धती विशेष पक्षांस लावितों.

१. $\text{३क्ष}^2-\text{७क्ष}+\text{४}$, अशी पद्धति असो. यांत अ = ३, ब = −७, क = ४. आणि ब^2 = ४९, ४अक = ४८. यावरून ४अक पेक्षां ब^2 अधिक आहे, आणि $\text{ब}^2-\text{४अक}=\text{१}$. हा इ^2 आहे; यामुळें इ = +१., किंवा −१. इ = +१ असें असो, तर

$$\text{३ क्ष}^2-\text{७ क्ष}+\text{४}=\frac{(\text{६क्ष}-\text{७}+\text{१})\,(\text{६क्ष}-\text{७}-\text{१})}{\text{४}\times\text{३}}=\frac{(\text{६क्ष}-\text{६})\,(\text{६क्ष}-\text{८})}{\text{१२}}$$

$$=\frac{(\text{६क्ष}-\text{१})\times\text{२}\,(\text{३क्ष}-\text{४})}{\text{१२}}=(\text{क्ष}-\text{१})\,(\text{३क्ष}-\text{४})$$

गुणाकार केल्यानें हें खरें आहे असें दिसेल. इ = −१ अशे कल्पनेवरून शिकणारानें दाखवावें कीं वरचासारिखेंच उत्तर येतें.

$$\begin{array}{r} \text{३क्ष}-\text{४} \\ \text{क्ष}-\text{१} \\ \hline \text{३क्ष}^2-\text{४क्ष}\phantom{+\text{४}} \\ -\text{३क्ष}+\text{४} \\ \hline \text{३क्ष}^2-\text{७क्ष}+\text{४} \end{array}$$

आतां हें विचारायाचें आहे, कीं या पद्धतीचीं मूळें, अथवा क्षचा

किमती काय आहेत, अशा कीं त्या किमतीनीं ती पद्धति नाहींशी होईल. गुण्य किंवा गुणक यांतून एक तरी=० असेल, तर गुणाकार० होतो; ह्मणजे क्ष−१=०, असें असो, अथवा ३क्ष−४=० असें असो, तर

पहिल्या पक्षीं, $३क्ष^२−७क्ष+४ = ०×(३−४)=०$

दुसरे पक्षीं, $३क्ष^२−७क्ष+४ = (\frac{४}{३}−१)×०=०$

परंतु जर क्ष−१=०, तर क्ष=+१, आणि जर ३क्ष−४=० तर क्ष=$\frac{४}{३}$, यामुळें १ आणि $\frac{४}{३}$ या क्ष चा किमती आहेत, जीहीं करून $३क्ष^२−७क्ष+४$ ही पद्धति नाहींशी होती; किंवा ते अंक त्या पद्धतीचीं मूळें आहेत, **२२८ पृष्ठ पहा.**

आतां विचार करितों कीं क्ष चा किमती काय असाव्या, अशा कीं $३क्ष^२−७क्ष+४$ अथवा त्याचे बरोबरीची (क्ष−१)(३क्ष−४) ही धन किंवा ऋण होईल. पहाण्यांत येतें, कीं जर १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर क्ष−१ धन आहे, आणि जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर ३क्ष −४ हे धन आहेत; परंतु जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर क्ष−१ ऋण आहे, आणि जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ३क्ष−४ ऋण आहेत, **२३० पृष्ठ पहा.**

क्षची किंमत.	क्ष−१ याचें चिन्ह.	३क्ष−४ याचें चिन्ह.	(क्ष−१)(३क्ष−४) यांचे गुणाकाराचें चिन्ह.
१ पेक्षां कमी	−	−	+
{ १ पेक्षां अधिक $\frac{४}{३}$ पेक्षां कमी	+	−	−
$\frac{४}{३}$ पेक्षां अधिक	+	+	+

१ आणि $\frac{४}{३}$ या मूळांमध्यें क्ष असल्या शिवाय, वरची शेवटील पद्धति सर्वदां धन आहे. या तऱ्हेनें $३क्ष^२−७क्ष+४$ याविषयीं या पुढील गोष्टी

सिद्ध झाल्या; ह्मणजे, $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर ती पद्धति+ आहे; जर क्ष=$\frac{४}{३}$, असेल तर ती० आहे; जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष कमी आहे, किंवा १ पेक्षां अधिक आहे, तर ती–आहे; जर क्ष १ आहे, तर ती० आहे; जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ती+आहे.

१. या पुढील पद्धतींशीं अशीच कृति करावी.

$$२क्ष^2+३क्ष+१=(क्ष+१)(२क्ष+१)$$
$$३क्ष^2+४क्ष-७=(क्ष-१)(३क्ष+७)$$
$$-२क्ष^2+६क्ष-४=(२-क्ष)(२क्ष-२)$$

जां पद्धतींपासून इर्राशनल् उत्तरें येत नाहींत अशा पद्धती एथपर्यंत निवडून घेतल्या आहेत; आतां तर $३क्ष^2+५क्ष-१$ या पद्धतीस तपासून पहा. यांत अ = ३, ब = ५, क = –१; ४ अक अथवा –१२ यां पेक्षां $ब^2$ अथवा २५ अधिक आहेत १४० पृष्ठ पहा, आणि $ब^2-४अक=३७=इ^2$; यामुळें $इ=\pm\sqrt{३७}$. इ बरोबर+ $\sqrt{३७}$ असें असो, तर, २३९ व्ये पृष्ठावरून

$$३क्ष^2+५क्ष-१=\frac{(२\times३क्ष+५+\sqrt{३७})(२\times३क्ष+५-\sqrt{३७})}{४\times३}$$
$$=\frac{१}{१२}(२\times३क्ष+५+\sqrt{३७})(२\times३क्ष+५-\sqrt{३७})$$

या पद्धतीचीं मूळें दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{।।}$ घे, तर मूळें याप्रमाणें आहेत.

$$क्ष_{।}=-\frac{\sqrt{३७}+५}{६} \quad आणि \quad क्ष_{।।}=\frac{\sqrt{३७}-५}{६}$$
$$=-१.८४७१२७१ \qquad =.१८०४६०४ \text{ जवळ जवळ}$$

$क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{।।}$ या मूळांमध्यें क्ष असल्या शिवाय, पूर्वींप्रमाणें, पहाण्यांत येईल, कीं वरची पद्धति ऋण कधींहि होणार नाहीं.

२. आतां ३क्ष^{२}–६क्ष+३ ही पद्धति घे. यांत ब^{२} अथवा (–६)^{२} हा ४अक अथवा ४×३×३ याचे बरोबर आहे. यावरून ही पद्धति पूर्ण-वर्ग आहे, आणि **२३७ पृष्ठावरून**

$$३क्ष^{२}–६क्ष+३ = (\sqrt{३}\,क्ष–\sqrt{३})^{२} = ३(क्ष–१)^{२}$$

जेव्हां $\sqrt{३}$क्ष–$\sqrt{३}$ नाहींसे होतात, अथवा जेव्हां क्ष =१, तेव्हां मात्र वरची पद्धति नाहींशी होती. परंतु यांत गुण्यगुणक हे दोन्ही एक सारिखेच आहेत ह्मणजे, $\sqrt{३}$ क्ष– $\sqrt{३}$, असे आहेत, या कारणास्तव आणि वरचा पक्षांशीं सारिखेपणा राखण्यासाठीं, असें **ह्मणण्यांत येतें**, कीं अशे पद्धतीला **दोन** मूळें आहेत, आणि तीं **बरोबर** आहेत. यावरून या पद्धतीला दोन मूळें आहेत, आणि त्यांतून प्रत्येक=१ आहे.

ही पद्धति ऋण कधींहि होणार नाहीं, कां कीं सर्व पक्षांत (क्ष–१)^{२} धन आहे. क्षला केवळ चिन्हरूप किंमत दिल्यानें त्या पद्धतीस ऋण करितां येतें; उदाहरण, १+$\sqrt{-१}$ ही किंमत दे, तेव्हां **२२५ पृष्ठावरून केवळ रिती प्रमाणें** (क्ष–१)^{२}=–१ होईल.

३. जे पक्ष पूर्वीं घेतले आहेत त्यांतून एकांतहि ४ अक यापेक्षां ब^{२} कमी नव्हता. आतां तर २क्ष^{२}–क्ष+४ या पद्धतीस शोधून पहा. यांत अ=२, ब=–१, क=४; आणि ब^{२}=१, ४अक=३२ ह्मणजे हे ब^{२} पेक्षां अधिक आहेत. **२३९ पृष्ठाप्रमाणें** ४अक–ब^{२}=इ^{२} असें असो, तर यामुळें इ^{२}=३१ आहेत.

यावरून **२३९ पृष्ठाप्रमाणें** हें होईल.

$$२क्ष^{२}–क्ष+४ = \frac{(२×२क्ष–१)^{२}+३१}{४×२} = \frac{(४क्ष–१)^{२}+३१}{८}$$

या पद्धतीस कांहीं धन किंवा ऋणमूळ नाहीं, कां कीं जोंपर्यंत क्ष धन किंवा ऋण आहे, तोंपर्यंत (४क्ष–१)^{२} ही सर्वदां धन होईल, यास्तव ती ३१ यांशीं मिळविली असतां ३१ खचित् वाढतील, आणि यामुळें, (४क्ष–१)^{२}+३१ ही=० कधीं होणार नाहीं, परंतु ती सर्वदां धन आहे. तर, असें दिसतें, कीं क्षचे प्रत्येक धन किंवा ऋण किमतीविषयीं,

$२क्ष^2 - क्ष + ४$ हीं सर्वदां धन आहे. अशा बंधारणानें या पद्धतीची अति लहान किंमत. $\frac{३१}{८}$ आहे, कां कीं $४क्ष - १ = ०$, अथवा $क्ष = \frac{१}{४}$ असें केल्यानें $(४क्ष - १)^2$ याची अति लहान किंमत काढितां येती. यामुळें, वरचे पद्धतींत हा पुढील गुण आहे; $क्ष = \frac{१}{४}$ असें केल्यानें त्याची अति लहान किंमत $\frac{३१}{८}$ आहे; का कीं क्षचे प्रत्येक दुसऱ्ये किमतीविषयीं ती $\frac{३१}{८}$ यापेक्षां अधिक आहे.

हे पुढील पक्ष शिकणारानें शोधून पाहावे.

$$क्ष^2 + क्ष + १ = \frac{१}{४} \left\{ (२क्ष + १)^2 + ३ \right\}$$
$$क्ष^2 - क्ष + १ = \frac{१}{४} \left\{ (२क्ष - १)^2 + ३ \right\}$$
$$-२क्ष^2 + २क्ष - ५ = -\frac{१}{८} \left\{ (४क्ष - २)^2 + ३६ \right\}$$

वरचा पद्धतींस केवळ चिन्हरूपमूळें देऊं शकतात; ह्मणजे $२क्ष^2 - क्ष + ४ = ०$, असें करायाकरितां, याप्रमाणें करूं

$$(४क्ष - १)^2 + ३१ = ० \qquad (४क्ष - १)^2 = -३१$$
$$४क्ष - १ = +\sqrt{-३१} \text{ अथवा } ४क्ष - १ = -\sqrt{-३१}$$

जीं मूळें यांपासून निघतात, त्यांस दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे, तर

$$क्ष_{।} = \frac{१ + \sqrt{-३१}}{४} \qquad क्ष_{॥} = \frac{१ - \sqrt{-३१}}{४}$$

२२५ पृष्ठाप्रमाणें हीं केवळ रितीनें मूळें आहेत असें दिसेल.

आतां वरचेपेक्षां कांहीं साधारण पक्ष घेतों.

१. $अक्ष^2 + बक्ष + क = ०$, यांत $ब^2 - ४अक = इ^2$, **२३९ पृष्ठाप्रमाणें**, आणि $अक्ष^2 + बक्ष + क = \frac{१}{४अ} (२अक्ष + ब + इ)(२अक्ष + ब - इ)$

$अक्ष^2 + बक्ष + क$ या पद्धतीचीं, पुढीलप्रमाणें, आठ वेगळालीं रूपें आहेत, तर अ, ब, क, ड, आणि अं, बं, कं, डं, या आठ अक्षरांनीं तीं रूपें दर्शविलीं आहेत.

	अचें चिन्ह.	बचें चिन्ह.	कचें चिन्ह.
(अ) २क्ष^{२}+५क्ष+१	+	+	+
(अ')−२क्ष^{२}−५क्ष−१	−	−	−
(ब) २क्ष^{२}−५क्ष+१	+	−	+
(ब')−२क्ष^{२}+५क्ष−१	−	+	−
(क) २क्ष^{२}+५क्ष−१	+	+	−
(क')−२क्ष^{२}−५क्ष+१	−	−	+
(ड) २क्ष^{२}−५क्ष−१	+	−	−
(ड')−२क्ष^{२}+५क्ष+१	−	+	+

जो गुण या सर्व रूपांस साधारण आहे त्याचा आरंभीं विचार करितों, आणि त्यानंतर प्रत्येक रूपाचे विशेष गुणाचा विचार होईल.

अक्ष^{२}+बक्ष+क याचीं मूळें या पुढील समीकरणांचे उलगडण्यानें निघतात; मूळें दाखविण्याकरितां $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे.

$$२अक्ष+ब-इ = ० \qquad २अक्ष+ब+इ = ०$$

$$क्ष_{।} = \frac{-ब+इ}{२अ} \qquad क्ष_{॥} = \frac{-ब-इ}{२अ}$$

परंतु $इ = \sqrt{ब^{२}-४अक}$, यामुळें,

$$क्ष_{।} = \frac{-ब+\sqrt{ब^{२}-४अक}}{२अ} \qquad क्ष_{॥} = \frac{-ब-\sqrt{ब^{२}-४अक}}{२अ}$$

आणि, **२३० पृष्ठावरून,** २अक्ष+ब−इ ही पद्धति आणि $२अ(क्ष-क्ष_{।})$ ही एकसारिखीच आहे, आणि २अक्ष+ब+इ ही पद्धति आणि $२अ(क्ष-क्ष_{॥})$ ही एकसारिखीच आहे. ही गोष्ट खरी आहे असें पुनः दाखवितों,

$$२अक्ष+ब-इ = २अ(क्ष+\frac{ब-इ}{२अ}) = २अ(क्ष-\frac{-ब+इ}{२अ}) = २अ(क्ष+क्ष_{।})$$

$$२अक्ष+ब+इ = २अ(क्ष+\frac{ब+इ}{२अ}) = २अ(क्ष-\frac{-ब-इ}{२अ}) = २अ(क्ष-क्ष_{॥})$$

$$\therefore अक्ष^{२}+बक्ष+क = \frac{४अ^{२}(क्ष-क्ष_{।})(क्ष-क्ष_{॥})}{४अ} = अ(क्ष-क्ष_{।})(क्ष-क्ष_{॥})$$

यावरून जेव्हां दुसरे वर्णाचे पद्धतीचीं दोन मूळें, आणि त्याचे पहिल्ये पदाचा गुणक ठाऊक आहे, तेव्हां ती पद्धतिहि काढितां येईल. उदाहरण. २ आणि $-\frac{१}{२}$ हीं जा पद्धतीचीं मूळें आहेत, आणि जिचे पहिल्ये पदाचा गुणक ४ आहे, तर ती पद्धति काय आहे ? वरचे पद्धतीचे रूपाप्रमाणें, इच्छिली पद्धति याप्रमाणें असावी,

$$४(क्ष-२)(क्ष-(-\frac{१}{२})) \text{ अथवा } ४(क्ष-२)(क्ष+\frac{१}{२}) \text{ अथवा } ४क्ष^२-६क्ष-४,$$

वरची पद्धति उलगडली असतां, याप्रमाणें निघेल,

$$अ(क्ष-क्ष_{।})(क्ष-क्ष_{॥}) = अक्ष^२-अ(क्ष_{।}+क्ष_{॥})क्ष+अक्ष_{।}\,क्ष_{॥}$$

ही, $अक्ष^२+बक्ष+क$ याशीं एकरूप आहे; यामुळें **२३३ पृष्ठावरून**, याप्रमाणें होईल,

$$ब = -अ(क्ष_{।}+क्ष_{॥}) \text{ अथवा } क्ष_{।}+क्ष_{॥} = -\frac{ब}{अ}$$

$$क = अक्ष_{।}\,क्ष_{॥} \qquad \text{अथवा } क्ष_{।}\,क्ष_{॥} = \frac{क}{अ}$$

$$\text{मुळांची बेरीज} = -\frac{\text{क्षचा गुणक}}{\text{क्ष}^२\text{चा गुणक}}$$

$$\text{मुळांचा गुणाकार} = \frac{\text{क्ष वांचून पद}}{\text{क्ष}^२\text{चा गुणक}}$$

जेव्हां $अ=१$, अथवा पद्धति याप्रमाणें आहे, ह्मणजे, $क्ष^२+बक्ष+क$, तेव्हां याप्रमाणें होईल.

मुळांची बेरीज $= -ब$ होईल, मुळांचा गुणाकार $= क$ होईल, पूर्वीचा उदाहरणावरून या सिद्धांतास ताडून पहा.

वरचीं रूपें दाखविण्यासाठीं, पद्धतीचीं चिन्हें कुंडलींत मांडिलीं आहेत; जसें अ पद्धति. (+++) यांणीं, आणि, अं पद्धति (− − −) यांणीं दाखवितां येईल, इत्यादि. हा पहिला पक्ष, जामध्यें $ब^२-४अक$ धन आहेत; चिन्हाचा पुढीलप्रमाणें जा भिन्न भिन्नरचना होऊं शकतात त्या सर्व या पक्षांत आहेत.

(+ + −) (− − +) (+ − −) (− + +)

कां कीं या सर्वांमध्यें अ आणि क यांचीं चिन्हें भिन्न आहेत; यामुळें अक ऋण आहे, आणि, यामुळें, $ब^{२}-(-४अक)$ धन आहे, आणि $ब^{२}$-हून अधिक आहे. एथें तर, अ, ब, क, यांचा अंकगणित किमतीचे आश्रयावांचून, $ब^{२}-(-४अक)$ धन आहे. याच पक्षांत ही पुढील रचना असेल किंवा नसेल.

(+ + +) (− − −) (+ − +) (− + −)

या सर्वांमध्यें अक धन आहे; आणि यामुळें $ब^{२}-४अक$ या पद्धतीचें चिन्ह $ब^{२}$ आणि अक यांचे केवळ अंकगणित किमतीचे आश्रयावर आहे.

जा पक्षांत मूळें आहेत त्यांचा आतां विचार करितों; मनांत धरलें पाहिजे, कीं जोडींतून कोणत्याहि एक पद्धतीचीं, केवळ चिन्हें बदल करून, तीस तिचे जोडीचे दुसऱ्ये पद्धतीचें रूप देतां येईल. जसें, $-क्ष^{२}-क्ष+१=-(क्ष^{२}+क्ष-१)$, अथवा केवळ चिन्हें बदल केल्यानें (− − +) यांचें रूप (+ + −) असें होतें. आणि, जेव्हां $अ=०$, तेव्हां $-अ=०$, यामुळें प्रत्येक प्रकार जो पदाचे केवळ चिन्हाचे आश्रयावर आहे, त्यांत या पुढल्या ओळींतील पहिल्या ओळीचे पद्धतीचीं मूळें दुसऱ्ये ओळींतील त्यांशीं मिळत्या पद्धतीचे मुळासारिखीं आहेत.

(+ + +) (− − −) (+ + −) (− − +)
(+ − +) (− + −) (+ − −) (− + +)

१. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें नसतात, त्या पद्धती (+ + +) (− − −) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत $ब^{२}$ पेक्षां $ब^{२}-४$ अक कमी असतात. त्या पद्धतींस जर मूळें असलीं, तर तीं दोन्हीं ऋण असतात. कां कीं जा पेक्षां $ब^{२}$ हून $ब^{२}-४$ अक कमी आहेत ह्मणून, २२६ पृष्ठाप्रमाणें $\sqrt{ब^{२}}$ अथवा ब ची अंकगणितरूप किंमत याहून $\sqrt{ब^{२}-४अक}$ कमी आहेत. यामुळें $-ब+\sqrt{ब^{२}-४अक}$ आणि $-ब-\sqrt{ब^{२}-४अक}$ या दोहों-

स—ब अथवा ब चे विरुद्ध चिन्ह सारिखेंच आहे*. परंतु मूळें हीं पुढील आहेत.

$$\frac{-ब+\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ} \qquad \frac{-ब-\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}$$

चिन्हांविषयीं, हीं दोन्हीं मूळें ऋण आहेत, कां कीं, ब आणि अ यांचीं चिन्हें दोहों पद्धतींत सारिखींच आहेत, आणि अ आणि ब यांचे चिन्हाविरुद्ध अंशाचें चिन्ह आहे, आणि त्यांचे चिन्हासारिखें छेदाचें चिन्ह आहे.

२. **ज्या पद्धतींस** वास्तवीक मूळें नसतात, त्या पद्धती (+ − +) (− + −) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत $ब^२$हून $ब^२-४$ अक कमी असतात. आतां अ आणि ब यांस निरनिराळीं चिन्हें आहेत, असें लक्षांत ठेऊन जर अशे पद्धतींस मूळें असलीं, तर वरचे सारिख्याच कृतीनें तीं दोन्हीं धन आहेत असें सिद्ध करितां येईल.

३. **ज्या पद्धतींस** वास्तवीक मूळें सर्वदां असतात, त्या पद्धती (+ + −) (− − +) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत $ब^२$हून $ब^२-४$ अक अधिक असतात. यांतून प्रत्येक पद्धतीस एक धन आणि एक ऋण अशीं दोन मूळें असतात, आणि **ऋणमूळ** अंकगणितरूपानें **अधिक** असतें. कां कीं या पक्षीं*, ज्यापेक्षां ब हून अंकगणितरूपानें $\sqrt{ब^२-४अक}$ अधिक आहेत, तर $-ब+\sqrt{ब^२-४अक}$ आणि $-ब-\sqrt{ब^२-४अक}$ यांस निरनिराळीं चिन्हें आहेत; ह्मणजे पहिलीचें चिन्ह + आहे, आणि दुसरीचें − आहे. या मुळें,

---

* उदाहरण, − ३ ± २ या पद्धतीचा दोन्ही किमती ऋण असाव्या ; − ३ ± ६ हिचो एक धन आणि एक ऋण अशा दोन किमती आहेत.

* लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं प + क यांत जें पद अंकगणितरूपानें अधिक आहे, त्या पदाचे चिन्हावरून पद्धतीचें चिन्ह निश्चित होतें; आणिखी लक्षांत ठेवावें, कीं प ± क यांत प + क अथवा प − क या दोहोंतून ज्यामध्यें +प आणि ±क या दोन पदांस एकसारिखें चिन्ह आहे तीच अंकगणितरूपानें अधिक आहे.

$\frac{-ब+\sqrt{ब^2-४अक}}{२अ}$ (हें+आहे) } ही पद्धति चिन्हानें अ आणि ब यांशीं मिळती आहे.

$\frac{-ब-\sqrt{ब^2-४अक}}{२अ}$ (हें−आहे) } ही अ आणि ब यांचे चिन्हांशीं मिळत नाहीं.

जर अ आणि **ब+आहेत**, तर दुसरी पद्धति **जी−आहे**, ती **मागल्या टिपेप्रमाणें** अंकगणित रूपानें अधिक आहे; जर अ आणि ब− आहेत, तर **पहिली पद्धति−आहे**, आणि अंकगणित रूपानें तीच अधिक आहे. या मुळें दोन्ही पक्षीं ऋणमूळ अंकगणित रूपानें अधिक आहे.

४. **जा पद्धतींस** वास्तविक मूळें सर्वदा असतात, त्या पद्धती(+−−), (−++) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत $ब^2$पेक्षां $ब^2-४ अक$ अधिक असतात. एथें, वरचे सारिख्याच तर्कानें, सिद्ध करितां येईल कीं, एक मूळ धन आणि एक मूळ ऋण अगत्य असावें; परंतु **धनमूळ** अंकगणितरूपानें **अधिक** आहे. लक्षांत आणावें कीं या पक्षीं अ आणि ब यांचीं चिन्हें निरनिराळीं आहेत.

या सर्व पक्षांतून हा पुढील सिद्धांत निघतो. $अक्ष^2+बक्ष+क$ **या पद्धतींस** जेव्हां निरनिराळीं मूळें असतात, **तेव्हां तिचें चिन्ह अचे चिन्हाहून कधीं भिन्न असत नाहीं, परंतु जेव्हां क्षची किंमत दोन मुळांमध्यें येती तेव्हां मात्र तिचें चिन्ह भिन्न असतें. २४१ आणि २४२ पृष्ठें पुनः वाचून पहा.** का कीं,

$$अक्ष^2+बक्ष+क=अ(क्ष-क्ष_{।})(क्ष-क्ष_{॥})$$ असें सर्वदां आहे,

$क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ या दोन मूळांतून एक तरी अधिक असावें; $क्ष_{।}$ अधिक आहे असें मनांत आण. तेव्हां, जर $क्ष_{।}$ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर $क्ष_{॥}$ पेक्षांहि क्ष अधिक आहे; आणि $क्ष-क्ष_{।}$ आणि $क्ष-क्ष_{॥}$ ह्या दोन्ही धन

आहेत. यामुळें अ (क्ष−$क्ष_{I}$)(क्ष−$क्ष_{II}$) हिचें चिन्ह अचे चिन्हासारिखें आहे. $क्ष_{I}$ पेक्षां क्ष कमी, परंतु $क्ष_{II}$ पेक्षां क्ष अधिक आहे, **ह्मणजे क्षची किंमत या दोन मूळांमध्यें आहे** अशी कल्पना कर, तेव्हां क्ष−$क्ष_{I}$ ऋण आहे, क्ष−$क्ष_{II}$ धन आहे; आणि अ(क्ष−$क्ष_{I}$)(क्ष−$क्ष_{II}$) हिचें चिन्ह अचे चिन्हाहून निराळें आहे. $क्ष_{II}$ पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, तर तो $क्ष_{I}$ या पेक्षांहि कमी आहे; आणि क्ष−$क्ष_{I}$ आणि क्ष−$क्ष_{II}$ या दोन्हीं ऋण आहेत; यामुळें, अ(क्ष−$क्ष_{I}$)(क्ष−$क्ष_{II}$) हीस अ सारिखेंच चिन्ह आहे, या तीन पक्षांचा पुनः विचार केला असतां इच्छिलेला सिद्धांत निघेल.

२. $अक्ष^{२}+बक्ष+क=०$ यांत $ब^{२}=४अक$ अथवा $ब^{२}-४अक=०$

या पक्षांत अ आणि क यांचें एकसारिखेंच चिन्ह असावें, कां कीं ४अक अगत्य धन असावें.

$$\text{एथें}\quad अक्ष^{२}+बक्ष+क=\frac{(२अक्ष+ब)^{२}}{४अ}$$

याचीं दोन बरोबरीचीं मूळें या पुढीलपासून निघतात,

$$२अक्ष+ब=०\qquad \text{अथवा}\ क्ष_{I}=क्ष_{II}=-\frac{ब}{२अ}$$

जेव्हां ब आणि अ यांचीं चिन्हें निरनिराळीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+−+) आणि (−+−) अशा आहेत, तेव्हां दोन्हीं मूळें धन आहेत; आणि जेव्हां ब आणि अ यांचीं चिन्हें एकसारिखीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+++) आणि (−−−) आहेत तेव्हां दोन्हीं मूळें ऋण आहेत. जापेक्षां अ आणि क यांचीं चिन्हें एकसारिखींच अगत्य असावीं ह्मणून सर्व दुसरे पक्ष या पक्षांत येत नाहींत.

$अक्ष^{२}+बक्ष+क$ ही पद्धति सर्वदां वर्ग ह्मणजे **धन परिमाण** असून तीस ४अ भाजक आहेत यामुळें तिचें चिन्ह नेहेमी अचे चिन्हासारिखें असतें; पहा कीं या पक्षांत क्षची किंमत **मूळांमध्यें** होऊं शकत नाहीं.

३. $अक्ष^2+बक्ष+क = ०$ $४अक-ब^2 = इ^2$ **२३९ पृष्ठाप्रमाणें.**

एथें अ आणि क यांचीं चिन्हें एकसारिखींच अगत्य असावीं, कां कीं ४अक धन आहेत, ह्मणजे ते $ब^2+इ^2$, या दोन धनपदांचे बेरिजेबरोबर आहेत. **२३९ पृष्ठाप्रमाणें.** $अक्ष^2+बक्ष+क=\frac{१}{४अ}\{(२अक्ष+ब)^2+इ^2\}$ ही धनपद्धति ४अनीं भागिलेली आहे ह्मणून तिचें चिन्ह सर्वदां अचे चिन्हासारिखें आहे.

केवळ चिन्हरूप मूळें या पुढील समीकरणापासून निघतात. **२४४ आणि २४५ पृष्ठ पहा.**

$(२अक्ष+ब)^2+इ^2= ०$ अथवा $(२अक्ष+ब)^2=इ^2\times-१$

अथवा* $२अक्ष+ब=\pm इ\sqrt{-१}=\pm\sqrt{४अक-ब^2}\sqrt{-१}$

$$क्ष_{\prime}=\frac{-ब+\sqrt{४अक-ब^2}\sqrt{-१}}{२अ} \qquad क्ष_{\prime\prime}=\frac{-ब-\sqrt{४अक-ब^2}\sqrt{-१}}{२अ}$$

चालत्या रिती लाविल्यानें, हीं मूळें वर सांगितलेल्या समीकरणास, आणि या पुढील समीकरणांस स्थापितात, असें दिसेल.

$$क्ष_{\prime}+क्ष_{\prime\prime}=-\frac{ब}{अ} \qquad क्ष_{\prime}\,क्ष_{\prime\prime}=\frac{क}{अ}$$

परंतु सद्यः **२४९ व्या पृष्ठा**वरचा सिद्धांतास विस्ताररूप देववत नाहीं, कां कीं $क्ष_{\prime}$ आणि $क्ष_{\prime\prime}$ यांस **अधिक** किंवा **कमी**पणाचा अर्थ लावितां येत नाहीं.

---

* पहा कीं $प^2=क^2$ अथवा $\pm प=\pm क$, यांपासून केवळ दोन निरनिराळीं रूपें होतात; कां कीं $+प=+क$ आणि $-प=-क$ हीं दोन्हीं एकच आहेत, आणि त्याचप्रमाणें $+प=-क$ आणि $-प=+क$ हींहि एकच आहेत.

दोन वर्णांचे समीकरणांचें अंकरूप उलगडणें बहुतकरून **कृतिक्रमानें** होतें, केवळ **सारणीनें** होत नाहीं, ह्मणजे, प्रत्येक पक्षास निरनिराळी कृति आहे, जसें पुढीलप्रमाणें;

मनांत आण कीं $२क्ष^{२} - ७क्ष + ३ = ०$

$(-)३ \qquad २क्ष^{२} - ७क्ष = -३$

$(\div)२ \qquad क्ष^{२} - \frac{७}{२}क्ष = -\frac{३}{२}$

वर्ग पुरा कर*, $क्ष^{२} - \frac{७}{२}क्ष + \left(\frac{७}{४}\right)^{२} = \left(\frac{७}{४}\right)^{२} - \frac{३}{२} = \frac{२५}{१६}$

वर्गमूळ काढ, $क्ष - \frac{७}{४} = \pm\frac{५}{४}$

$क्ष = \frac{७}{४} + \frac{५}{४}$ अथवा ३; अथवा $क्ष = \frac{७}{४} - \frac{५}{४}$ अथवा $\frac{१}{२}$.

परंतु शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत अवश्य पाठ करवा;

जर $अक्ष^{२} + बक्ष + क = ०$

तर $क्ष = \frac{-ब + \sqrt{ब^{२} - ४अक}}{२अ}$ अथवा $\frac{-ब - \sqrt{ब^{२} - ४अक}}{२अ}$

उदाहरणें. १. या पुढील समीकरणाचीं उत्तरें काय आहेत?

$$पक्ष^{२} + क^{२}क्ष = कक्ष^{२} - प^{२}क्ष + प^{३}$$

अथवा $(प-क)क्ष^{२} + (प^{२}+क^{२})क्ष - प^{३} = ०$

यांत $अ = प - क \qquad ब = प^{२} + क^{२} \qquad क = -प^{३}$

इच्छिलेलीं मूळें या पुढील पद्धतीचा दोन किमती आहेत,

---

* २३८ वें पृष्ठ पहा, जेथें $क्ष^{२} + बक्ष + \frac{ब^{२}}{४}$, हा $क्ष + \frac{ब}{२}$ याचा पूर्ण वर्ग आहे असें दिसतें.

$$\frac{-(प^२+क^२)\pm\sqrt{(प^२+क^२)^२-४(प-क)(-प^३)}}{२(प-क)}$$

$$(प^२+क^२)^२=प^४+२प^२क^२+क^४$$

$$-४(प-क)(-प^३)=४प^४-४प^३क$$

याजकरितां वरचे पद्धतीचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्यें आहेत.

$$\frac{-(प^२+क^२)\pm\sqrt{५प^४-४प^३क+२प^२क^२+क^४}}{२प-क}$$

२. $अक्ष^२-अबक्ष=ब^२क्ष-ब^३$ असें असो,

$$अक्ष^२-(अब+ब^२)क्ष+ब^३=०$$

याचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्यें आहेत.

$$\frac{अब+ब^२\pm\sqrt{(अब+ब^२)^२-४अब^३}}{२अ}$$

$$(अब+ब^२)^२-४अब^३=अ^२ब^२+२अब^३+ब^४-४अब^३$$
$$=अ^२ब^२-२अब^३+ब^४=(अब-ब^२)^२$$

याकरितां याचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्यें आहेत.

$$\frac{अब+ब^२\pm(अब-ब^२)}{२अ}$$

परंतु $\frac{अब+ब^२+अब-ब^२}{२अ}=\frac{२अब}{२अ}=ब$ हें एक मूळ आहे,

$\frac{अब+ब^२-अब+ब^२}{२अ}=\frac{२ब^२}{२अ}=\frac{ब^२}{अ}$ हें दुसरें मूळ आहे.

ताळा, $ब+\frac{ब^२}{अ}=\frac{अब+ब^२}{अ}=-\frac{-(अब+ब^२)}{अ}$

$ब\times\frac{ब^२}{अ}=\frac{ब^३}{अ}$ } २४६ पृष्ठ पहा.

आतां शिकणारानें या पुढीलप्रमाणें करावें;

१. अंकगणितरूप समीकरण रचायाची रीति; दोन मूळें आणि पहिल्या पदाचा गुणक हीं घे, नंतर २४६ पृष्ठाप्रमाणें यावरून जा पद्धतीचीं हीं दोन मूळें असावीं ती पद्धति रच; नंतर वरचे सारणीवरून या रचिलेल्या पद्धतीचीं मूळें काढ, हीं मूळें, घेतलेले मुळांबरोबर अगत्य असावीं. नंतर दुसऱ्या कांहीं पद्धती घे; आणि त्यांचीं मूळें काढून, त्यांचा योगानें ताळा पहा.

२. वर नुसतें एकादें समीकरण घ्यावयास सांगीतलें, परंतु अक्षररूप समीकरण उलगडण्याविषयीं अधिक आस्था लागेल, ह्मणून अशा जातीचा पद्धती रचायासाठीं, भलती एकादी पद्धति घे, जी शून्याशीं बरोबर होईल आणि तीमध्यें अक्षरांविषयीं एक पदाचा वर्ण दुसऱ्ये पदाचे वर्णापेक्षां अधिक नसेल; जसें या पुढील पद्धतींत

$$अब^2 - अबक + अबक - अब^2 = ०$$

क्ष = ब असें केल्यानें ती पद्धति नाहींशी होईल, ह्मणजे मनांत आण कीं बचे जागीं क्ष मांडिल्यानें एक पद्धति उत्पन्न होईल, जीविषयीं ही वरची गोष्ट पहिल्यानें लक्षांत येणार नाहीं. ह्मणजे

$$अक्ष^2 - अबक + अकक्ष - अबक्ष = ०$$

हिचें एक मूळ ब असावें. वरचे सारणीवरून मूळें काढ.

अथवा ही पुढील रीति घे; कांहीं दोन सरळ पद्धती घे, त्यांतील एकीस मात्र छेद असावा; जसें $\frac{म}{न}$ आणि प. तेव्हां

$$नक्ष^2 - (म + नप)क्ष + मप = ०$$

याचीं मूळें $\frac{म}{न}$ आणि प अशीं असावीं. ह्मणजे, यांचे जागीं ब आणि $\frac{1-अब}{ब}$ हीं घे. तेव्हां

$$\text{म} = १ - \text{अब},\ \text{न} = \text{अ},\ \text{प} = \text{ब},$$
$$\text{म} + \text{नप} = १ - \text{अब} + \text{अब} = १;\ \text{मप} = \text{ब} - \text{अब}^2$$

याजकरितां या पुढील पद्धतीचीं मूळें

$$\text{अक्ष}^2 - \text{क्ष} + \text{ब} - \text{अब}^2 = ०$$

याप्रमाणें असावीं, $\text{क्ष}_{।} = \text{ब}$ आणि $\text{क्ष}_{॥} = \frac{१-\text{अब}}{\text{अ}}$

उलटा विषय. $\text{अक्ष}^2 + \text{बक्ष} + \text{क} = ०$ या पद्धतींत, $\text{अ} = ०$ आहे असें मनांत आण. तेव्हां तिचें रूप याप्रमाणें होतें, $\text{बक्ष} + \text{क} = ०$, यापासून $\text{क्ष} = -\frac{\text{क}}{\text{ब}}$; $\text{अ} = ०$ अशा कल्पनेनें $\text{अक्ष}^2 + \text{बक्ष} + \text{क} = ०$ याचीं मूळें तपासलीं असतां, त्यांचीं रूपें याप्रमाणें होतात,

$\frac{-\text{ब} + \sqrt{\text{ब}^2 - ४\text{अक}}}{२\text{अ}}$ या पहिल्ये मूळाचें रूप $\frac{०}{०}$ असें होतें ८७ पृष्ठ पहा.

$\frac{-\text{ब} - \sqrt{\text{ब}^2 - ४\text{अक}}}{२\text{अ}}$ या दुसऱ्ये मूळाचें रूप $\frac{-२\text{ब}}{०}$ असें होतें ८० पृष्ठ पहा.

ह्मणून त्या दोन्ही पृष्ठांचे गोष्टींवरून, एक मूळ **अनंत** आणि दुसरें इच्छेप्रमाणें कांहीं परिमाण आहे असें ह्मणावें कीं काय? या पक्षीं असें ह्मणवत नाहीं; यामुळें या पक्षाचा कांहीं अधिक विचार करावा. आतां $\text{अ} = ०$ अशा कल्पनेचे जागीं, **८१ व्ये पृष्ठाप्रमाणें**, अ अगत्य पडेल तसा लहान आहे अशी कल्पना कर. आतां पुढें जो लेम्मा सांगतों तो बीजगणितांत सर्वत्र उपयोगी पडेल.

लेम्मा. $\sqrt{\text{ब}^2 + \text{वि}}$ या पद्धतींत, वि, हवी तेवढी लहान कल्पून ही पद्धति ब हून इच्छेस येईल तितक्या लहान परिमाणानें भिन्न करितां येईल; आणखी, याच कल्पनेवरून ती पद्धति $\text{ब} + \frac{\text{वि}}{२\text{ब}}$ याहून हवे तेवढ्ये लहान अंतरानें भिन्न करितां येईल इतकेंच नाहीं, परंतु इच्छेप्रमाणें विचे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्णांकाचे अंतरानें भिन्न करितां येईल.

वरची गोष्ट समजायासाठीं हें पुढें सांगतों; $\sqrt{१+\text{वि}}$ यांत वि,

कशीहि लहान घेतली, तरी ही पद्धति १ हून विचे अर्धाचे सुमारानें अधिक होईल; परंतु $\sqrt{१+वि}$ ही $१+\frac{१}{२}$ वि याहून पाहिजे तर विचा एक कोट्यांशापेक्षां कमी अंतरानें भिन्न अशी करितां येईल.

या लेम्माचा पहिला भाग स्पष्ट आहे; त्याचा दुसरा भाग या पुढीलप्रमाणें सिद्ध होतो;

$$\left(ब+\frac{वि}{२ब}+\sqrt{ब^२+वि}\right)\left(ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^२+वि}\right)$$

$$=\left(ब+\frac{वि}{२ब}\right)^२-(ब^२+वि)$$

$$=ब^२+२ब\times\frac{वि}{२ब}+\frac{वि^२}{४ब^२}-ब^२-वि$$

$$=ब^२+वि+\frac{वि^२}{४ब^२}-ब^२-वि=\frac{वि^२}{४ब^२}$$

यामुळें,
$$ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^२+वि}=\frac{\frac{वि^२}{४ब^२}}{ब+\frac{वि}{२ब}+\sqrt{ब^२+वि}}$$

परंतु या शेवटील अपूर्ण बीजास जो छेद आहे, त्यांत वि कमी केली असतां, $ब+\sqrt{ब^२}$ अथवा २ ब यांचे जवळ जवळ तो छेद होईल. तो छेद दाखवायासाठीं २ ब + व घे, त्यांत अगत्याप्रमाणें वि लहान केल्यानें, व इच्छेप्रमाणें लहान होत जाईल. तेव्हां

$$ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^२+वि}=\frac{वि^२}{४ब^२(२ब+व)}=\frac{वि}{४ब^२(२ब+व)}\times वि$$

ह्मणजे, $ब+\frac{वि}{२ब}$ आणि $\sqrt{ब^२+वि}$ यांचें अंतर केवळ विचे कांहीं अपूर्ण बीजपदा इतकें आहे, ह्मणजे विचे $\frac{वि}{४ब^२(२ब+व)}$ इतकें त्यांचें अंतर

आहे. परंतु वि हवी तेवढी लहान करितां येती, आणि वर सांगितलें या कारणास्तव व हि लहान होत जाईल, ह्मणजे ४ ब^{२}(२ ब+व) ही पद्धति इच्छेप्रमाणें ४ब^{२}× २ ब अथवा ८ ब^{३} याचे जवळ करितां येईल, यावरून ब+$\frac{\text{वि}}{\text{२ब}}$ आणि $\sqrt{\text{ब}^{२}+\text{वि}}$ यांचें अंतर जें विचें अपूर्ण बीजपद आहे, तें अपूर्णबीज या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल;

$$\frac{\text{वि (इच्छेप्रमाणें कांहीं लहान परिमाण)}}{\text{८ ब}^{३}\text{ (कांहीं दिलेलें परिमाण + इच्छेप्रमाणें कांहीं लहान परिमाण)}}$$

आणि या कारणास्तव हें अपूर्ण बीजपरिमाण इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें लहान करितां येईल.

या पुढीलाची सिद्धता वरचेच प्रमाणें होईल; ह्मणजे, ब $-\frac{\text{वि}}{\text{२ब}}$ आणि $\sqrt{\text{ब}^{२}-\text{वि}}$ या दोन्हीं पद्धतीं इच्छेप्रमाणें विचे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न करितां येतील.

आतां इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा अ लहान करितां येईल, या कल्पनेवरून या पुढील मूळांचे विचारास वरचा सिद्धांत लावितों.

$$\frac{-\text{ब}+\sqrt{\text{ब}^{२}-\text{४अक}}}{\text{२अ}} \text{ आणि } \frac{-\text{ब}-\sqrt{\text{ब}^{२}-\text{४अक}}}{\text{२अ}}$$

यांत क दिलेलें परिमाण आहे, यामुळें इच्छेप्रमाणें ४ अक हवे तितके लहान होतील; आणि **वरचे लेम्माप्रमाणें** जर वि = ४ अक, तर

$\sqrt{\text{ब}^{२}-\text{४ अक}}$ ही पद्धति ब $-\frac{\text{४अक}}{\text{२ब}}$ या पद्धतीहून ४ अक यांचे हवे तेवढे लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न करितां येईल.

तर, $\sqrt{\text{ब}^{२}-\text{४अक}} = \text{ब}-\frac{\text{४अक}}{\text{२ब}}-\text{प}\times\text{४अक}$ असें घे, यांत इच्छेप्रमाणें प आणि अ हवे तेवढे लहान करितां येतील.

तेव्हां मूळें याप्रमाणें आहेत,

$$\frac{-ब+ब-\frac{४अक}{२ब}-४पअक}{२अ} \text{ आणि } \frac{-ब-ब+\frac{४अक}{२ब}+४पअक}{२अ}$$

$$\text{अथवा} \quad -\frac{क}{ब}-२\,पक \quad \text{आणि} \quad \frac{-२ब+\frac{२अक}{ब}+४\,पअक}{२अ}$$

आतां अला उत्तरोत्तर कमी कर, तर अशे पक्षीं तशेच रितीनें प अधिक अधिक कमी होईल. पहिलें मूळ $-\frac{क}{ब}$, आणि दुसरें मूळ$-\frac{२ब}{०}$ अशे रूपाचे जवळ जवळ येतात. परंतु जा पक्षांत अ=०, ह्मणजे जांत बक्ष+क=०, अशी कल्पना केली, ह्मणजे जा पक्षांत अक्ष^{२}+बक्ष+क=० असें समीकरण होतें, त्याचें एक मूळ वरचे पहिल्ये मूळाबरोबर आहे, त्यापासून, क्ष=$-\frac{क}{ब}$ असें निघतें. दुसरे मूळाविषयीं अर्थअद्यापि सांगितला नाहीं.

दृष्टांतार्थ कृत्य. अ,ब,क, आणि इ, असे चार अंक आहेत, यांतून शेवटील तीन कांहीं अंकानें वाढविले आहेत, आणि त्यांतील पहिला त्या अंकाचे म वेळांनीं वाढविला आहे. असें केल्यावर ते अंक प्रमाणांत होतात. यावरून ते अंक काय आहेत?

अंक दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर मक्ष+अ,क्ष+ब,क्ष+क, आणि क्ष+इ हे प्रमाणांत आहेत.

$$\text{अथवा } \frac{मक्ष+अ}{क्ष+ब}=\frac{क्ष+क}{क्ष+इ} \text{ अथवा } (मक्ष+अ)(क्ष+इ)=(क्ष+ब)(क्ष+क)$$

हे गुणाकार कर, आणि त्यांस प=० अशे रूपाचे समीकरणाचें रूप दिल्यानें, या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$(म-१)क्ष^{२}+(मइ+अ-ब-क)क्ष+अइ-बक=०$$

क्षचा किंमती या पुढील पद्धतींत आहेत.

$$\frac{-(मइ+अ-ब-क)\pm\sqrt{(मइ+अ-ब-क)^{२}-४(म-१)(अइ-बक)}}{२(म-१)}$$

आणि यामुळें, बहुत करून, कृत्यांचीं दोन उत्तरें आहेत. परंतु जर म=१, ह्मणजे जर क्ष असा घ्यावा लागतो कीं क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+इ, प्रमाणांत आहेत, तर जा पक्षाचा विचार करण्याची इच्छा आहे तसा पक्ष उत्पन्न होतो; कांकीं म−१=०; त्यामुळें समीकरणाचें रूप या प्रमाणें होतें,

$$(इ+अ-ब-क)\ क्ष+अइ-बक=०;$$

यांतून केवळ एक मूळ निघतें; आणि वरचे दोन मूळांतून एकाचें याप्रमाणें रूप होतें,

$$\frac{-२(इ+अ-ब-क)}{०}.$$

या रूपाचे पद्धतीचा अर्थ **८६ आणि ८७ पृष्ठांवरून** हाच आहे, कीं कोणताहि मोठा अंक, कृत्याचे संकेतांस जवळ जवळ स्थापील, त्यापेक्षां अधिक मोठा अंक त्यांस अधिक जवळ स्थापील, आणि याप्रमाणें पुढें. आतां हेंच विचारायाचें राहिलें. कीं जसा जसा क्ष वाढवावा तसतसे, क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+इ, हे प्रमाणांत अधिक अधिक जवळ होत जातील कीं काय; ह्मणजे,

$\frac{क्ष+अ}{क्ष+ब}=\frac{क्ष+क}{क्ष+इ}$ हें समीकरण खरेपणाचे जवळ होईल कीं काय ?

या दोन अपूर्ण बीजांचे अंश आणि छेद क्षनें भाग; तेणेंकरून त्यांचें रूप याप्रमाणें होईल $\frac{१+\frac{अ}{क्ष}}{१+\frac{ब}{क्ष}}=\frac{१+\frac{क}{क्ष}}{१+\frac{इ}{क्ष}}$, यांत क्ष हवा तितका मोठा केला असतां, हें समीकरण इच्छेप्रमाणें खरेपणाचे जवळ होईल ; कां कीं, असें केल्यानें, $\frac{अ}{क्ष},\frac{ब}{क्ष},\frac{क}{क्ष}$, आणि $\frac{इ}{क्ष}$ हवे तेवढे लहान होतील, आणि वरचें समीकरण $\frac{१}{१}=\frac{१}{१}$ इच्छेप्रमाणें यांचे जवळ जवळ करितां येईल.

यावरून दिसतें, कीं कृत्यास जेव्हां बहुतकरून, दोन उत्तरें असतात आणि जेव्हां एकादे विशेष पक्षीं त्याचें एकच उत्तर निघतें, तेव्हां **८६ आणि ८७ पृष्ठांवरचे** गोष्टीचे अर्थाप्रमाणें, असें ह्मटलें पाहिजे, कीं अव्यक्त पदाचें दुसरें उत्तर **अनंत** आहे.

परंतु $-\frac{२ब}{०}$ याचा अर्थ जो ८६ आणि ८७ पृष्ठांवर सांगितला, तो जरी वरचे गोष्टीवरून स्थापिला जातो, तथापि हेंहि पाहण्यांत येतें, कीं $\frac{०}{०}$ हें दुसऱ्या मूळाचें रूप आहे, त्यास, क्षची कोणतीहि किंमत समीकरणास स्थापील असा ८७ पृष्ठावर जो अर्थ आहे, तो लागू पडत नाहीं, परंतु तें रूप हें दाखवितें कीं खरें मूळ $-\frac{क}{ब}$ आहे. या गोष्टीविषयीं पुढील अध्यायामध्यें पुनः विचार होईल.

वरचे पक्षांत अ=०, अशा कल्पनेनें नव्या गोष्टी दिसून येतात; आतां क=० अशी कल्पना कर. त्यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें, $अक्ष^२ + बक्ष = ०$, अथवा क्ष (अक्ष+ब) =०; हें समीकरण क्ष=० अथवा अक्ष+ब=० असें असलें तरी स्थापिलें जातें. ह्मणजे, त्याचीं मूळें ० आणि $-\frac{ब}{अ}$ हीं आहेत. मूळांविषयींचा सामान्य सारणीपासून ही गोष्ट पहाण्यांत येईल.

याच सारिखें, जर ब=० आहे, तर समीकरण याप्रमाणें होतें, $अक्ष^२ + क = ०$.

$$क्ष^२ = -\frac{क}{अ}, \qquad क्ष = +\sqrt{-\frac{क}{अ}} \text{ अथवा } -\sqrt{-\frac{क}{अ}}$$

क आणि अ यांचीं चिन्हें निरनिराळीं असतील, तर एक मूळ धन आहे, आणि दुसरें ऋण आहे, आणि क आणि अ यांचीं चिन्हें सारिखींच असतील, तेव्हां दोन्हीं मूळें केवळ चिन्हरूप आहेत. ही गोष्ट त्याच सामान्य सारणीपासून निघती.

वरचा सिद्धांत पुष्कळ कामांत येतो, त्यांतून एक उदाहरण सांगतों. दोन परिमाणांची बेरीज (स) आणि त्यांचा गुणाकार (प) हीं दोन्हीं ठाऊक आहेत अशी कल्पना कर, तर अशी एक पद्धति काढ, कीं तींत ती बेरीज आणि गुणाकार यांशिवाय दुसरें कांहीं पद येणार नाहीं, आणि त्या पद्धतीचा योगानें त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची, अथवा घनांची, अथवा चतुर्घातांची इत्यादि, बेरीज कळेल.

हीं दोन इच्छिलेलीं परिमाणें २४६ पृष्ठाप्रमाणें या पुढील पद्धतीचीं मूळें आहेत, $क्ष^२ - सक्ष + प = ०, (\times) क्ष^न$ तर $क्ष^{न+२} - सक्ष^{न+१} + पक्ष^न = ०$ तीं दोन मूळें दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे; तर याप्रमाणें होईल,

$$क्ष_{।}^{न+२}-सक्ष_{।}^{न+१}+पक्ष_{।}^{न}=०$$

$$क्ष_{॥}^{न+२}-सक्ष_{॥}^{न+१}+पक्ष_{॥}^{न}=०$$

$$(+)\quad क्ष_{।}^{न+२}+क्ष_{॥}^{न+२}-स(क्ष_{।}^{न+१}+क्ष_{॥}^{न+१})+प(क्ष_{।}^{न}+क्ष_{॥}^{न})=०$$

$क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ यांचे न घातांची बेरीज दाखविण्यास $अ_{न}$ घे; यावरून वरचे समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होईल,

$$अ_{न+२}-स\,अ_{न+१}+प\,अ_{न}=०$$

अथवा $$अ_{न+२}=स\,अ_{न+१}-प\,अ_{न}$$

आतां जर न=० तर $अ_{०}=क्ष_{।}^{०}+क्ष_{॥}^{०}=१+१=२$, १७२ पृष्ठ पहा.

$$अ_{१}=क्ष_{।}+क्ष_{॥}=स$$

यामुळें वरचे समीकरणावरून

$अ_{२}=स\,अ_{१}-प\,अ_{०}=स^{२}-२प$

$अ_{३}=स\,अ_{२}-प\,अ_{१}=स(स^{२}-२प)-पस=स^{३}-३पस$

$अ_{४}=स\,अ_{३}-प\,अ_{२}=स(स^{३}-३पस)-प(स^{२}-२प)=स^{४}-४पस^{२}+२प^{२}$

याप्रमाणें पुढेंहि.

वर जी गोष्ट सिद्ध केली तिचे सहाय्यानें पुष्कळ समीकरणें उलगडतात; याचें कारण हेंच, कीं, अव्यक्त पदाविषयीं तीं समीकरणें जरी बरोबर दोन वर्णांचीं नाहींत, तथापि त्यांतील जा पद्धतींत अव्यक्तपद असतें, तिजविषयीं तीं समीकरणें दोन वर्णांचीं असतात. उदाहरण,

$$क्ष^{२}-३क्ष+१=२-\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}$$

या समीकरणास स्थापील अशी क्षची किंमत काढायास इच्छितों, या समीकरणाचें मूळ चिन्ह घालवायासाठीं, पुढीलप्रमाणें केलें पाहिजे

$$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१} = १+३क्ष-क्ष^{२};$$ दोन्हीं बाजूंचा वर्ग कर,

$$क्ष^{२}-३क्ष+१ = १+६क्ष+७क्ष^{२}-६क्ष^{३}+क्ष^{४}$$

अथवा $$क्ष^{४}-६क्ष^{३}+६क्ष^{२}+९क्ष = ०$$

हें क्षविषयीं चार वर्णांचें समीकरण आहे, जाचा उलगडण्याची रीति मागें कोठेंहि आली नाहीं. परंतु मूळचें समीकरण पाहिलें असतां, तें $वि^{२}=२-वि$ या रूपाचें आहे असें दिसतें; कां कीं जर $\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१} = वि$ आहे, तर $क्ष^{२}-३क्ष+१=वि^{२}$. आतां $वि=\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}$ असें घे, तर

$वि^{२}+वि-२ = ०,$ $वि = १$ अथवा -२

पहिल्यानें $वि = १$ असें घे, तर

$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१} = १$ अथवा $क्ष^{२}-३क्ष+१ = १, \therefore क्ष = ०$ अथवा ३

दुसऱ्यानें $वि = -२$ असें घे, तर

$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१} = -२$ अथवा $क्ष^{२}-३क्ष+१ = ४ \therefore क्ष = \frac{३\pm\sqrt{२१}}{२}$

ह्मणून क्षचा या पुढील किमतीनें मूळचें समीकरण स्थापितां येतें;

$$०, \quad ३, \quad \frac{३+\sqrt{२१}}{२}, \text{ आणि } \frac{३-\sqrt{२१}}{२}$$

पुनः, $२क्ष^{६}-३=क्ष^{३}$ असें समीकरण घे. एथें $क्ष^{६}=(क्ष^{३})^{२}$; $वि=क्ष^{३}$ घे, यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें, ह्मणजे, $२वि^{२}-३=वि$; याचीं मूळें -१ आणि $\frac{३}{२}$ हीं आहेत. यावरून, $क्ष^{३}=-१$ अथवा $क्ष^{३}=\frac{३}{२}$; ह्मणजे $\sqrt[३]{-१}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{३}{२}}$ यांचा कोणत्याहि खऱ्या किंवा केवळ चिन्हरूप किमती असतील, त्या $२क्ष^{६}-३ = क्ष^{३}$ या समीकरणाचीं मूळें आहेत.

समीकरणांत करणी चिन्हें असतात; त्यांस घालवावयाचा कृतींचीं कांहीं उदाहरणें सांगून हा अध्याय संपवितों.

$$\sqrt{क्ष}+\sqrt{क्ष+१}+\sqrt{क्ष+२}=२$$

$$\therefore \quad \sqrt{क्ष}+\sqrt{क्ष+१}=२-\sqrt{क्ष+२}$$

दोन्हीं बाजूंचा वर्ग कर.

$$क्ष+२\sqrt{क्ष}\cdot\sqrt{क्ष+१}+क्ष+१=४-४\sqrt{क्ष+२}+क्ष+२$$

अथवा $$२\sqrt{क्ष(क्ष+१)}+४\sqrt{क्ष+२}=५-क्ष$$

पुनः दोहोंबाजूंचा वर्ग कर.

$$४क्ष(क्ष+१)+१६\sqrt{क्ष(क्ष+१)}\sqrt{क्ष+२}+१६(क्ष+२)=२५-१०क्ष+क्ष^{२}$$

अथवा $$१६\sqrt{क्ष(क्ष+१)(क्ष+२)}=-(७+३०क्ष+३क्ष^{२})$$

पुनः दोहोंबाजूंचा वर्ग कर.

$$२५६\ क्ष(क्ष+२)(क्ष+२)=(७+३०क्ष+३क्ष^{२})^{२}$$

यांत कांहीं करणी चिन्ह नाहीं, ह्मणून सहज उलगडतां येईल.

पुढें कांहीं सोपीं उदाहरणें देतों, तीं शिकणारानें उलगडावीं.

समीकरण, $\sqrt{क्ष+५}+\sqrt{क्ष-३}=४$

यापासून $क्ष-४=०$ असें होतें.

समीकरण, $\sqrt{क्ष+अ}+\sqrt{क्ष+ब}=क$

यापासून $४क^{२}क्ष+४\ अब-(क^{२}-अ-ब)^{२}=०$ असें होतें.

परंतु एथें मनांत आणिलें पाहिजे, कीं

$(क्ष+अ)^{\frac{१}{२}}+(क्ष+ब)^{\frac{१}{२}}=क$ २२४ आणि २२५ पृष्ठें पहा.

याचें उत्तर वरचे उत्तरासारिखेंच येतें, आणि त्याचीं या पुढीलप्रमाणें चार रूपें आहेत.

$\sqrt{क्ष+अ}+\sqrt{क्ष+ब}=क$	$-\sqrt{क्ष+अ}+\sqrt{क्ष+अ}=क$
$\sqrt{क्ष+अ}-\sqrt{क्ष+ब}=क$	$-\sqrt{क्ष+अ}-\sqrt{क्ष+अ}=क$

जी क्षची किंमत वर निघाली, ह्मणजे

$$क्ष = \frac{(क^{२}-अ-ब)^{२}-४अब}{४क^{२}}$$

ही किंमत वरचे चार रूपांतून केवळ एकास मात्र स्थापिती. यामुळें, जेव्हां वरचे समीकरणांतून एक उत्तर निघतें. तेव्हां कृत्य पुरतेपणीं समजांत आलें अशी खात्री होत नाहीं, यास्तव त्यांतून दुसरें एक समीकरण निघेल असें विस्ताररूप त्या कृत्यास दिलें पाहिजे.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें देतों;

१. $अ+\frac{१}{अ}$ ही पद्धति **गणितरूपानें** २पेक्षां कमी होऊं कशत नाहीं. हें दाखीव. यास याप्रमाणें सिद्ध कर, ह्मणजे $अ+\frac{१}{अ}=२-प$ यांत जेव्हां ४ आणि ० यांचेमध्यें प असेल, तेव्हां या समीकरणाचीं मूळें केवळ चिन्हरूपाचीं आहेत हें दाखीव. $(अ-१)^{२}$ ही पद्धति सर्वदां धन असती त्यापासून ही वरची गोष्ट सिद्ध होईल;

२. $अ^{२}+ब^{२}$ ही २ अबपेक्षां खचित् अधिक असावी हें दाखीव.

३. जर $अ+\frac{१}{अ}=स$ आहे, तर पुढील समीकरणें सिद्ध कर,

$$अ^{२}+\frac{१}{अ^{२}}=स^{२}-२,\quad अ^{३}+\frac{१}{अ^{३}}=स^{३}-३स,\quad अ^{४}+\frac{१}{अ^{४}}=स^{४}-४स^{२}+२.$$

४. $अक्ष^{२}+बक्ष+क$ या पद्धतीचीं मूळें $क्ष_{१}$ आणि $क्ष_{२}$ असतील, तर याप्रमाणें होईल ह्मणजे,

$$क्ष_{१}-क्ष_{२}=\pm\frac{१}{अ}\sqrt{ब^{२}-४अक},\quad \frac{क्ष_{१}}{क्ष_{२}}=\frac{ब^{२}-२अक}{२अक}\pm\frac{ब}{२अक}\sqrt{ब^{२}-४अक}$$

$$\frac{क्ष_{१}}{क्ष_{२}}+\frac{क्ष_{२}}{क्ष_{१}}=\frac{ब^{२}-२अक}{अक},\quad \frac{१}{क्ष_{२}}+\frac{१}{क्ष_{१}}=-\frac{ब}{क}$$

५. $अक्ष^{२}+बक्ष+क$ या पद्धतींत, एक मूळ दुसऱ्या मूळापेक्षां मनें अधिक आहे हें पूर्वीं ठाऊक आहे अशी कल्पना कर, तर सारणीचे सहाय्यावांचून या पद्धतीचीं मूळें काढ. त्या पद्धतीचें एक मूळ दुसऱ्या मूळाचा न वेळा आहे अशा कल्पनेवरून तिचीं मूळें काढ.

सहावा अध्याय.

नियत आणि अनियत परिमाणांविषयीं.

कांहीं विशेष कल्पनांपासून जीं फळें उत्पन्न होतात, तीं यापूर्वीं पहाण्यांत आलीं; जीं परिमाणें कांहीं पक्षीं समजाया जोगीं होतीं, तीं वर सांगीतलेल्या विशेष कल्पनेचा योगानें $\frac{क}{०}$, $\frac{०}{०}$, $अ^{०}$, इत्यादि, अशा रूपाचीं झालीं. या रूपांशिवाय आतां नुसत्या ० या रूपाचा विचार करितों; ह्मणजे जा तऱ्हेनें त्यास कामांत आणावें लागेल त्याविषयीं कांहीं विचार करावा लागेल; पूर्वीं असें समजलें कीं सर्व समीकरणांस प=० असें रूप दिल्यानें सोईवार पडतें, तर त्यावरून, कदाचित् दृष्टी चुकून, या पुढील सारिखे सारांश मनांत येतील; जर अब = ० आणि अक = ०, तर अब = अक अथवा ब = क होईल. **या गोष्टीविषयीं हें पुढील आश्चर्यकारक उदाहरण सांगतों; जर क्ष – २ = ०, तर त्यावरून $क्ष^{२} - ४ = ०$, आणि $क्ष^{२} - २\,क्ष = ०$ असें होतें. तर आतां या दोन पद्धती समीकरणरूपानें मांडितां येतील कीं काय, आणि पूर्वीं सांगीतल्या कोणत्याहि रितीनें तीं समीकरणें उलगडावीं कीं काय? असें केलें तर, $क्ष^{२} - ४ = (क्ष-२)\,(क्ष+२)$ आणि $क्ष^{२} - २\,क्ष = क्ष\,(क्ष-२)$, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,**

(क्ष–२) (क्ष+२) = (क्ष–२) क्ष (÷) (क्ष–२) क्ष+२=क्ष

परंतु क्ष–२ = ० ∴ क्ष = २ अथवा ४ = २

हें उत्तर अयुक्तिक आहे, यावरून असें दिसतें कीं कृतीमध्यें कांहीं अयुक्तिक गोष्ट झाली. क्ष–२ जाची किंमत शून्य आहे, त्याणें समीकरणाचा दोन्ही बाजू भागिल्या यापासून खोटेपणाचा भास होतो, क्ष – २ = ० अशी कल्पना घेऊन कृतीमध्यें ० येतें, तर तें तसेंच ठेऊन वरची कृति केली, आणि नंतर ० याचे जागीं क्ष – २

कामांत आणिले, तर या पुढीलप्रमाणें खोटेपणा सहज लक्षांत येईल;

अ × ० = ०, ब × ० = ०, ∴ अ × ० = ब × ०, (÷)०

तर, अ = ब ह्मणजे, एथें परिमाणासारिखें ० कामांत आणलें आहे, आणि ० = ० अशी प्रतिज्ञा केली आहे आणि ० न्याने भागाकार-हि केला आहे. आतां ८० पृष्ठावर जें मूळ कारण सांगितलें त्याजकडे लक्ष्य देऊन क्ष − २ = ० अशा कल्पनेचे जागीं क्ष − २ = अति लहान परिमाण कल्पितों, आणि दोन जवळ जवळचा उभ्या ओळींत दोन सारिख्या रूपांचा कृति चुक्यांसुद्धां करून दाखवितों.

क्ष − २ = ० असें घे	क्ष−२ हवे तेवढे लहान किमतीचे घे
∴ क्ष^{२} − ४ = ०	∴ क्ष^{२}−४ हवे तेवढे लहान किमतीचे होतील
आणि क्ष^{२} − २क्ष = ०	आणि क्ष^{२}−२क्ष हवे तेवढे लहान होतील
∴ क्ष^{२}−२क्ष = क्ष^{२} − ४	∴ क्ष^{२}−२क्ष आणि क्ष^{२} − ४ हवे तेवढे बरोबरीचे अवळ अवळ होऊं शकतात
अथवा क्ष(क्ष−२) = (क्ष−२)(क्ष+२)	आणि क्ष (क्ष−२) आणि (क्ष−२) (क्ष+२) हेहि वरप्रमाणें होतील
(÷) (क्ष − २) क्ष = क्ष + २	(÷) (क्ष−२) तेव्हां क्ष आणि क्ष + २ हे हवे तेवढे अवळ अवळ बरोबर होऊं शकतात.
परंतु क्ष − २ = ० अथवा क्ष = २	परंतु इच्छेप्रमाणें क्ष हा २ चे अवळ अवळ होईल;
∴ २ = ४	याजकरितां २ आणि ४ हे इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे अवळ अवळ बरोबर होऊं शकतात.

८४ आणि ८५ पृष्ठांवरून बरोबर हा शब्द कोणत्या-हि अर्थानें घेतला, तरी वरचा दुसऱ्ये उभ्ये ओळींत चूक आहे. ज्या परिमाणांचें अंतर लहान आहे तीं जवळ जवळ बरोबर असें ह्मटलें, तथापि $क्ष^2-२क्ष$ आणि $क्ष^2-४$ हे जवळ जवळ बरोबर आहेत, याकरितां त्यांस क्ष – २ यांणीं भागिल्यानंतर, त्यांचे भागाकार त्याप्रमाणें जवळ जवळ होतील हें समजत नाहीं. कां कीं जर क्ष – २ = $\frac{१}{१०००}$ असें असेल, तर क्ष – २ यांणीं भागावें आणि १००० यांणीं गुणावें, हीं दोन्हीं बरोबरच आहेत, अथवा क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचें अंतर, $क्ष^2-४क्ष$ आणि $क्ष^2-४$ यांचे अंतराचे १००० पट आहे. आणि क्ष – २ जितके लहान होतील त्याप्रमाणें क्ष – २ यांणीं भागतांना जो गुणाकार उत्पन्न होतो, तो गुणाकार फार मोठा होईल. $क्ष^2-२क्ष$ आणि $क्ष^2-४$ यांचे अंतरापेक्षां क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचें अंतर त्यांचेच कांहीं मोठ्ये प्रमाणानें अधिक नाहीं, आणि ८५ पृष्ठावरचा गोष्टींतील अर्थाप्रमाणें जेव्हां अ,ब,क, आणि ड हीं चार परिमाणें आहेत, त्यांतून अला जसा क प्रमाण, त्याच प्रमाणानें, जेव्हां पहिल्या दोहोंचें अंतर दुसऱ्या दोहोंचा अंतरास होईल, तर क ज्या प्रमाणानें डचे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, त्या प्रमाणानें अ हा बचे बरोबरीचे जवळ जवळ होईल असें ह्मटलें पाहिजे; तर यास उत्तर हेंच, कीं $क्ष^2-२क्ष$ आणि $क्ष^2-४$ हे लहान आहेत, आणि याभुळें यांचीं अंतरेंहि लहान आहेत ह्मणून, ते जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मणवत नाहीं; कां कीं ते दोनहि लहान असतील, तथापि एक दुसऱ्यापेक्षां पुष्कळ मोठा असेल. जर सर्व पृथ्वी दाखवायासाठीं १ घेतला, तर हत्ती आणि मत्छर हीं दोन्हीं त्या प्रमाणानें अतिशय लहान अपूर्णांक आहेत, परंतु ते कोणत्याहि अर्थानें जवळ जवळ बरोबर नाहींत.

वरचे गोष्टीवरून हें समजनें, कीं अ आणि ब हे परस्परांचे केवळ अति लहान अंशानें भिन्न आहेत, तेव्हां ते जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मटल्यानें, दोन लहान परिमाणें लहान आहेत ह्मणून तीं जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मणवत नाहीं.

दोन समीकरणापासून स्पष्ट आहे, ह्मणजे

$$अ-ब=० \text{ आणि } \frac{अ}{ब}=१$$

आतां ही पुढील व्याख्या सांगतों. **बरोबरीचे जवळ जवळ येणें हें अंतराचे न्यूनतेनें मोजितां येत नाहीं, परंतु भागाकार १ याचे जवळ येण्यानें मोजिलें जातें.** जसें, जरी ३–२ यांचें अंतर २५–२० यांचे अंतरापेक्षां कमी आहे, तथापि २५ हे २० चे जवळ जवळ बरोबर होण्यापेक्षां ३ हे २ चे अधिक जवळ जवळ बरोबर नाहींत. परंतु २५ हे २० यांचे जवळ जवळ बरोबर होण्यास जितके जवळ आहेत तितके ३ हे २ चे जवळ जवळ बरोबर होत नाहीं, कांकीं $\frac{३}{२}$ हे १ पेक्षां $\frac{१}{२}$ नें अधिक आहेत आणि $\frac{२५}{२०}$ हे १ पेक्षां $\frac{१}{४}$ नें मात्र अधिक आहेत, ह्मणजे $\frac{१}{४}$ हा $\frac{१}{२}$ पेक्षां कमी आहे.

जवळ जवळ बरोबर असे शब्द कामांत घ्यावे लागतील, तर याविषयीं जा गोष्टी **८४ आणि ८५ पृष्ठांत** आणि वर जें मोठ्ये अक्षरांनीं लिहिलें तें पहा.

सिद्धांत. अपूर्णांकाची किंमत त्याचे पदांचे **शुद्ध** किंमतीवरून होत नाहीं, परंतु त्या पदांचे संबंधाचे किंमतीवरून होती. $\frac{मअ}{मब}=\frac{अ}{ब}$ या समीकरणांत या वरचे सिद्धांताची गोष्ट आहे, असें या पुढील उदाहरणापासून दिसेल.

१. असा एक अपूर्णांक काढ कीं ज्याचे अंश ५८३ असून, तो $\frac{१}{१०००}$ या इतका लहान होईल.

उत्तर $\frac{५८३}{५८३०००}$

२. अ आणि ब असे दोन अपूर्णांक काढ, कीं ते प्रत्येक $\frac{१}{१०००}$ पेक्षां कमी असून, $\frac{अ}{ब}$ दहा लक्षांबरोबर होईल.

उत्तर $अ=\frac{१}{२०००}$, $ब=\frac{१}{२०००००००००}$

एथें $\frac{अ}{ब}=१००००००$ $\frac{ब}{अ}=\frac{१}{१००००००}$

कमी असून, $\frac{अ}{ब}$=म होईल.

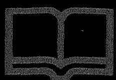
उत्तर. २ क पेक्षां प कमी होईल या संकेतानें प आणि क असे भलते कांहीं दोन अंक घे, ते याप्रमाणें असावे

$$अ=\frac{प}{क}, \text{ आणि } ब=\frac{प}{मक}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. पहा या उदाहरणांत सगळीं अक्षरें धन आहेत. प+क+म यांचे जवळ जवळ होण्यास जितका प+म आहे, तितका प+क चे जवळ जवळ होण्यास प नाहीं. क जितका इचे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, त्याहून जर ब अधिक अ चे बरोबरीचे जवळ जवळ असेल, तर अ जितका बचे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, तितका ब+इचे जवळ जवळ बरोबर होण्यास अ+क नाहीं, परंतु क जितका इचे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, त्याहून अधिक बरोबरीचे जवळ जवळ आहे. पुनः नय याचे जवळ जवळ होण्यास जितका मय आहे, तितका नक्ष चे जवळ जवळ होण्यास मक्ष आहे.

नियमित आणि अनियमित या शब्दांचे अर्थाविषयीं कांहीं गोष्ट सांगीतली पाहिजे. कांहीं विशेष पक्ष सांगण्याचा असेल, त्यांतील एकादा शब्द कामांत आणण्यास योग्य आहे किंवा नाहीं, याविषयीं कांहीं संशय नसला, तर त्या शब्दास **नियमित** ह्मणतात. कांहीं विशेष पक्षांत एकादा शब्द कामांत आणण्याविषयीं संशय असेल, तर त्या शब्दास **अनियमित** ह्मणतात. जसें **बरोबर** हा शब्द नियमित आहे **४+४ हे ९ यांचे बरोबर आहेत कीं काय** ? अशे प्रश्नाचे उत्तराविषयीं दोन मतें कधींहि होणार नाहींत. परंतु **मोठा** हा शब्द अनियमित आहे. **१००० हा मोठा अंक आहे कीं काय** ? यास उत्तर हेंच, कीं सर्व लोकांस मान्य, असें कोणत्याहि पक्षीं, या प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं. नियमित आणि अनियमित या शब्दांचीं कांहीं उदाहरणें देतों.

नियमित शब्द. बरोबर, केवळ सारखा, अधिक जवळ, अधिक मोठा, अधिक लहान, अति मोठा, अति लहान, इत्यादि, हवा तितका, इतका मोठा, अगदि.



अनियमित शब्दांचा अर्थ वाढविल्यानें, त्यांचा अर्थ असा व्हावा, कीं त्या अर्थानें ते कामांत घेतले असतां, जा प्रतिज्ञांत मतभेद आहे, त्या जर गणितरूप सिद्धांत अशा दिसणार नाहींत, तर या शब्दांचा उपयोग करितां येईल. आणि असें नसल्यास त्या शब्दांची कांहीं गरज पडणार नाहीं. या गोष्टीचें उदाहरण दाखविण्यासाठीं **जवळ, लहान, आणि मोठा,** हे शब्द घेतों. **१२७ पृष्ठा** वर उणें शब्दाचा अर्थ दाखविला आहे तशा रितीनें **अधिक लहान** हा शब्द बदल केला आहे असें मनांत आणूं नये. तो शब्द गणितरूपाचा अर्थ तसाच दाखवितो. **जर क्ष लहान असेल, तर ७+क्ष हे ७ यांचे जवळ जवळ बरोबर आहेत कीं काय?** या प्रतिज्ञेविषयीं सर्व लोक एकमत होतील; आणि त्याचें कारण हेंच, कीं **लहान** या शब्दाचा अर्थ दाखविण्याविषयीं जो अपूर्णांक बोलणाराचे मनांत असेल, त्या अपूर्णांकाचे संबंध रहित **लहान** आणि **जवळ** या शब्दांचा संबंध आहे. **अब** एक रेघ असेल, तीस कोणी लहान ह्मणेल आणि दुसरा कोणी ती लहान नाहीं असें ह्मणेल, परंतु **लहान** आणि **जवळ** या शब्दाविषयीं सर्व लोक एक मत होतील, कीं त्यांत अर्थ हाच आहे, कीं **जर अब लहान असेल, तर अ हा बचे जवळ आहे.** परंतु $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, इत्यादि यांतून कोणता अपूर्णांक लहान आहे? असें विचारिलें तर याचें उत्तर प्रसंगानुरूप देतां येईल. यामुळें लहान आणि जवळ हे दोन शब्द त्यांचा व्यवहारिक अर्थानें कामांत घेत नाहीं. परंतु वरची प्रतिज्ञा अशा रूपानें मांडितां येईल, कीं लहान आणि जवळ हें काय आहे, असा प्रश्न करण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं. **जर क्ष हवा तेवढा लहान असेल, तर, इच्छेप्रमाणें ७ यांचे** जवळ **७+क्ष होतील; अथवा माझे इच्छेप्रमाणें, क्ष हवा तेवढा लहान केला तर, तुझे इच्छेप्रमाणें ७ यांचे हवे तेवढे जवळ ७+क्ष करीन;** अथवा **तुझे इच्छेप्रमाणें जो लहान अपूर्णांक असेल तो सांग; परंतु त्यास तूं लहान ह्मणतोस त्याचें कारण विचारीत नाहीं; तेव्हां, माझा इच्छेप्रमाणें जर मी क्ष हवा तेवढा लहान केला, तर जो तूं अपूर्णांक सांगितलास त्यापेक्षां ७+क्ष आणि ७ याचें अंतर लहान करीन;** आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

लहान, मोठा आणि जवळ या शब्दांस व्यवहारिक अर्थानें नकारून, बीजगणितांत आपले कामासाठीं **इच्छेप्रमाणें लहान, इच्छेप्रमाणें मोठा, हवा तेवढा जवळ, अथवा हवा तेवढा लहान, जितका जितका मोठा**, इत्यादि अशे बोलण्याचे संक्षेप स्थानीं त्यांस पुनः घेतों. या अर्थानें नियमित आणि सिद्ध करितां येतील अशा पुष्कळ प्रतिज्ञा आहेत. उदाहरण. **जर क्ष लहान असेल, तर $\frac{1}{क्ष}$ मोठा आहे.** ह्मणजे इच्छेप्रमाणें जर क्ष लहान केला, तर इच्छेप्रमाणें $\frac{1}{क्ष}$ मोठा होईल.

जशा कल्पना बदलतात, तशी ज्याची किंमत बदलत जाती, असें कांहीं अ परिमाण आहे, आणि जशी कल्पना बदलती तशी ज्याची किंमत बदलत नाहीं, असें कांहीं प नियत परिमाण आहे, तर जेव्हां कांहीं प्रसंगीं किंवा कल्पनानीं इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा पचे जवळ अ करितां येतो, तेव्हां पला अची नियतता ह्मणतात. कांहीं परिमाण इच्छेप्रमाणें मोठें आहे अशी कल्पना केली, तर तें परिमाण **अनियत वाढत जातें** असें ह्मणतात; आणि कांहीं परिमाण इच्छेप्रमाणें लहान आहे, तर तें परिमाण **अनियत घटत जातें** असें ह्मणतात. ह्या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा स्पष्ट दिसेल.

जर क्ष अनियत घटत जातो, तर अ+क्ष या पद्धतीची नियतता अ आहे; जर क्ष अनियत घटत जातो, तर $\frac{1}{क्ष}$ अनियत वाढत जातो; जर क्ष अनियत बचे जवळ येतो, तर अ+क्ष ची नियतता अ+ब आहे.

हीं पुढील गोष्ट अवघड करून सांगण्याची रीति वरचा पहिल्या आणि तिसऱ्या कल्पनेंत आहे असें दिसेल, ह्मणजे, जर क्ष=०, तर अ+क्ष=अ; आणि जर क्ष=ब, तर अ+क्ष=अ+ब, हीं दोन्हीं समजण्याजोगीं आहेत. परंतु, जर क्ष=०, तर $\frac{1}{क्ष}=\frac{1}{0}$, यांत कांहीं समजायाजोगा अर्थ नाहीं; सारांश या गोष्टीविषयीं जो एथें अर्थ सांगितला, त्याचें अनुमान पूर्वी ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरील प्रतिज्ञांत झालें.

जीं पदांचीं रूपें अन्य कारणानें अवघड असतील, त्यांचा अर्थ दाखवावा हा या अध्यायाचा हेतू आहे; असें ०, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, हीं आणि $अ^{0}$ याचा जर अन्यकारणानें अर्थ सांपडला नसता, तर तें पद अशे अवघडरूपांत गणलें जातें. परंतु वरचा रूपांशिवाय दुसरीं आहेत,

$$०^० \qquad ०^{\frac{१}{०}} \qquad \left(\frac{१}{०}\right)^० \qquad \text{इत्यादि.}$$

जर या पुढील पद्धतींत क्ष=अ असें असल्यानें काय होईल हें लक्षांत न आलें, तर कदाचित् वरचा सारखीं रूपें आढळतील,

$$(क्ष-अ)^{क्ष-अ}, \quad (क्ष-अ)^{\frac{१}{क्ष-अ}}, \quad \left(\frac{१}{क्ष-अ}\right)^{क्ष-अ} \text{ इत्यादि.}$$

या सर्व पक्षांत, जेव्हां एकाद्ये रूपापासून कांहीं परिमाणाचा सरळ बोध होत नाहीं, तेव्हां **त्या रूपाची काय किंमत आहे ?** असें विचारणार नाहीं, अथवा त्या रूपाला किंमत आहे कीं नाहीं हें सिद्ध होतें कीं नाहीं, याविषयींहि कांहीं विचार करायाचा नाहीं. परंतु बहुतकरून सर्वदां याप्रमाणें विचारिलें पाहिजे, **जा कल्पनेनें असमञ्जुतीचें रूप उत्पन्न होतें, ती कल्पना घेतल्यास जा पद्धतीपासून असमञ्जुतीचें रूप होतें, ती पद्धति कोणकोणत्या किमतीचे जवळ येईल ?**
उदाहरण

जेव्हां $\quad क्ष=अ \quad$ तेव्हां $\quad \frac{क्ष^२-अ^२}{क्ष-अ} = \frac{०}{०}$

परंतु जेव्हां क्ष हा अचे जवळ जवळ होतो, असें आहे तेव्हां वरचे अपूर्णांकाचे किमतीमध्यें कोणकोणत्या तऱ्हेचा फेर होतो याचा विचार केला, तर **असें समजांत येतें, कीं ती किमत** २अचे जवळ जवळ येती, ही गोष्ट पुढें दाखविली आहे. **आणि ही पुढील प्रतिज्ञा** आपल्या नजरेस येईल; **जर इच्छेप्रमाणें हवातेवढा क्ष हा अचे जवळ करितां येईल, तर इच्छेप्रमाणें हवातेवढा $\frac{अ^२-क्ष^२}{अ-क्ष}$ हा २अचे हवातेवढा जवळ करितां येईल, अथवा जर क्ष हा अचे अनियत जवळ येतो,** तर $\frac{अ^२-क्ष^२}{अ-क्ष}$ **हा २अ याचे अनियत जवळ होईल.**

तर यावरून या पुढीलप्रमाणें ह्मणतां येईल कीं काय ?

जेव्हां क्ष $=$अ, तर $\frac{क्ष^२-अ^२}{क्ष-अ} = \frac{०}{०} =$ २अ अथवा या पक्षांत $\frac{०}{०} =$ २अ ? **सर्व पदांचा** सरळ अर्थानें, असें ह्मणणें योग्य आहे कीं नाहीं, याचा विचार करणें शिकणारावर सोंपितों. **मागील प्रतिज्ञांतून** एकादे

प्रतिज्ञेचा संक्षेप दाखविण्याशिवाय अशा रूपाचा या ग्रंथांत उपयोग करणार नाहीं.

$\frac{1}{0}$ याचे जागीं ∞ असें चिन्ह करायाची चाल आहे; आणि यास **अनंतता** ह्मणतात. वर सांगीतलेल्या गोष्टीवरून ८६ **आणि** ८७ पृष्ठांचे गोष्टीप्रमाणें क्ष = ∞ हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेपरूप आहे असें मनांत आण; **क्ष यास अनियत वाढूं दे.**

पुनः **क्ष = ० असें असूं दे**, हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेपरूप आहे असें मनांत याणायास योग्य आहे. ह्मणजे **क्ष यास अनियत घटूं दे.** या गोष्टीविषयीं पुनः विचार होईल. परंतु प − क = ० या रूपाचे समीकरणामध्यें जांत प आणि क कांहीं सांत परिमाणें आहेत त्या समीकरणांत वरचे सारिखे बदल करण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं.

१. **सिद्धांत.** जर **अ** आणि **ब** या दोन पद्धति सर्वदां बरोबर आहेत, त्यांचीं रूपें जोंपर्यंत समजायाजोगीं आहेत, तोंपर्यंत **अ** आणि **ब** यांचा नियतताहि बरोबर आहेत.

उदाहरण मनांत आण कीं क्ष अनियत वाढतो, तर **अ**ची नियतता **प** आहे, आणि **ब**ची नियतता **क** आहे; तेव्हां **प = क** असावा, ही गोष्ट सिद्ध करायासाठीं मनांत आण, कीं

अ = प + अ, आणि **ब = क + ब**

तेव्हां, क्ष अनियत वाढविल्यानें, अ आणि ब अनियत घटत जातात. कां कीं असें नसलें, आणि जर अची नियतता (**अ**) असती तेव्हां **अ** अथवा **प** + अची नियतता **प** + अ होती. परंतु ती नियतता **प** आहे; यामुळें अला नियतता नाहीं, परंतु तो अनियत घटत जातो.

परंतु **अ = ब** यामुळें **प**+अ = **क**+ब. जर **प = क** नसेल तर तो अधिक मोठा किंवा अधिक लहान असावा. जर होऊं शकेल तर **क** पेक्षां **प** अधिक मोठा आहे असें मनांत आण, आणि **प = क + र** असें घे, आतां **प** आणि **क** या परिमाणामध्यें क्ष नाहीं, आणि त्यासारिखा **र** यामध्यें नाहीं, आणि जेव्हां क्ष बदलतो तेव्हां **प, क,** आणि **र** हे बदलत नाहींत. तेव्हां याप्रमाणें होतें,

क + र + अ = क + ब अथवा **र = ब − अ**

यांत हा पुढील खोटेपणा आहे; र हें **नियतपरिमाण** सर्वदा ब–अ याचे बरोबर आहे, ह्मणजे क्ष वाढविल्यानें ब–अ इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो, कां कीं जसा जसा क्ष अनियत वाढतो तसे ब आणि अ हे अनियत घटतात. यामुळें प+क+र हें अयुक्तिक आहे. वरचे रितीप्रमाणें प=क–र हेंहि अयुक्तिक आहे. असें सिद्ध करितां येईल. यामुळें प=क.

२. **सिद्धांत.** जेव्हां क्ष अनियत घटतो तेव्हां क्ष=० असें केल्यानें जरी पहिल्यानें, सगळीं उत्तरें समजायाजोगे रूपाचीं असतील, आणि दुसऱ्यानें कृतीची संख्या अनियत नसेल, तर त्या पद्धतीची नियतता काढितां येईल.

उदाहरण, जेव्हां क्ष अनियत घटतो, तेव्हां १+२क्ष+३क्ष^{२} याची नियतता १+०+० अथवा १ आहे हें स्पष्ट दिसतें. आणि, कदाचित्, शिकणाराचे मनांत स्पष्ट येईल, कीं

१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+क्ष^{४} इत्यादि अनंत पावेतों

याची नियतता १+०+०+०+० इत्यादि अनंतपर्यंत आहे

अथवा, जेव्हां क्ष अनियत घटतो, तेव्हां ती नियतता १ आहे. परंतु एथें त्याणें पहावें, कीं जेव्हां क्ष लहान घेतला, आणि जरी क्ष, क्ष^{२}, क्ष^{३}, क्ष^{४}, इत्यादि यांतून प्रत्येक पद लहान असेल, तथापि त्यांची संख्या अनंत आहे. आणि कांहीं पदें एकत्र मिळवून, त्या पदांतून प्रत्येक पद इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें लहान केलें असतां, इच्छेप्रमाणें त्यांची बेरीज हवी तेवढी लहान होईल, हें जरी ठाऊक आहे, तथापि पदांचे **अनंत संख्यां**विषयीं ही गोष्ट खरी आहे असें अद्यापि माहीत नाहीं.

३. **सिद्धांत.** जेव्हां क्ष अनियत वाढतो. तेव्हां

अ+बक्ष, अ+बक्ष+कक्ष^{२}, इत्यादि पद्धती अनियत वाढतात; आणि अ+$\frac{ब}{क्ष}$, अ+$\frac{ब}{क्ष}$+$\frac{क}{क्ष^{२}}$, इत्यादि पद्धतींची नियतता अ आहे, हें स्पष्ट आहे. परंतु सामान्यतः पद्धतींचा शोधाविषयीं सोपी रीति हीच आहे, कीं जेव्हां क्ष अनियत वाढतो, तेव्हां $\frac{१}{क्ष}$ अनियत घटतो.

तर $वि = \frac{१}{क्ष}$ असें घे, ह्मणून $क्ष = \frac{१}{वि}$; ही क्षची किंमत क्षचे जागीं मांड, आणि, जेव्हां वि अनियत घटती, ह्मणजे, जेव्हां क्ष अनियत वाढतो. तर जा रूपापासून या पद्धतीची नियतता स्पष्ट होईल असें रूप देतां येईल तर दे.

उदाहरण, अशे पक्षांत $\frac{क्ष+१}{३क्ष-२}$ याची नियतता काय आहे ?

$$क्ष = \frac{१}{वि} \text{ असें घे, तर } \frac{\frac{१}{वि}+१}{\frac{३}{वि}-२} = \frac{(\frac{१}{वि}+१)वि}{(\frac{३}{वि}-२)वि} = \frac{१+वि}{३-२वि}$$

जेव्हां वि अनियत घटती, तेव्हां वरचे पद्धतीची नियतता $\frac{१}{३}$ आहे.

आतां हे पुढील पक्ष शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावे, ते एथें संक्षेपरूपानें मांडिले आहेत.

$$जर\ क्ष = \infty \text{ तर } \frac{अक्ष^{२}+बक्ष+क}{पक्ष+फ} = \infty, \quad \frac{अक्ष^{२}+बक्ष+क}{पक्ष^{२}+फक्ष+र} = \frac{अ}{प},$$

$$\frac{अक्ष^{२}+बक्ष+क}{पक्ष^{३}+फक्ष+र} = ०$$

४ सिद्धांत. जर १ पेक्षां अ अधिक असेल, तर अ, $अ^{२}$, $अ^{३}$, $अ^{४}$, इत्यादि, या श्रेणीचीं पदें अनियत वाढतील ; अथवा संक्षेपरूपानें मांडिलीं असतां, $अ^{\infty} = \infty$

कां कीं $अ^{२} = अ + अ^{२} - अ = अ + अ(अ-१)$

अथवा अ यास अ (अ−१) हें मिळविलें असतां अ हा $अ^{२}$ होतो.
त्या सारिखें $अ^{२}$ यास $अ^{२}(अ-१)$ हें मिळविलें असतां $अ^{२}$ हा $अ^{३}$ होतो.

. . . .

साधारणरूपानें $अ^{न}$ यास $अ^{न}(अ-१)$ हें मिळविलें असतां $क्ष^{न}$ हा $अ^{न+१}$ होतो.

परंतु १ पेक्षां अ अधिक आहे, तर अ−१ धन आहे. यामुळें अ (अ−१) हा गणित रूपाचा वाढवा आहे. आणि अ पेक्षां $अ^{२}$ अधिक आहे; यामुळें अ (अ−१) या पेक्षां $अ^{२}$(अ−१) अधिक आहे, अथवा अचे पहिल्या आणि दुसऱ्या घाताचा अंतराहून दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचें अंतर अधिक आहे. तसेंच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचा अंतराहून तिसऱ्या आणि चवथ्या घाताचें अंतर अधिक आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. परंतु जर अला हवे तितके वेळा एकच परिमाण वारंवार मिळविलें असतां, इच्छेप्रमाणें उत्तर हवें तेवढें मोठें करितां येईल; आणि प्रतिवेळीं पूर्वीपेक्षां मोठें असें परिमाण तितक्याच वेळा अशीं मिळविलें असतां, उत्तर वरपेक्षां अधिक मोठें येईल. यामुळें हा सांगितला सिद्धांत खरा आहे.

५. सिद्धांत. जर १ पेक्षां ब कमी असेल, तर ब, $ब^{२}$, $ब^{३}$, $ब^{४}$, इत्यादि या श्रेणीचीं पदें अनियत घटतील, अथवा संक्षेप रूपानें मांडिलीं असतां $ब^{\infty} = ०$

$ब = \frac{१}{अ}$ असें घे, तर $ब^{न} = \frac{१}{अ^{न}}$. परंतु १ पेक्षां ब कमी आहे, यामुळें १ पेक्षां अ अथवा $\frac{१}{ब}$ अधिक आहे; यामुळें, ४ **सिद्धांता**प्रमाणें, हवा तेवढा $अ^{न}$ मोठा करितां येईल. यावरून. $\frac{१}{अ^{न}}$ अथवा $ब^{न}$ हवा तेवढा लहान करितां येईल.

$\frac{९}{१००}$ याचे सर्व घातांतून जो पहिला घात $\frac{१}{१००००००}$ या पेक्षां कमी आहे तो सांग.

उत्तर, षड्घात.

६. सिद्धांत. जर क्ष धन असून तो १ पेक्षां कमी असेल, तर या पुढील पदांची श्रेणी वाढेल, परंतु ती श्रेणी अनियत वाढत नाहीं, ह्मणजे

$$(१+क्ष) \qquad (१+क्ष+क्ष^{२}) \qquad (१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}) \text{ इत्यादि}$$

या श्रेणीची नियतता $\frac{१}{१-क्ष}$ आहे; ह्मणजे वरचे पदांतून कोणतेंहि पद कितीहि घाताचें असलें, तरी $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे इतकें मोठें होऊं शकत नाहीं,

परंतु इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें त्याचे जवळ येतें. हा सिद्धांत संक्षेपरितीनें या पुढीलप्रमाणें मांडितात;

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \cdots\cdots + क्ष^{\infty}$$

हें साधारणरितीनें याप्रमाणें मांडितात,

$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३$ इत्यादि **अनंत पावेतों.**

पुढें जें सर्व सांगायाचें आहे त्याचा मुख्य पाया हीं वरची श्रेणी आहे, या श्रेणीचे उत्पत्तीचे रितीपासून ती प्रतिज्ञा स्थापितों. जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां १,१+क्ष,१+क्ष+क्ष^२, इत्यादि, हीं पदें वाढत जातातहें स्पष्ट आहे असें वर सांगितलें; आणि असें दिसतें, कीं प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदास क्षने गुणून, त्यांत १ मिळविल्यानें उत्पन्न होतें. जसें १+क्ष+क्ष^२, हें पद १+क्ष(१+क्ष) याचे बरोबर आहे, आणि १+क्ष+क्ष^२ +क्ष^३ हें पद १+क्ष (१+क्ष+क्ष^२) याचे बरोबर आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जर कोणतेंहि पद दाखविण्यासाठीं अ आणि त्याचे पुढचें पद दाखविण्यासाठीं ब घेतला; तर

$$ब = १ + अ क्ष$$

आतां अ पेक्षां ब मोठा आहे, आणि क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे, यामुळें, अ हा क्षनें गुणिला असतां जी न्यूनता पावतो त्या न्यूनतेपेक्षां १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो. परंतु अ क्ष=अ+अक्ष−अ=अ−(१−क्ष) अ; अथवा अ हा क्षनें गुणिला असतां (१−क्ष) अ इतक्यानें कमी होतो. परंतु त्या न्यूनतेपेक्षां त्यांत १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो; ह्मणजे (१−क्ष) अ या पेक्षां १ अधिक मोठा आहे. या दोहोंस १−क्ष याणीं भाग; तर दिसण्यांत येईल कीं अ पेक्षां $\frac{१}{१-क्ष}$ अधिक मोठा आहे. परंतु १,१+क्ष,१+क्ष+क्ष^२, इत्यादि श्रेणीचें कोणतेंहि पद अ आहे; या मुळें श्रेणीचीं पदें, कितीहि घेतलीं तरी त्यांतून प्रत्येक पद $\frac{१}{१-क्ष}$ पेक्षां कमी आहे.

जरी $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे बरोबर, अ असत नाहीं, तथापि त्याचे हवा तेवढा

बरोबरीचे जवळ होईल, हें सिद्ध करायाचें राहिलें. स्मरणांत ठेवावें, कीं प्रत्येक पुढील पद याप्रमाणें उत्पन्न होतें, ह्मणजे **त्याचें पूर्वींचें पद क्ष याणें गुण आणि त्यांत १ मिळीव.** अ आणि $\frac{१}{१-क्ष}$ यांचें अंतर दाखवायासाठीं प घे; असा कीं

$$अ = \frac{१}{१-क्ष} - प$$ आहे, तेव्हां पुढील पद हें आहे

$१ + अ\ क्ष = १ + \frac{क्ष}{१-क्ष} - पक्ष = \frac{१-क्ष+क्ष}{१-क्ष} - पक्ष = \frac{१}{१-क्ष} - पक्ष$; याचे पुढचें पद $१ + \frac{क्ष}{१-क्ष} - पक्ष^२$ अथवा $\frac{१}{१-क्ष} - पक्ष^२$; याचें पुढचें पद $\frac{१}{१-क्ष} - पक्ष^३$; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून असें एक पद काढितां येईल, कीं तें $\frac{१}{१-क्ष}$ याहून $पक्ष^न$ इतक्या अंतरानें भिन्न होईल, जांत न हवा तेवढा मोठा होईल. परंतु प दिलेलें परिमाण आहे, आणि **५ सिद्धांता प्रमाणें** जस जसा न अनियत वाढत जातो, तसतसा $क्ष^न$ अनियत घटत जातो; यामुळें $पक्ष^न$ हवा तेवढा लहान करितां येईल, अथवा $\frac{१}{१-क्ष} - पक्ष^न$ ही पद्धति $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे हवी तेवढी जवळ जवळ करितां येईल. परंतु अ पासून मागलीं सर्व पदें घेतलीं, तरी $\frac{१}{१-क्ष} - पक्ष^न$ हेंच येईल. यामुळें पदें हवीं तितकीं घेतल्यानें, $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे हवें तेवढें जवळ जातां येईल.

$$१ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ + क्ष^४$$ इत्यादि **अनंतपावेतों,**

या श्रेणीमध्यें १ पेक्षां क्ष कमी असला, तर या श्रेणीस नियतता आहे कीं काय, अथवा १, १−क्ष, १−क्ष+$क्ष^२$, इत्यादि यांची वाढ आणि घट कशा तऱ्हेची होते हें शोधितों. या श्रेणींत एक एक पदाचे अंतरानें पदें अधिक आणि उणी होत जातात असें दिसतें; तथापि त्यांचा हा क्रम सरळ रितीनें चालतो. पुढचें पद काढणें तर, त्याचे पूर्वींचें पद क्षनें गुणून तो गुणाकार १ तून वजा कर. जसें,

$$१-क्ष+क्ष^२=१-क्ष(१-क्ष)$$

$१-क्ष+क्ष^२-क्ष^३=१-क्ष(१-क्ष+क्ष^२)$ आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

अथवा जर, अ आणि ब हीं पदें एका पुढें एक असतील, तर

$$ब=१-अ क्ष \text{ अथवा } १+अ-अ(१+क्ष)$$

म्हणजे, $ब=अ+१-अ(१+क्ष)$

तेव्हां त्याचे पुढचें पद $क=ब+१-ब(१+क्ष)$ इत्यादि.

परंतु वरचीं तीन पदें एक एक पदाचे अंतरानें अधिक आणि उणीं होत जातात; म्हणजे, अ पेक्षां ब मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर ब पेक्षां क लहान आहे. अथवा अ (१+क्ष) या पेक्षां १ मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर ब (१+क्ष) पेक्षां १ कमी आहे; अथवा अ पेक्षां $\frac{१}{१+क्ष}$ मोठा आहे, आणि ब पेक्षां $\frac{१}{१+क्ष}$ कमी आहे. अशा तऱ्हेनें श्रेणीचीं पदें उत्तरोत्तर $\frac{१}{१+क्ष}$ याहून उणीं आणि अधिक होत जातात.

तर या प्रमाणें होतें, १ हा $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां मोठा आहे

$१-क्ष$ ही पद्धति $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां कमी आहे

$१-क्ष+क्ष^२$ ही $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां मोठी आहे

इत्यादि.

आतां जसजसा न वाढवावा, तसतसा $क्ष^न$ अनियत घटतो, तर न एवढा मोठा घेतां येईल, कीं एकापुढील एक अशीं दोन पदें, म्हणजे

$$१-क्ष+क्ष^२- \text{ इत्यादि } \cdots\cdots\cdots \pm क्ष^{न-१}$$

$$\text{आणि } १-क्ष+क्ष^२- \text{ इत्यादि } \cdots\cdots\cdots \pm क्ष^{न-१} \pm क्ष^न$$

इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे लहान परिमाणानें हीं सांगितलीं दोन पदें भिन्न होतील, कां कीं त्यांचें अंतर $\mp क्ष^न$ इतकें आहे. परंतु आतां वर सिद्ध केलें, कीं या दोन पदांतून एक पद $\frac{१}{१+क्ष}$ या पेक्षां मोठें आहे आणि

दुसरें $\frac{१}{१+क्ष}$ या पेक्षां कमी आहे. आणि त्या दोन पदांमध्यें जें कांहीं परिमाण असतें, त्या परिमाणांशीं प्रत्येक पदाचें अंतर त्या दोन पदांचे अंतराहून कमी आहे; यामुळें जर न हवा तितका मोठा घेतला, तर त्या दोहोंतून हवें तें पद $\frac{१}{१+क्ष}$ याचे हवें तेवढें जवळ करितां येईल.

तर अशानें जा दोन श्रेण्या उत्पन्न होतात, त्या याप्रमाणें आहेत ;

$\frac{१}{१-क्ष}$ = १+क्ष+$क्ष^{२}$+$क्ष^{३}$+ इत्यादि **अनंत पावेतों.**

$\frac{१}{१+क्ष}$ = १–क्ष+$क्ष^{२}$–$क्ष^{३}$+ इत्यादि **अनंत पावेतों.**

आणि $\frac{१}{१-क्ष}$ यास वरचा पहिल्या अनंत श्रेणीचें **सर्वधन** ह्मणतात, ह्मणजे त्याचा अर्थ हाच, कीं १, क्ष, $क्ष^{२}$, $क्ष^{३}$, इत्यादि पदांची मेळवणी पाहिजे तेथपर्यंत करित गेलें असतां $\frac{१}{१-क्ष}$ ही नियतता आहे.

हा विषय पुढें आठव्या अध्यायामध्यें सांगीतला आहे.

७. **सिद्धांत.** जर अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत घटत जातील, तर त्या अपूर्णांकाची नियतता शून्य असेल, किंवा सांत, किंवा अनंत असेल; ह्मणजे, तो अपूर्णांक अनियत घटत असेल, किंवा त्याला सांत नियतता असेल, किंवा अनियत वाढत असेल. अंश आणि छेद हे दोन्ही अनियत घटत गेले, तरीं वरचा तीन कल्पनांतून कोणतीहि विरुद्ध नाहीं.

हे पुढील तीन अपूर्णांक घे

$$\frac{क्ष^{२}-अ^{२}}{(क्ष-अ)^{२}} \qquad \frac{क्ष^{२}-अ^{२}}{क्ष-अ} \qquad \frac{(क्ष-अ)^{२}}{क्ष^{२}-अ^{२}}$$

क्ष=अ आहे, अशा कल्पनेनें वरचे तीन अपूर्णांकांचें रूप $\frac{०}{०}$ आहे. अ हवा तेवढा क्षचे जवळ येतो, या कल्पनेनें अंश आणि छेद अनियत घटतील असें करितां येईल. याचें कारण हेंच आहे, कीं क्ष–अ ही पद्धति प्रत्येक अंश आणि छेदांचे गुण्य किंवा गुणक आहे, आणि जसजसा अचे जवळ क्ष येत जातो, तसतशी क्ष–अ ही पद्धति अनियत घटत जाती, कां कीं वरचे तीन अपूर्णांक या पुढीलप्रमाणें आहेत,

$$\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{अ})} \qquad \frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}{\text{क्ष}-\text{अ}} \qquad \frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{अ})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}$$

प्रत्येक अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद क्ष–अ याणीं भाग, तर ते याप्रमाणें होतील,

$$\frac{\text{क्ष}+\text{अ}}{\text{क्ष}-\text{अ}} \qquad \text{क्ष}+\text{अ} \qquad \frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{क्ष}+\text{अ}}$$

क्ष=अ असेल, या खेरीज हे प्रत्येक पूर्वींचे अपूर्णांकांबरोबर आहेत; याविषयीं **२७२ पृष्ठाप्रमाणें** सद्यः कांहीं गोष्ट सांगत नाहीं. परंतु जेव्हां अचे जवळ क्ष येत जातो, तेव्हां पहिल्ये अपूर्णांकाचें रूप याप्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{कोणतेंहि परिमाण ज्याची नियतता २ अ आहे}}{\text{कोणतेंहि परिमाण जें अनियत घटत जातें,}}$$

आणि यामुळें तो अपूर्णांक अनियत वाढत जातो. दुसऱ्ये अपूर्णांकाचें रूप याप्रमाणें आहे,

कोणतेंहि परिमाण ज्याची नियतता २ अ आहे,

आणि यामुळें तो दुसरा अपूर्णांक २ अचे जवळ अनियत येत जातो. तिसरा अपूर्णांक याप्रमाणें आहे.

$$\frac{\text{कोणतेंहि परिमाण जें अनियत घटत जातें}}{\text{कोणतेंहि परिमाण ज्याची नियतता २ अ आहे,}}$$

आणि यामुळें तो तिसरा अपूर्णांक अनियत घटत जातो. यामुळें जेव्हां कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत घटत जातात अशापक्षीं पाहिलें, तर, त्या अपूर्णांकाची किंमत कोणीकडे कोठपर्यंत जाईल, याविषयीं अनुमान करवत नाहीं, परंतु तो अपूर्णांक अनियत घटत किंवा वाढत जातो, किंवा तो सांत नियततेकडे जातो, किंवा जात नाहीं, हें पहाण्यासाठीं तो अपूर्णांक तपासला पाहिजे.

८. सिद्धांत. ज्या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत वाढत जातात; अथवा जो $\frac{\infty}{\infty}$ यारूपाजवळ येत जातो, त्यास वर सांगितल्याप्रमाणें तपासला पाहिजे. $\frac{अ}{ब}$ असा एक अपूर्णांक असो, ज्याचे अंश आणि छेद अनियत वाढत जातात. यावरून हीं पुढील गोष्ट ठाऊक आहे, कीं

$$\frac{अ}{ब} = \frac{\frac{१}{ब}}{\frac{१}{अ}}$$

आणि जर अ आणि ब अनियत वाढत जातात, तर $\frac{१}{अ}$ आणि $\frac{१}{ब}$ अनियत घटत जातात हेंहि ठाऊक आहे. यामुळें ज्या गोष्टीनें $\frac{\infty}{\infty}$ या रूपाजवळ $\frac{अ}{ब}$ येत जातो, तशानेंच, परंतु दुसऱ्ये रूपानें, तोच अपूर्णांक $\frac{०}{०}$ या रूपाजवळ येतो. यावरून पूर्वीचा सिद्धांत एथेंही लागू होतो.

९ सिद्धांत. कांहीं गुणाकार असेल, ज्याचें एक पद अनियत घटत जातें आणि दुसरें पद अनियत वाढत जातें, तर त्या गुणाकाराचे किंमतीविषयीं वर सांगितल्याप्रमाणें तपासून पाहिलें पाहिजे. $० \times \infty$ या रूपाजवळ येत जातो, असा अब एक गुणाकार असो; ह्मणजे, ज्यांत अ अनियत घटत जातो, आणि ब अनियत वाढत जातो.

$$अब = \frac{अ}{\frac{१}{ब}}$$

हें आणि जर ब अनियत वाढत जातो, तर $\frac{१}{ब}$ अनियत घटत जातो हेंहि ठाऊक आहे. यावरून, वरचे पक्षाप्रमाणें, अब, निराळ्ये रूपानें, $\frac{०}{०}$ या रूपाजवळ येत जातो.

यावरून दिसतें, कीं हीं पुढील तीन रूपें, ह्मणजे

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \times \infty$$

हीं परस्पर असा संबंध ठेवितात, कीं जा पद्धतीपासून त्यांतील एक रूप निघेत. त्याच पद्धतीपासून बाकीचीं दुसरीं रूपें निघतील.

आतां $अ^0$ हें रूप घेतों, यास **१७२ पृष्ठावर** केवळ निश्चितार्थ दाखविला आहे त्याप्रमाणें एथें घेत नाहीं, परंतु या पुढिलाचा दर्शक दाखविण्याविषयीं घेतों ह्मणजे,

जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो तेव्हां $अ^{क्ष}$ याचे नियततेचा दर्शक तें रूप घेतों.

जर $क्ष = \frac{१}{य}$, तर जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां य अनियत वाढत जातो. य पूर्णांक असो, तर

$$अ^{क्ष} = अ^{\frac{१}{य}} = \sqrt[य]{अ}$$

पहिल्यानें, १ पेक्षां कमी अंकांचे सगळे घात १ पेक्षां कमी आहेत, यावरून जर १ पेक्षां अ मोठा असेल, तर त्याचीं सगळीं मुळें १ पेक्षां मोठीं आहेत. या पुढीलप्रमाणें घे,

$$\sqrt[य]{अ} = १ + वि \text{ अथवा } अ = (१+वि)^{य}$$

आतां य इतका मोठा घेतां येईल, कीं कसाहि लहान अपूर्णांक मनांत आणिला तरी त्यापेक्षां वि लहान होईल. जर असें नाहीं, तर कपेक्षां वि लहान होण्याकरितां य एवढा मोठा होण्यास अशक्य आहे, असें ह्मण. तर यची कशीहि किंमत असली, तरी कपेक्षां वि सर्वदां मोठी आहे, यामुळें $१+क$ यापेक्षां $१+वि$ सर्वदां मोठी आहे. परंतु **४ सिद्धांताप्रमाणें**, य एवढा मोठा घेतां येईल, कीं $(१+क)^{य}$ ही पद्धात कसेंहि मोठें परिमाण मनांत घेतल्यापेक्षां मोठी होईल, आणि यामुळें ती अपेक्षां मोठी होईल. वर समजलें, **कीं कपेक्षां वि मोठी आहे**, तर अपेक्षांहि $(१+वि)^{य}$ मोठी आहे. परंतु $(१+वि)^{य}$ अचे **बरोबर** आहे;

तर ही एथें विरुद्ध गोष्ट आहे. यामुळें, कोणत्याहि सांगीतलेल्या अपूर्णांकापेक्षां वि लहान करितां येत नाहीं, अशी कल्पना खरी नाहीं; ह्मणजे कोणत्याहि सांगीतल्या अपूर्णांकापेक्षां वि लहान करितां येईल, अथवा १+वि हवी तेवढी १ याजवळ करितां येईल. परंतु १+वि $=\sqrt[य]{अ}$, यामुळें, जर य अनियत वाढत जातो, तर असें दिसतें, कीं

$$\sqrt[य]{अ} \text{ अथवा } अ^{\frac{१}{य}} \text{ अथवा } अ^{क्ष} \text{ याची नियतता १ आहे.}$$

अथवा $अ^{०}=१$, एथे ०हें २७१ वे पृष्ठावरचे अर्थाचें आहे.

दुसऱ्यानें, १ पेक्षां अ लहान असो, यावरून १ पेक्षां $\frac{१}{अ}$ मोठा आहे. वरचे उदाहरणावरून $\sqrt[य]{\frac{१}{अ}}$ हें १ याजवळ हवें तेवढें करितां येईल; परंतु तें पद $१\div\sqrt[य]{अ}$ या रूपाचें आहे, यामुळें $\sqrt[य]{अ}$ हें १ याजवळ हवें तेवढें करितां येईल.

१० **सिद्धांत.** क्षविषयींचा कोणत्याहि अकरणी पूर्णरूप* पद्धतीमध्यें, जर क्ष अनियत वाढत जाईल, तर जा पदांमध्यें क्षचा अति मोठा घात आहे, त्या पदांत सर्व दुसऱ्या पदांची बेरीज अनियत वेळा जाईल. ह्मणजे,

$$अक्ष^{३}+बक्ष^{२}+कक्ष+इ$$

या पद्धतीमध्यें जर अ कसेंहि लहान दिलेलें परिमाण असेल, आणि ब, क, आणि इ, हीं कशींहि मोठीं दिलेलीं परिमाणें असतील, तथापि क्ष एवढा मोठा घेतां येईल, कीं $अक्ष^{३}$ यामध्यें $बक्ष^{२}+कक्ष+इ$ ही सर्व पद्धति हव्या तितक्या वेळा जाईल.

$अक्ष^{३}$ यामध्यें $बक्ष^{२}+कक्ष+इ$ ही जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जाती, तें या पुढील अपूर्णांकरूपानें दाखवितां येतें,

$$\frac{अक्ष^{३}}{बक्ष^{२}+कक्ष+इ} \text{ अथवा } \frac{अक्ष^{३}\div क्ष^{२}}{(बक्ष^{२}+कक्ष+इ)\div क्ष^{२}} \text{ अथवा } \frac{अक्ष}{ब+\frac{क}{क्ष}+\frac{इ}{क्ष^{२}}}$$

* या शब्दाचे अर्थाविषयीं पुढील अध्यायाचा आरंभ पहा, या शब्दास इंग्रेजी भाषेंत इन्टिग्राल ह्मणतात.

$\frac{क}{क्ष}+\frac{इ}{क्ष^2}$=प घे. तेव्हां, क्ष अनियत वाढविल्यानें प अनियत घटत जातो, आणि क्ष हवातेवढा मोठा घेतला, तर १ पेक्षां प लहान होईल. ह्मणजे, अक्ष^3 यामध्यें बक्ष^2+कक्ष+इ हीं $\frac{अक्ष}{ब+प}$ इतक्या वेळा किंवा $\frac{अ}{ब+१}$ यापेक्षां अधिक वेळा जाती. परंतु जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां $\frac{अक्ष}{ब+१}$ अथवा $\frac{अ}{ब+१}$×क्ष हा गुणाकार अनियत वाढत जातो. तर, अक्ष^3 यामध्यें बक्ष^2+कक्ष+इ ह्या पद्धतीचा जाण्याचा वेळा वरचा सारिख्याच अनियत वाढत जातात.

उदाहरण. क्ष^3 याचा दशलक्षांशामध्यें, १०००क्ष^2+५००क्ष+१००० ही एक लक्षवेळापेक्षां आधिक वेळा जावी असा संकेत असेल, तर क्ष केवढा मोठा आसवा?

$$\frac{\text{क्ष}^3 \text{ याचा दशलक्षांश}}{१०००\text{क्ष}^2+५००\text{क्ष}+१०००}=\frac{\text{क्षचा दशलक्षांश}}{१००० + \frac{५००}{\text{क्ष}} + \frac{१०००}{\text{क्ष}^2}}$$

आतां, जर क्ष हा १००० याचे बरोबर किंवा यापेक्षां अधिक असेल, तर $\frac{५००}{क्ष}+\frac{१०००}{क्ष^2}$ ही बेरीज १ पेक्षां लहान आहे. यामुळें, या पक्षांत वरचा अपूर्णांक क्ष÷१००१ याचा दशलक्षांशापेक्षां अधिक आहे, अथवा यापुढील पेक्षां

$$\frac{\text{क्ष}}{१००१००००००}$$

जर क्ष = १००१००००००×१००००० अथवा १००१०००००००००० असा घेतला, तर वरचा अपूर्णांक १००००० याचे बरोबर होईल. यावरून, (१०००क्ष^2+५००क्ष+१०००) यांचा १००००० वेळा पेक्षां क्ष^3 याचा दश लक्षांश मोठा आहे. ही क्षची अतिलहान किंमत आहे, जिणेंकरून कृत्याचे संकेत स्थापितां येतील, हें निश्चित सांगत नाहीं, परंतु असें ह्मणवेल, कीं ही किंवा यापेक्षां कांहीं मोठी किंमत कृत्याचे संकेत स्थापील.

११ **सिद्धांत.** क्षविषयींचा कोणत्याहि अकरणी पूर्णरूप पद्धतीमध्यें, जर क्ष अनियत घटत जाईल, तर जापदामध्यें क्षचा अति लहान घात

आहे, त्या पदांत पद्धतीचीं सर्व दुसरीं पदें हव्या तितक्या वेळा जातील. उदाहरण, $\frac{१}{१०००}$ क्ष+१००० क्ष^२+१०० क्ष^३ यांत क्ष इतका लहान घेतां येईल, कीं $\frac{१}{१०००}$ क्ष यांत १००० क्ष^२+ १०० क्ष^३ ही पद्धति इच्छेप्रमाणें हव्या तेवढ्या वेळा जाईल; अथवा अक्ष^३ + बक्ष^२ + कक्ष + इ, यांत क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं इ अथवा इक्ष^०, हें पद जामध्यें क्षचा अति लहान घात* आहे, यांत अक्ष^३ + बक्ष^२ + कक्ष ही हव्या तेवढ्या वेळा जाईल. या विशेष पक्षांत ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कां कीं क्ष कसाहि अनियत घटत जातो, आणि अक्ष^३+बक्ष^२+कक्ष ही पद्धती अनियत घटत जाती, तेव्हां इ, तशीच रहाती. यामुळें इचा कसाहि अपूर्णांक दिला असेल, तरी अक्ष^३ + बक्ष^२ + कक्ष त्यापेक्षां कमी होऊं शकेल. आतां क्ष^० यापेक्षां क्षचा लहान घात नसेल अशी पद्धति घे; जसें, अक्ष^३ + बक्ष^२ + कक्ष. यांत क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं कक्ष यांत अक्ष^३ + बक्ष^२ ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. कां कीं कक्ष यांत अक्ष^३ + बक्ष^२ ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जाईल तें या पुढीलप्रमाणें दाखवितात,

$$\frac{\text{कक्ष}}{\text{अक्ष}^३+\text{बक्ष}^२} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{\text{अक्ष}^२+\text{बक्ष}} = \frac{\text{कोणतेंहि नियत परिमाण}}{\text{परिमाण जें अनियत घटत जातें}}$$

जेव्हां क्ष अनियत कमी करावा, तेव्हां ही पद्धति अनियत वाढत जाती.

यावरून हें निघतें, कीं जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां क्ष^२, क्ष^३, क्ष^४, इत्यादि हीं अनियत वाढत जातात इतकेंच नाहीं, **परंतु प्रत्येक पद त्याचे पूर्वींचे पदाहून अनियत वाढत जातें; ह्मणजे अर्थ हाच,** कीं क्ष^२, पेक्षां क्ष^३ हा इतका अधिक लौकर वाढत जातो, कीं शेवटीं क्ष^३ यांत क्ष^२ हा इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. तसेंच, जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां असें दिसतें, कीं क्ष^२, क्ष^३, क्ष^४, इत्यादि

* क्ष याचे पूर्ण घाताविषयीं बीजगणित श्रेणीचीं पदें याप्रमाणें आहेत.

. . . . क्ष$^{-३}$, क्ष$^{-२}$, क्ष$^{-१}$, क्ष^०, क्ष^१, क्ष^२, क्ष^३, ...

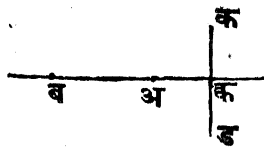
वरचे बरोबरीचीं पदें हींच आहेत

$\frac{१}{\text{क्ष}^३}$, $\frac{१}{\text{क्ष}^२}$, $\frac{१}{\text{क्ष}}$, १, क्ष, क्ष^२, क्ष^३ . . . . . . १७३ आणि १७४ पृष्ठ पहा.

हीं अनियत घटत जातात इतकेंच नाहीं; परंतु **प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाहून** अनियत **घटत** जातें; ह्मणजे अर्थ हाच, कीं क्ष^2 पेक्षां क्ष^3 हा इतका अधिक लौकर घटत जातो, कीं शेवटीं क्ष^3 हा इच्छेप्रमाणें क्ष^2 याचे हवे तेवढे लहान अपूर्णांकाचे बरोबर होईल. वरचा कल्पना या पुढीलप्रमाणें संक्षेपरूपानें सांगतां येतात; त्या **संक्षेपरूपानें** मात्र समजतात परंतु केवळ सरळ रितीनें समजांत येण्याजोग्या नाहींत.

संक्षेप बोलणें.	खरा अर्थ.
१. दोन अनंत मोठे परिमाणांतून, एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत मोठें असेल.	१ दोन अनियत वाढणाऱ्ये परिमाणांतून, एक दुसऱ्याहून इतकें लौकर वाढत जाईल, कीं केवळ बोलण्याप्रमाणें तें अनियत वाढत जातें इतकेंच नाहीं, परंतु त्यांत जितके वेळा दुसरें परिमाण जाईल, त्या वेळांची संख्याहि, अनियत वाढत जाती.
२. दोन अनंत लहान परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत लहान असेल.	२. अनियत घटत जातात अशीं दोन परिमाणें असतील, तर त्यांतून एक दुसऱ्याहून इतकें लवकर घटत जाईल, कीं केवळ बोलण्याप्रमाणें तें अनियत घटत जातें इतकेंच नाहीं, परंतु दुसऱ्या परिमाणाचा अपूर्णांकांविषयींहि, तें अनियत घटत जातें.

आतां हें पुढील कृत्य शिकणारानें समजावून दाखवावें



जर अ आणि ब हे कड रेषेकडे गमन करितात, आणि जर अ असा चालतो कीं जेव्हां बक हा $\frac{1}{2}$ इंच आहे, तेव्हां अक हा $\frac{1}{4}$ इंच असतो; आणि जेव्हां बक हा $\frac{1}{3}$ इंच आहे, तेव्हां अक हा $\frac{1}{9}$ इंच असतो; अथवा सामान्यतः जेव्हां बक हा क्ष इंच आहेत तेव्हां अक हा क्ष^2 इंच असतो; आणि क कडे अ जात असतां जर या आकृतीवर स्थूल दर्शक यंत्र मांडलें, जाची स्थूल करण्याची शक्ति वाढत जाती, ती अशा रितीनें कीं स्थूल करण्याचे शक्तीची वाढ, आणि अक रेषेचें खरें कमी होणें हीं दोन्हीं बरोबर असतील; ह्मणजे अक रेघ नेहेमी सारिख्येच लांबीची दृष्टीस पडेल; तेव्हां ब हा क कडे गमन करितो असें दृष्टीस पडणार नाहीं परंतु क पासून दूर दूर होत जातो असें दृष्टीस पडेल.

सातवा अध्याय.

बीजगणितानुरूप पद्धति आणि त्यांचीं फळें यांचे प्रतवार रचनेविषयीं. भागाकाराची रीति.

या विषयाचा विचार करण्याचे पूर्वीं, जा पद्धती आल्या त्यांची प्रतवार रचना करितों. जे शब्द कामांत आणितात ते बहुतकरून कांहींएक विशेष अक्षराचे संबंधाचे असतात; आणि जें पुढें येईल त्यांत तें विशेष अक्षर क्ष घेतलें आहे. या पुढील कोष्टकाचा अर्थ आतां दाखवितों.

फङ्शनें.

- साधारण बीजगणितानुरूप.
  - अकरणी.
    - पूर्णरूप.
      - एकाकी,
      - द्वियुक्,
      - त्रियुक्,
      - चतुर्युक्,
      - इत्यादि.
    - अपूर्णरूप.
  - करणी.
    - पूर्णरूप.
      - एकाकी,
      - द्वियुक्,
      - त्रियुक्,
      - चतुर्युक्,
      - इत्यादि.
    - अपूर्णरूप.
- असाधारण बीजगणितानुरूप.
  - घातमूळप्रकाशकरूप,
  - लाग्रतमिक्,
  - सुलट वर्तुळरूप,
  - उलट वर्तुळरूप,
  - इत्यादि.

जा पद्धतीमध्यें कोणत्याहि तऱ्हेनें क्ष युक्त असतो, त्या पद्धतीस क्षचें फङ्शन ह्मणतात; जसें, अ+क्ष, अ+ब्क्ष^2, इत्यादि ह्या पद्धती

क्षचीं फङ्‌शनें आहेत; त्या पद्धती अ आणि ब या अक्षरांचींहि फङ्-शनें आहेत, परंतु त्या पद्धती क्षविषयींचीं मात्र फङ्‌शनें आहेत असा विचार करण्याचा आहे. या पुस्तकाचे मागील भागांत जा पद्धतींचा विचार झाला, त्या जातीचा पद्धतींची संख्या जा पद्धतींत सांत आहे, अशा सर्व पद्धतींस **साधारण बीजगणितानुरूप** फङ्‌शनें ह्मणतात, परंतु जांत क्ष घातमूळ प्रकाशकरूप असतो त्यांस ह्मणत नाहीं. ह्मणजे, जसें $\sqrt{अ+अ^2}$, अक्ष^3+ब, इत्यादि हीं साधारण बीजगणितानुरूप फङ्-शनें आहेत, परंतु अ$^क्ष$ हें बीजानुरूप फङ्‌शन नाहीं. आणि २७७ पृष्ठा प्रमाणें, १+क्ष+क्ष^2+इत्यादि **अनंत पावेतों** ही श्रेणी आणि १÷(१–क्ष) हा भागाकार हीं दोन्हीं एकच आहेत, हें सिद्ध होईपावेतों ही वरची श्रेणी, क्षचें साधारण बीजगणितानुरूप फङ्‌शन आहे किं नाहीं, हें जाणवत नाहीं. क्षचे दुसऱ्ये सगळे फङ्‌शनास **असाधारण बीजगणितानुरूप** फङ्‌शनें ह्मणतात; जसें अ$^क्ष$ आणि जांत अशीं पदें येतात तीं सगळीं फङ्‌शनें त्यासारिखीं होतील; पुढें जेव्हां सांगण्याचा समय येईल, तेव्हां क्षचें लाग्रतम, आणि त्रिकोणमितीमध्यें क्षची सैन आणि कोसैन, आणि अनेक अशीं दुसरीं तऱ्हेतऱ्हेचीं फङ्‌शनें येतील, त्यांसहि असाधारण बीजगणितानुरूप फङ्‌शनें ह्मणतात. जा फङ्‌शनामध्यें अ$^क्ष$ येतो, त्यास क्षचें **घातमूळ प्रकाशकरूप** फङ्‌शन ह्मणतात. जा फङ्‌शनामध्यें लाग्रतम येतें, त्यास लाग्रतमिक् फङ्‌शन ह्मणतात. इत्यादि.

साधारण बीजगणितानुरूप फङ्‌शनामध्यें दोन जाती आहेत, त्यांतून एकास **अकरणी** ह्मणतात, ह्मणजे त्यांत क्षचे केवळ पूर्णघात येतात, जसें अ+क्ष^2, अक्ष$^{-2}$+ब, इत्यादि; आणि दुसऱ्यास **करणी** ह्मणतात, ह्मणजे त्यांत क्षचीं मूळें किंवा क्षचे अपूर्ण घात येतात, जसें अक्ष$^{\frac{1}{2}}$ + ब, $\sqrt{अ^2+क्ष^2}$, इत्यादि.

क्षचीं अकरणी आणि करणीरूप फङ्‌शनें दोन जातीचीं आहेत, ह्मणजे एक **पूर्णरूप**, जांत क्ष अंशांचेस्थळींमात्र येतो, जसें

$$क्ष+\frac{क्ष^2}{अ} \text{ आणि } \frac{अ+\sqrt{क्ष}}{अ+ब};$$

दुसरें **अपूर्णरूप**, जांत क्ष छेदांचेस्थळीं येतो, जसें

$$\frac{अ+क्ष}{बक्ष+क्ष^{2}} \text{ आणि } \frac{\sqrt{क्ष}-\sqrt{य}}{क+\sqrt[3]{क्ष}}$$

पूर्णरूप फङ्शनामध्यें हे पुढील भाग आहेत; पहिला, **एकाकी पदें**, जांत क्षचा केवळ एक घात येतो, जसें, $क्ष^{3}$, $अक्ष^{2}$, $\sqrt{बक्ष}$, $(अ+ब)\, क्ष^{2}$; दुसरा, **द्वियुक्पदें**, यांत क्षचे दोन निरनिराळे घात येतात, आणि त्यांत $क्ष^{0}$ हि येतो, जसें अ+बक्ष अथवा $अक्ष^{0}+बक्ष$, $कक्ष^{3}+\sqrt{क्ष}$, $मक्ष^{2}+नक्ष^{3}$, इत्यादि; तिसरा, **त्रियुक्पदें**, जांत क्षचे तीन निरनिराळे घात येतात; **चतुर्युक्पदें**, जांत क्षचे चार निरनिराळे घात येतात, इत्यादि. त्रियुक् आणि चतुर्युक्पदें हे शब्द फार थोडके कामांत आणितात; एकाकी पदाचे पुढल्या सगळ्या पदांस बहुतकरून **बहुयुक्पदें** ह्मणतात.

पूर्णरूप आणि अकरणी फङ्शनांत जसा अतिमोठा घात असेल, त्याप्रमाणें त्याचे पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, इत्यादि वर्णांचीं फङ्शनें असे विभाग केले असतात. जसें

अ+बक्ष, ही पद्धति क्षची पहिल्यावर्णाची अकरणी पूर्णरूप फङ्शन आहे.

$अ+बक्ष+कक्ष^{2}$, ही क्षची दुसऱ्या वर्णांची अकरणी पूर्णरूप फङ्शन आहे.

इत्यादि.

अ हें पद, जर $अक्ष^{0}$ याप्रमाणें मांडिलें, तर तें क्षविषयीं कांहीं **वर्णाचें नाहीं.**

$$\text{पुढील पद्धती, } \frac{अ+\sqrt{ब}\ लाग\cdot क+अ^{2}क^{क्ष}}{म+\sqrt{न}}$$

अ विषयीं अकरणी पूर्णरूप त्रियुक्पद फङ्शन आहे.

म विषयीं अकरणी अपूर्णरूप फङ्शन आहे.

ब विषयीं करणी पूर्ण रूपाचें फङ्शन आहे.

न विषयीं करणी अपूर्ण रूपाचें फङ्शन आहे.

क्ष विषयीं घातमूळप्रकाशक रूपाचें फङ्शन आहे.

क विषयीं लाग्रतमिक् फङ्शन आहे.

अकरणी आणि पूर्णरूपाचीं फङ्शनें यांची रचना बहुतकरून अशी करितात, कीं क्ष चे घात डाव्येकडून उजवेकडे चढतील किंवा उतरतील. जसें, अक्ष+ब−कक्ष² ही पद्धति या रितीनें कधींहि मांडीत नाहीं, परंतु या पुढील दोन रितींतून एकीप्रमाणें मांडितात;

$$-\text{कक्ष}^2+\text{अक्ष}+\text{ब} \quad \text{अथवा} \quad \text{ब}+\text{अक्ष}-\text{कक्ष}^2$$

पहिल्ये पक्षांत क्षचे **उतरत्ये घातानें** रचली, आणि दुसऱ्ये पक्षीं क्षचे **चढत्ये घातानें** रचली असें ह्मणतात.

तर $\text{अ}-\text{बक्ष}^3+\text{कक्ष}-\text{क्ष}^4-\text{क्ष}^3$ ही

या प्रमाणें रचिली पाहिजे $\text{अ}+\text{कक्ष}-(\text{ब}+1)\text{क्ष}^3-\text{क्ष}^4$

अथवा $-\text{क्ष}^4-(\text{ब}+1)\text{क्ष}^3+\text{कक्ष}+\text{अ}$

अकरणी आणि पूर्णरूपाचे फङ्शनांत दुसरीं तशीं फङ्शनें येतात, परंतु त्यांमध्यें पदांची संख्या अनंत असती, यावरून तीं बीज गणितानुरूप किंवा असाधारण फङ्शनें आहेत असें जाणवत नाहीं, ह्मणून अशीं फङ्शनें दुसऱ्या सर्व फङ्शनांपेक्षां फार उपयोगी आहेत. तीं फङ्शनें या पुढील रूपाचीं असतात.

$$\text{अ}+\text{बक्ष}+\text{कक्ष}^2+\cdots\cdots+\text{पक्ष}^{\text{न}-1}+\text{कक्ष}^{\text{न}}$$

यांत अ,ब, आणि क, हीं क्षचीं फङ्शनें नाहींत, आणि न पूर्णांक आहे;

$$\text{अ}+\text{बक्ष}+\text{कक्ष}^2+\text{इक्ष}^3+\cdots+ \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

पद्धतींस अशा जातीचें रूप देणें हा या विषयाचा एक मुख्य प्रकार आहे. वरचे दोन पद्धतींतून पहिलीला **बहुयुक्पद** असें नाव देतां येईल, दुसरीला **अनंतश्रेणी** असें नाव देतां येईल.

व्याख्यानें. बहुयुक्पदांचे गुणाकारांत, कृति करितानां जे वेगळाले गुणाकार उत्पन्न होतात, त्यांस **पोटचे गुणाकार** असें नाव देतां येईल. जसें अ+क्ष यास ब+क्ष याणें गुणिलें, तर अब, अक्ष, बक्ष, आणि क्ष², हे

पोटचे गुणाकार आहेत, ज्यांत क्षचा कोणताहि घात येतो, तें सर्व मिळून बहुयुक्पदाचें पद आहे; जसें, वरचा अ+अक्ष+बक्ष+क्ष^{२} हा गुणाकार चार पदांचा आहे असें ह्मणत नाहीं, परंतु तो तीन पदांचा आहे ह्मणजे अब, (अ+ब) क्ष आणि क्ष^{२}.

सिद्धांत. दोन बहुयुक्पदांचे गुणाकारामध्यें, खरे पोटचे गुणाकार अशीं, कनिष्ट पक्षीं दोन पदें तरीं असलीं पाहिजेत, परंतु तीं दोन किंवा अधिक अशा पोटचा गुणाकारानीं झालेलीं अशीं नसावीं.

मनांत आण कीं अक्ष+बक्ष^{२}+कक्ष^{३} आणि पक्ष^{४}+कक्ष^{५} या दोहोंचा परस्पर गुणाकार करायाचा आहे. तर स्पष्ट आहे कीं कक्ष^{३}×कक्ष^{५} अथवा ककक्ष^{८} यांत जो क्षचा घात येतो त्याचे बरोबर मोठा घात दुसऱ्या कोणत्याहि पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं, आणि अक्ष×पक्ष^{४}, अथवा अपक्ष^{५} यांत जो क्षचा घात येतो, त्याचे बरोबर लहान घात दुसऱ्या कोणत्याहि पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं,कांकीं, या पदांमध्यें घातप्रकाशक चिन्हें अधिक मोठीं किंवा अतिलहान आहेत. यामुळें हीं दोन पदें पोटचे गुणाकारांत असावीं, खरें ह्मटलें तर गुणाकार याप्रमाणें आहे.

अपक्ष^{५}+(अक+बप) क्ष^{६}+(बक+कप) क्ष^{७}+ककक्ष^{८}

यांत चार पदें आहेत, त्यांतून दोन पदें वर सांगीतले केवळ पोटचें गुणाकार आहेत.

बीजगणितांतील आणि अंकगणितांतील भागाकारामध्यें भेद हाच आहे, कीं अंक गणितांतील भागाकारामध्यें कोणताहि पूर्णांक क कांहीं वेळा घेतला असतां, कांहीं पूर्णांक प होईल कीं काय, हा निर्णय करायाचा आहे; बीजगणितामध्यें कोणतेंहि बहुयुक्पद क दुसऱ्या कोणत्याहि बहुयुक्पदानें गुणिल्याने, क्षचें बहुयुक् फङ्शन, प करितां येईल कीं काय, हा शोध करायाचा आहे. उदाहरण, ८क्ष^{३}+१ यास २क्ष+१ याणें भागायाचें, या पुढीलप्रमाणें आहे; ह्मणजे, शक्य असेल तर $\frac{८क्ष^{३}+१}{२क्ष+१}$ यास सरळ बहुयुक्पदाचें रूप द्यावें. हा प्रश्न करण्याची रीति दुसऱ्ये सर्व प्रश्नांस लागू पडेल.

२क्ष+१ यांस अ+बक्ष+कक्ष^{२}+इक्ष^{३}+इत्यादि यांणीं गुणून, शक्य असेल,

तर $८क्ष^३+१$ ही पद्धति उत्पन्न होती असें मनांत आण. आतां पहिल्यानें, $अ+बक्ष+कक्ष^२+इक्ष^३+$ इत्यादि ही पद्धति $कक्ष^२$ याचे वर जाऊं शकत नाहीं; कांकीं, जर ती त्या पदाचे वर जाती, तर $इक्ष^३$ पावेतों जाईल असें मनांत आण. ह्मणून मागल्ये सिद्धांताप्रमाणें, $इक्ष^३×२क्ष$ अथवा $२इक्ष^४$ असें पद गुणाकारांत असावें. परंतु सांगितला गुणाकार $८क्ष^३+१$ आहे, यांत $क्ष^४$ दिसत नाहीं; यामुळें, $इक्ष^३$ आणि त्यापेक्षां मोठा घात इच्छिल्ये बहुयुक् पदांमध्यें नाहीं यामुळें इच्छिलें बहुयुक्पद यारूपाचें आहे

$अ+बक्ष+कक्ष^२$. जर वर सांगितला प्रश्न शक्य असेल, तर याप्रमाणें होईल,

$$८क्ष^३+१=(२क्ष+१)(कक्ष^२+बक्ष+अ)$$

$२क्ष×कक्ष^२$ हें वरचा गुणाकाराचें पद असावें असें सिद्ध केलें; परंतु तें पद $८क्ष^३$च असावें, यामुळें $२क्ष×कक्ष^२=८क्ष^३$, अथवा $कक्ष^२=८क्ष^३÷२क्ष =४क्ष^२$.

यामुळें, $८क्ष^३+१ =(२क्ष+१)\ (४क्ष^२+बक्ष+अ)$

$$=(२क्ष+१)४क्ष^२+(२क्ष+१)\ (बक्ष+अ)$$

$८क्ष^३+१-(२क्ष+१)४क्ष^२$ अथवा $-४क्ष^२+१=(२क्ष+१)(बक्ष+अ)$
$२क्ष×बक्ष$ हें वरचा दुसऱ्या गुणाकाराचें पद असावें; परंतु तें $-४क्ष^२$ मात्र येतें;

यामुळें, $बक्ष=-४क्ष^२÷२क्ष=-२क्ष$ अथवा

$$-४क्ष^२+१=(२क्ष+१)\ (-२क्ष+अ)$$

$$=-२क्ष\ (२क्ष+१)+(२क्ष+१)अ$$

$-४क्ष^२+१+२क्ष\ (२क्ष+१)$ अथवा $(२क्ष+१)=(२क्ष+१)\ अ$

$अ=१$ असें केलें असतां वरचें समीकरण एकरूप करितां येतें; यामुळें, $४क्ष^२-२क्ष+१$ हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे, जागें $२क्ष+१$ गुणिलें असतां, गुणाकार $८क्ष^३+१$ होतो; हें खरें आहे असें कृति केल्यानें दिसेल.

वरचा कृतीची रचना अंकगणितांतील भागाकाराप्रमाणें करितां येईल; परंतु त्यांत इतका मात्र भेद आहे, कीं भाज्य आणि भाजकाचे डाव्येकडील अंक तपासून, भागाकारांत नवें पद काढायाचें याचे जागीं, याप्रमाणें करितात, ह्मणजे, भाज्याचे किंवा वजाबाकीचे डाव्येकडील पद, भाजकानें भागून, भागाकारांत नवें पद होतें. जसें या पुढीलप्रमाणें, जांत एकच प्रश्न दोन निरनिराळ्ये रचनेनें उलगडला आहे.

$$
\begin{array}{ll}
२क्ष+१)८क्ष^३+१(४क्ष^२-२क्ष+१ & १+२क्ष)१+८क्ष^३(१-२क्ष+४क्ष^२ \\
\quad ८क्ष^३+४क्ष^२ & \quad १+२क्ष \\
\quad -४क्ष^२+१ & \quad -२क्ष+८क्ष^३ \\
\quad -४क्ष^२-२क्ष & \quad -२क्ष-४क्ष^२ \\
\quad\quad +२क्ष+१ & \quad\quad ४क्ष^२+८क्ष^३ \\
\quad\quad २क्ष+१ & \quad\quad ४क्ष^२+८क्ष^३ \\
\quad\quad\quad ० & \quad\quad\quad ०
\end{array}
$$

क्षचे चढते किंवा उतरते घातांप्रमाणें पदांची रचना संभाळून मांडिली पाहिजे. या कृतीची साधारण रीति या पुढीलप्रमाणें आहे;

अकरणी बहुयुक्पदांची बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार हीं अकरणी बहुयुक्पदें आहेत हें स्पष्ट आहे. दोन अकरणी बहुयुक्पदें दाखवायासाठीं प आणि क घे, यापासून वि काढायाची इच्छा आहे, अशा तऱ्हेनें, कीं प=कवि असें होईल. यांत प भाज्य आहे, क भाजक आहे, आणि जो भागाकार काढायाचा आहे तो वि आहे. सोयीप्रमाणें कोणतेंहि बहुयुक् किंवा एकाकी पद दाखविण्यासाठीं अ घे, त्यास कनें गुण, आणि तो गुणाकार पतून वजा कर, ह्मणजे असें करून प−अक होईल. या पद्धतीस र ह्मण, यावरून

प−अक=र . . . . (१)

कोणतेंहि दुसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ' घे; नंतर प चे जागीं

र मांडून त्याशीं आणि कशीं वरची कृति पुनः कर. त्याचें उत्तर दाखविण्यासाठीं र' घे. तर

$$\text{र}-\text{अ}'\text{क}=\text{र}' \quad \ldots\ldots (२)$$

कोणतेंहि तिसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ'' घे, तर

$$\text{र}'-\text{अ}''\text{क}=\text{र}'' \quad \ldots\ldots (३)$$

कृतीचे प्रत्येक क्रमांत वजाबाकीला सोपें रूप द्यावें, असें कीं शेवटीं त्या वजाबाकीचें असें रूप व्हावें, कीं त्यावरून या पुढील दोन गोष्टीं-तून एकतरी लक्षांत यावी ; ह्मणजे पुढील बाकी ० होण्यास नवें बहु-युक्पद कसें काढावें, अथवा असें बहुयुक्पद काढण्यास अशक्य आहे कीं काय. ज्याचा योगानें वजाबाकी ० होईल, असें अ''' नवें बहुयुक्पद किं-वा एकाकी पद काढितां येतें, अशी पहिल्यानें कल्पना कर. तर

$$\text{र}''-\text{अ}'''\text{क}=० \quad \ldots\ldots (४)$$

तर, वरचे वेगळाले समीकरणांपासून, याप्रमाणें होतें,

$$\text{प}=\text{अक}+\text{र}=\text{अक}+\text{अ}'\text{क}+\text{र}'=\text{अक}+\text{अ}'\text{क}+\text{अ}''\text{क}+\text{र}''$$
$$=\text{अक}+\text{अ}'\text{क}+\text{अ}''\text{क}+\text{अ}'''\text{क}=\text{क}(\text{अ}+\text{अ}'+\text{अ}''+\text{अ}''')$$

तर $\text{अ}+\text{अ}'+\text{अ}''+\text{अ}'''$ हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे. (४) या अंकाचे समीकरणाचे जागीं हें पुढील समीकरण होतें,

$$\text{र}''-\text{अ}'''\text{क}=\text{र}'''$$

आणि मनांत आण कीं कृति पुढें चालविणें अनुपयोगी आहे हें स्पष्ट दिसतें. तर याप्रमाणें होईल,

$$प = अक + अ'क + अ''क + अ'''क + र'''$$

$$(\div)क \quad \frac{प}{क} = अ + अ' + अ'' + अ''' + \frac{र'''}{क}$$

= अकरणी बहुयुक्पद + {एक अपूर्णांक ज्याचें रूप $\frac{प}{क}$ यापेक्षां अति-सरळ.

उदाहरण. $\frac{क्ष^{४}+१}{क्ष^{२}+२क्ष}$ यास अधिक सरळरूप दे.

$प = क्ष^{४}+१$ $\qquad$ $क = क्ष^{२}+२क्ष$

$$क्ष^{२}+२क्ष)क्ष^{४}+१(अ = \frac{क्ष^{४}}{क्ष^{२}} = क्ष^{३}$$

$$\underline{क्ष^{४}+२क्ष^{४} = अक}$$

$$-२क्ष^{४}+१ = र, \quad अ' = \frac{-२क्ष^{४}}{क्ष^{२}} = -२क्ष^{२}$$

$$\underline{-२क्ष^{४}-४क्ष^{३} = अ'क}$$

$$४क्ष^{३}+१ = र', \quad अ'' = \frac{४क्ष^{३}}{क्ष^{२}} = ४क्ष$$

$$\underline{४क्ष^{३}+८क्ष^{२} = अ''क}$$

$$-८क्ष^{२}+१ = र'', \quad अ''' = -\frac{८क्ष^{२}}{क्ष^{२}} = -८$$

$$\underline{-८क्ष^{२}-१६क्ष = अ'''क}$$

$$१६क्ष+१ = र'''$$

ही कृति पुढें चालविणें उपयोगी नाहीं, तर याप्रमाणें आहे.

$$\frac{क्ष^{४}+१}{क्ष^{२}+२क्ष} = क्ष^{३}-२क्ष^{२}+४क्ष-८+\frac{१६क्ष+१}{क्ष^{२}+२क्ष}$$

वरचे गोष्टीवरून, हा पुढील सिद्धांत निघतो, आणि बहुतकरून तो गणितांमध्यें फार उपयोगी पडतो.

जर प आणि क हीं दोन अकरणी बहुयुक्पदें असतील, आणि जर त्यांतून प चा घात मोठा असेल, तर $\frac{प}{क}$ यास ग + $\frac{ह}{क}$ हें रूप देतां येईल, यांत ग आणि ह अकरणी बहुयुक्पदें आहेत, आणि कपेक्षां ह एक किमतीनें तरी कमी आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरण. वरचा कृतींत, वजाबाक्या कामांत आणण्याचे पूर्वीं जर त्या ब, ब', ब'', इत्यादि यांणीं वेगवेगळ्या गुणिल्या, तर याप्रमाणें होईल,

$$\frac{प}{क} = अ + \frac{अ'}{ब} + \frac{अ''}{बब'} + \frac{अ'''}{बब'ब''} + \frac{र'''}{बब'ब''क}$$

वरची कृति अनंत वेगवेगळ्या तऱ्हेनें कामांत आणितां येती; कां कीं जरी केवळ वरचे उदाहरणाप्रमाणें ती रीति कामांत आणायास सोईवार पडती, तथापि तर्कांमध्यें प, क, अ, अ', इत्यादि हीं कोणतींहि परिमाणें असतील, असें मानितां येईल. जसें या पुढील उदाहरणांत

प = १ क = १+क्ष असें घे,

$$\begin{array}{l} १+क्ष)\ १\ (अ = क्ष \text{ असें मनांत आण.} \\ \quad\ \ क्ष+क्ष^{२} \\ \hline \quad १-क्ष-क्ष^{२} = र, \quad अ' = क्ष^{२} \text{ घे,} \\ \quad\ \ क्ष^{२}+क्ष^{३} \\ \hline १-क्ष-२क्ष^{२}-क्ष^{३} \end{array}$$

$$\frac{प}{क} = \frac{१}{१+क्ष} = क्ष+क्ष^{२} + \frac{१-क्ष-२क्ष^{२}-क्ष^{३}}{१+क्ष}$$

परंतु बहुतेक पक्षांत ही कृति अपूर्णांकांची मेळवणी आणि वजाबाकी करण्याची मनःकल्पित रीति मात्र आहे. जेव्हां भाज्याचे डाव्ये-

कडचें पद भाजकाचे डाव्येकडचे पदानें भागून, भागाकाराचीं पदें काढितात अशी चाल आहे, तेव्हां अशा उलगडण्याचे रितीपासून उत्तर बहुतकरून प्रमाणरूप आणि उपयोगी असतें. ह्मणजे, या पुढील-प्रमाणें उत्तरें निघतात;

$$\frac{१}{१+क्ष} = १-क्ष+क्ष^{२}-क्ष^{३}+क्ष^{४}-\frac{क्ष^{५}}{१+क्ष}$$

$$\frac{१}{१-क्ष} = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+\frac{क्ष^{४}}{१-क्ष}$$

$$\frac{१}{क्ष+१} = \frac{१}{क्ष}-\frac{१}{क्ष^{२}}+\frac{१}{क्ष^{३}}-\frac{१}{क्ष^{४}}+\frac{१}{क्ष^{४}} \cdot \frac{१}{क्ष+१}$$

$$\frac{१}{१-२क्ष+क्ष^{२}} = १+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+\frac{५क्ष^{४}-४क्ष^{५}}{१-२क्ष+क्ष^{२}}$$

वरचा कोणत्याहि श्रेणीचीं पदें अनियत वाढविलीं असतां, नियततेजवळ पोंचतील कीं नाहीं हें वरचे रितीपासून कळेल. ह्मणजे, हें पहाण्यांत येतें, कीं

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+\cdots\cdots+क्ष^{न}\cdots\cdots \quad (अ)$$

यास $\frac{क्ष^{न+१}}{१-क्ष}$ हें मिळविल्यानें $\frac{१}{१-क्ष}$ होतो. २७६ **पृष्ठाप्रमाणें** जेव्हां १ पेक्षां क्ष लहान आहे, आणि जसा न अनियत वाढत जातो, तसा $क्ष^{न+१}$ अनियत घटत जातो, तेव्हां (अ) चें सर्वधन २७७ **पृष्ठाप्रमाणें** $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे जवळ जवळ निरंतर येत जातें.

सद्यः प अकरणी बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं (प) घे, आणि (प) +(क) = (प+क), यापासून असें समजावें, कीं प आणि क अकरणी बहुयुक्पदें आहेत, यावरून त्यांची बेरीज अकरणी बहुयुक्पद आहे. तर **सर्वदां** याप्रमाणें होतें;

$(प)+(क) = (प+क)$, $\qquad (प)-(क) = (प-क)$

$(प)\times(क) = (पक)$; आणि कांहीं विशेष पक्षांत $\frac{(प)}{(क)} = \left(\frac{प}{क}\right)$

(प) यास जें प्रत्येक बहुयुक्पद निःशेष भागितें त्यास पचा **गुण्य किंवा गुणक** ह्मणतात; ह्मणजे, $क्ष^2-१=(क्ष+१)(क्ष-१)$, ह्मणून $क्ष+१$ आणि $क्ष-१$ या पद्धती $क्ष^2-१$ हिचे गुण्य आणि गुणक आहेत. २९३ पृष्ठावरून स्पष्ट आहे.

१. ज्या बहुयुक्पदांमध्यें मोठा घात आहे, त्या घातापेक्षां त्या पदांचे गुण्यगुणकांमध्यें त्याहून मोठा घात होऊं शकत नाहीं.

२. जर बहुयुक्पदाचा घात म असेल, आणि जर त्याचा गुण्य किंवा गुणक यांतून एकाचा घात प असेल, तर बाकी राहिल्या पदाचा घात म–प असावा.

जसें या पुढील उदाहरणांत

$$क्ष^4-१=(क्ष-१)(क्ष^3+क्ष^2+क्ष+१)$$

$$=(क्ष^2-१)(क्ष^2+१)$$

वरचें बहुयुक्पद चवथ्या वर्णाचें आहे, एक पक्षीं त्याचे गुण्यगुणक पहिल्या वर्णाचे आणि तिसऱ्या वर्णाचे आहेत, (१+३=४), आणि दुसऱ्या पक्षीं त्याचे गुण्यगुणक दुसऱ्या आणि दुसऱ्या वर्णाचे आहेत, (२+२=४).

आतां जी गोष्ट पुढें सांगतों ती केवळ अकरणी बहुयुक्पदांविषयीं आहे, आणि निःशेष भागाकार या शब्दापासून असें समजावें, कीं भागाकार केल्यानें कांहीं शेष रहात नाहीं. पूर्वीं सांगितलेल्या गोष्टींवरून हे पुढील सिद्धांत स्पष्ट निघतात.

१. भाज्याचा वर्ण भाजकाचे वर्णाबरोबर तरी नसला, तर निःशेष भागाकार होणें अशक्य आहे.

२. जेव्हां भाज्याचा वर्ण भाजकाचे वर्णापेक्षां मोठा आहे, आणि जर निःशेष भागाकार होण्यास अशक्य आहे, तर बाकीचा वर्ण भाज्य आणि भाजकाचे वर्णांहून लहान असतो.

३. जर भाज्याचा वर्ण म असेल, आणि भाजकाचा वर्ण न असेल, तर भागाकाराचा वर्ण (म–न) होईल, बाकीचा वर्ण (न–१) यापेक्षां मोठा असणार नाहीं. कांकीं जोंपर्यंत बाकीचा वर्ण भाजकाचे वर्णाचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां मोठा आहे, तोंपर्यंत कृति पुढें चालेल.

४. भाज्य प, भाजक क, भागाकार अ, आणि बाकी र असे असतील, तर

$$प = अक + र \quad अथवा \quad \frac{प}{क} = अ + \frac{र}{क}$$

५. म आणि न यांस जें परिमाण निःशेष भागितें, तें परिमाण त्यांची बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार यांसहि पूर्ण भागितें. भाजक दाखविण्यासाठीं ज्ञ घे; तर

$$\frac{म}{ज्ञ} = (अ) \quad \frac{न}{ज्ञ} = (ब) \quad \frac{म+न}{ज्ञ} = (अ+ब)$$

$$\frac{म-न}{ज्ञ} = (अ-ब) \quad \frac{मन}{ज्ञ} = अबज्ञ = (अबज्ञ)$$

६. चवथ्या सिद्धांतामध्यें जें परिमाण प आणि क यांस निःशेष भागितें, तें परिमाण रलाहि पूर्ण भागितें, आणि क आणि र यांचा प्रत्येक भाजक प, इत्यादि यांसहि निःशेष भागितो, ह्मणजे त्या तिहींतून दोहोंस निःशेष भागून, तिसऱ्यास निःशेष भागित नाहीं, असा कोणताहि भाजक नाहीं.

उदाहरण, प आणि क यांस ज्ञ निःशेष भागितो असें मनांत आण, तर

$\frac{प}{ज्ञ}$ हा भागाकार निःशेष आहे, अथवा $= \left(\frac{प}{ज्ञ}\right) \quad \frac{क}{ज्ञ} = \left(\frac{क}{ज्ञ}\right)$

$अ \times \left(\frac{क}{ज्ञ}\right) = \left(\frac{अक}{ज्ञ}\right)$ यामुळें $\left(\frac{प}{ज्ञ}\right) - \left(\frac{अक}{ज्ञ}\right) = \left(\frac{प}{ज्ञ} - \frac{अक}{ज्ञ}\right)$

$= \left(\frac{प-अक}{ज्ञ}\right)$; परंतु ही पद्धति $\frac{र}{ज्ञ}$ चे बरोबर आहे, यामुळें ही निःशेष आहे, ह्मणजे र हा ज्ञ यानें निःशेष भागिला जातो. तशाच तर्कानें बाकीचे दुसरे दोन पक्ष सिद्ध होतात.

७. प आणि क यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक आहे, तो क आणि र यांचाहि अति मोठा साधारण भाजक आहे.

८. जर कोणत्याहि गुणाकाराचे गुण्य आणि गुणक यांतून एक पद क्षनें भागिलें जात नाहीं, तर क्षचे जे घात दुसऱ्या पदास निःशेष भागितात, ते घात मात्र त्या पदांचे गुणाकारास निःशेष भागितील.

उदाहरण, (क्ष^{२}+अ)(क्ष^{३}+६क्ष^{२}) यांचे गुणाकारांत ६ अक्ष^{२} हें अतिलहान पद आहे, आणि जा पेक्षां कोणत्याहि पद्धतींतील अति लहान पदांत जो क्षचा घात असतो, त्याहून क्षचा मोठा घात त्या पद्धतीस निःशेष भागित नाहीं, यामुळें या उदाहरणांत क्ष^{२} हा क्षचा अति मोठा घात आहे, जाणें वरचा गुणाकार निःशेष भागिला जातो. परंतु क्ष^{३}+६क्ष^{२} यास निःशेष भागायासाठीं क्ष^{२} हा अति मोठा घात आहे.

९. जर कोणतीहि पद्धति क्षचा कोणत्याहि घातानें निःशेष भागिली जाती, तर त्या पद्धतीचा कोणताहि दुसरा भाजक जो, क्षचा कोणत्याहि घातानें निःशेष भागिला जात नाहीं, अशा भाजकानें, त्या पद्धतीस क्षचा कोणत्याहि घातानें भागून आलेला भागाकार निःशेष भागिला जाईल.

उदाहरण, क्ष^{३}–क्ष यास क्ष याणें भागिलें, तर क्ष^{२}–१ होतो; क्ष–१ त्या पद्धतीचा निःशेष भाजक आहे, आणि, यामुळें, जरी ठाऊक नसलें, तरी तो क्ष^{२}–१ या भागाकाराचा निःशेष भाजक आहे.

हा सिद्धांत सिद्ध करण्यासाठीं क्ष^{३}प ही पद्धति घे, आणि जी क्ष+१ याणें भागिली जाईल; ह्मणजे पुढीलप्रमाणें होतें असें मनांत आण,

$$\frac{(\text{क्ष}^{३}\text{प})}{\text{क्ष}+१} = (\text{अ}) \qquad \text{क्ष}^{३}(\text{प}) = (\text{अ})(\text{क्ष}+१)$$

यामुळें (८) प्रमाणें क्ष^{३} याणें (अ) निःशेष भागिला जातो;

अथवा $\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}^{३}} = (\text{ब})$ ह्मणजे $(\text{अ}) - \text{क्ष}^{३}(\text{ब})$

यामुळें $\text{क्ष}^{३}(\text{प}) = \text{क्ष}^{३}(\text{ब})(\text{क्ष}+१)$

$$(\text{प}) = (\text{ब})(\text{क्ष}+१) \text{ अथवा } \frac{\text{प}}{\text{क्ष}+१} = (\text{ब})$$

ह्मणजे, प आणि क्ष^{३} प हीं दोन्हीं क्ष+१ यांणीं निःशेष भागिलीं जातात, आणि क्ष^{३} प याचे दुसऱ्या कोणत्याहि भाजकाविषयीं तसेंच दाखवितां येईल.

आतां दोन अंकरणी बहुयुक्पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढण्याची रीति, अंकगणितामध्यें दोन पूर्णांकांचा दृढ भाजक काढ-

ण्याचा रीतिप्रमाणेंच आहे. उदाहरण, क्ष^{६}–क्ष आणि ३क्ष^{८}–३क्ष^{४} यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढ. पहिल्यानें त्या दोन पद्धतींतून एकाकी पदांचा गुण्य किंवा गुणक निराळा कर; ह्मणजे त्यास हें पुढील रूप दे,

क्ष(क्ष^{५}–१) आणि ३क्ष^{४}(क्ष^{४}–१)

सद्यः एकाकी पदाचा गुणक सोडून, या पुढील पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढ,

क्ष^{५}–१=प आणि क्ष^{४}–१=क असें घे,

क्ष^{४}–१) क्ष^{५}–१ (क्ष

क्ष^{५}–क्ष

र बाकी = क्ष–१) क्ष^{४}–१ (क्ष^{३}+क्ष^{२}+क्ष+१

र वाकी = ०

७ व्या सिद्धांताप्रमाणें क्ष^{५}–१ आणि क्ष^{४}–१ यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक, तोच क्ष^{४}–१ आणि क्ष–१ यांचाहि अति मोठा साधारण भाजक आहे; क्ष–१ ह्या पद्धतीचा अति मोठा साधारण भाजक तीच पद्धति आहे, आणि ती क्ष^{४}–१ हिला निःशेष भागिती, तर त्या दोन शेवटील पद्धतींचा अति मोठा साधारण भाजक आहे, यामुळें क्ष–१ ही क्ष^{५}–१ आणि क्ष^{४}–१ यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे. वर सांगीतल्या दोन मूळ पद्धतींचा भाजक क्ष आहे; यामुळें, क्ष (क्ष–१) ही पद्धति त्यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे.

९ व्या सिद्धांताप्रमाणें वजाबाकींतून भागाकारानें क्षचा कोणताहि घात नाहींसा करितां येईल. उदाहरण, १–क्ष^{३} आणि १–क्ष^{५} यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढितानां, क्ष^{३}–क्ष^{५} अथवा क्ष^{३}(१–क्ष^{२}) ही पहिली वजाबाकी आहे; परंतु जा भाजकामध्यें क्षचे घात आहेत, त्याखेरीज क्ष^{३}–क्ष^{५} यांचे जे सगळे निःशेष भाजक आहेत, त्यांणीं १–क्ष^{२} निःशेष भागिला जाईल. परंतु १–क्ष^{५} आणि १–क्ष^{३} या दोन्ही पद्धती क्षचा कोणत्याहि घातानें भागिल्या जात नाहींत; यामुळें त्यांचे सगळे साधारण भाजक १–क्ष^{२} यामध्यें आहेत, आणि क्ष^{३}–क्ष^{५} या-

मध्यें ते सर्व आहेत, तर कोणत्याहि भागाकारांत $क्ष^3-क्ष^5$ हिचे जागीं $१-क्ष^2$ ही पद्धति कामांत घेतां येईल.

भाजकास नव्या भाज्याचे स्थळीं घेतल्याचे पूर्वीं, सोईस पडेल तितक्या वेळा घ्यावा, उदाहरण, $क्ष^2-२क्ष+१$ आणि $क्ष^3-१$ यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढिल्यानें, २क्ष–क्ष–१ ही पहिली वजाबाकी आहे; हिणे भागिल्याचे पूर्वीं, $क्ष^2-२क्ष+१$ यास २नीं गुणायास सोईस पडेल, ह्मणजे तेणेंकरून कांहीं नवा **साधारण** भाजक कृतीमध्यें येत नाहीं. अशे पक्षांमध्यें सगळी कृति या पुढीलप्रमाणें आहे, ही तरी अति संक्षेप कृति नाहीं. परंतु कठीण पक्षांस जा रिती लागू होतील, त्या या उदाहरणापासून उघड समजतील.

$क्ष^2-२क्ष+१)\,क्ष^3-१\,(क्ष$

$क्ष^3-२क्ष^2+क्ष$

$२क्ष^2-क्ष-१\;)\,२क्ष^2-४क्ष+२\,(१$

$२क्ष^2-क्ष-१$

$-३क्ष+३$

$(\div)\;-३ \qquad क्ष-१)\,२क्ष^2-क्ष-१\,(२क्ष+१$

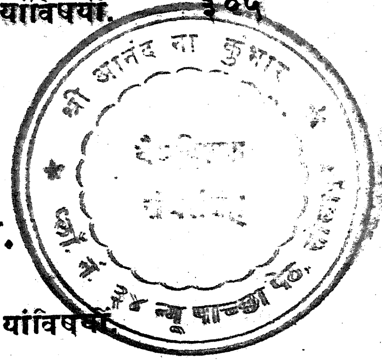
$२क्ष^2-२क्ष$

$क्ष-१$

$क्ष-१$

०

यामुळें क्ष–१ अति मोठा साधारण भाजक आहे.



आठवा अध्याय.

श्रेणी आणि अनियमित गुणक यांविषयीं.

१ पेक्षां क्ष कमी असेल, तर

$$१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+क्ष^४+ \text{ इत्यादि,}$$

ही श्रेणी किती पुढें चालविली, तरी पदांची बेरीज १÷(१–क्ष) यापेक्षां अधिक किंवा याचे बरोबर कधीं होणार नाहीं. असें **२७७ पृष्ठावर** पाहिलें. या पद्धतीस अनंतश्रेणी ह्मणतात, **२७७ वे पृष्ठाप्रमाणें**, १÷(१–क्ष) ह्या अपूर्णांकास त्या बेरिजेची **नियतता** ह्मटली आहे, परंतु एथे त्यास **सर्वधन** असें नांव दिलें आहे.

व्याख्यान. श्रेणीचीं पदें एकापुढें एक निरंतर मिळविली असतां जा नियततेचे जवळ जवळ जातात, त्या नियततेस **अनंतश्रेणीचें सर्वधन** ह्मणतात.

जा श्रेणींस वर सांगीतलेल्याप्रमाणें नियतता असती, ह्मणजे तिचीं पदें मिळविल्यानें इच्छेप्रमाणें मोठी संख्या सांपडूं शकत नाहीं, तीस **उतरती** श्रेणी ह्मणतात; श्रेणीचीं पदें मिळविल्यानें जें परिमाण होतें, त्याला जेव्हां कांहीं नियतता नसती, त्या श्रेणीस **चढती** श्रेणी ह्मणतात. या पुढील श्रेण्यांतून शेवटील श्रेणीशिवाय बाकीचा चढत्या आहेत, असें स्पष्ट दिसतें.

$१+१+१+१+$ इत्यादि. $१+२+३+४+$ इत्यादि.

$१+२+४+८+$ इत्यादि. $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि.

अनंतश्रेणीमध्यें, प्रत्येक पदाचा त्याचा पुढल्या पदाशीं जो संबंध असतो, तो ठाऊक असला पाहिजे, नाहीं तर त्या श्रेणीविषयीं कांहीं तर्क करितां येणार नाहीं. श्रेणीचीं सर्व पदें मांडितां येत नाहीं, कांकीं

जी श्रेणी मनांत असती तिचा जवळ जवळचे पदांचा संबंध कळल्यानें मात्र ती श्रेणी कोणत्या तऱ्हेची आहे, हें माहीत होतें. ह्मणजे पदांमधल्या **संबंधाचा कांहीं नियम** नाहीं अशी श्रेणी तर्क करण्यांत येत नाहीं.

जेव्हां पहिलीं चार किंवा पांच पदें दिलीं असतात, आणि त्यां मधला संबंध ठाऊक असतो, तेव्हां पदांचा नेम प्रत्यक्ष कळतो, असें कदाचित् शिकणाराचा मनांत येईल. उदाहरण.

१+१+१+१+१+१+१+१+१+ इत्यादि.

या श्रेणीचा दिलेल्या पदांमध्यें जो नियम आहे, त्याप्रमाणें ती श्रेणी पुढें चालविली असतां तींत अनुक्रमानें एकं मिळवायाचे आहेत, असें त्याचे मनांत येईल. परंतु ही कल्पना खरी नाहीं; कां कीं वरची श्रेणी अनंत वेगळाल्या तऱ्हानीं पुढें चालेल. आणि दिलेलीं पदें जशीं आहेत त्यांमध्यें जो संबंध आहे, तो संबंध त्या प्रत्येक तऱ्हेमध्यें असतो. ह्मणजे, वरची श्रेणी या पुढीलप्रमाणें चालेल;

९ वें पद.	१० वें.	११ वें	१२ वें.	१३ वें.	१४ वें.	१५ वें.	१६ वें.
१	१	२	३	४	५	७	१० इत्यादि.

हिचा नेम हाच आहे, कीं पहिल्या न पदांचे बेरिजेचा दशमस्थळीं जो अंक येतो, तितक्यानें न पदापेक्षां (न+१) हें पद अधिक असतें, ह्मणजे जोंपर्यंत पदांचा बेरिजेचे दशमस्थळीं एक अंक वाढे, तोंपर्यंत तीं सर्व पदें एकसारिखींच असावीं. या पुढील श्रेणीचे पदांतले नेम शिकणाराने काढून दाखवावे.

७ १६ २२ २६ ३२ ३६ ४२ अनंत पावेतों.

५ १० ९ १० ९ १० ९ अनंत पावेतों.

५ १० ११ १५ २१ ३० ३९ ४३ ५२ ६१ ७०
७९ ८५ ९४ १०३ १०९ १०९ १०९ अनंत पावेतों.

कांहीं विशेष पक्षांपासून साधारण प्रतिज्ञांचें अनुमान काढायास जर यत्न केला, ह्मणजे, कांहीं थोड्या पदांपासून श्रेणीचे नेमाचें अनुमान करण्यास यत्न केला, तर कदाचित् चुक होईल. जो नेम दिसण्यांत

येतो तो नेहेमी खरा आहे किंवा नाहीं, हें कांहीं थोडे पक्ष पहाण्याने मात्र काढितां येतें. परंतु जो नियम श्रेणीचे पदांमध्यें असावा असें वाटतें, तो नेम तपासल्यानंतर खरा नाहीं असें दृष्टीस येतें; जसें या पुढील प्रमाणे या पुढील अंकांची श्रेणी घे, ह्मणजे, १,२,३,४,५, इत्यादि, प्रत्येक अंक त्याचे जवळचा मोठ्या अंकानें गुण, आणि त्या गुणाकारास ४१ मिळीव, पुढीलप्रमाणें;

$१\times२+४१=४३$	$५\times६+४१=७१$
$२\times३+४१=४७$	$६\times७+४१=८३$
$३\times४+४१=५३$	$७\times८+४१=९७$
$४\times५+४१=६१$	$८\times९+४१=११३$, इत्यादि.

असें करून याप्रमाणें वेगळालीं पदें निघतात, असें दिसतें;

४३, ४७, ५३, ६१, ७१, ८३, ९७, ११३, इत्यादि.

यांत असें दिसतें, कीं सगळीं पदें **प्रैम*** ह्मणजे **अविभाज्य** अंक आहेत, आणि श्रेणीचीं पदें पुढें या नेमानेंच चालतील, अशी कल्पना करायास वरचे गोष्टीवरून संभव होतो; ह्मणजे ही पुढील गोष्ट खरी आहे अशी कल्पना करितां येती; जर क्ष कोणताहि पूर्णांक असेल, तर क्ष (क्ष+१) +४१ हा प्रैम अंक असावा. आणि श्रेणीचीं पुढचीं पदें ३९×४०+४१ अथवा १६०१, यापावेतों चालविलीं असतां तीं सर्व पदें प्रैम अंकाशिवाय दुसरीं कांहीं नाहींत. तथापि, याचे पुढचें पद, अथवा ४०×४१+४१ हा प्रैम अंक नाहीं असें स्पष्ट दिसतें; कां कीं तो अंक याप्रमाणें आहे, (४०+१)४१, अथवा ४१×४१.

एकादे श्रेणीचा नियम सांगण्याची गरज वारंवार पडती, ती अडचण चुकविण्याबदल, यापुढें असें समजावें, कीं जीं कांहीं श्रेणीचीं पहिलीं पदें येतील, त्या पदांविषयीं जर दुसरा कांहीं नियम सांगितला नसेल,

*प्रैम अंक ह्मणजे, जो त्याणेंच किंवा १ याणें मात्र निःशेष भागिला जातो, याशिवाय दुसऱ्या कोणत्याहि अंकानें निःशेष भागिला जात नाहीं. प्रैम अंकांचा श्रेणी या पुढीलप्रमाणें आहे,

१, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, इत्यादि.

तर त्या पदांत जो साधारण नियम दृष्टीस पडतो, तो त्या श्रेणीचा नियम आहे. जसें $१+क्ष+क्ष^२+$ इत्यादि यांपासून असें समजतें, कीं या श्रेणीचीं पुढील पदें $क्ष^३+क्ष^४+क्ष^५+$ इत्यादि आहेत.

व्याख्यान. श्रेणीचें **साधारण पद** ह्मणजे त्या श्रेणीचे न पदाची बीजगणितरूप पद्धति आहे, असें पुढील उदाहरणांवरून समजेल.

श्रेणीचीं पहिलीं कांहीं थोडीं पदें.	न पद, अथवा साधारण पद.
$१+१+१+१+$ इत्यादि.	१
$१+२+३+४+$ इत्यादि.	$न$
$२+३+४+५+$ इत्यादि.	$न+१$
$०+१+२+३+$ इत्यादि.	$न-१$
$१+४+९+१६+$ इत्यादि.	$न^२$
$४+९+१६+२५+$ इत्यादि.	$(न+१)^२$
$क्ष+क्ष^२+क्ष^३+क्ष^४+$ इत्यादि.	$क्ष^न$
$१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+$ इत्यादि.	$क्ष^{न-१}$
$क्ष^म+क्ष^{म+१}+क्ष^{म+२}+क्ष^{म+३}+$ इत्यादि.	$क्ष^{म+न-१}$
$१+\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष^२}{३}+\frac{क्ष^३}{४}+$ इत्यादि.	$\frac{क्ष^{न-१}}{न}$
$१+क्ष+\frac{क्ष^२}{२}+\frac{क्ष^३}{२\cdot३}+$ इत्यादि.	$\frac{क्ष^{न-१}}{१\cdot२\cdot३\cdots(न-१)}$

या शेवटील श्रेणींत पहिलें पद दिलें आहे, असें साधारण पदांमध्यें येत नाहीं. कां कीं जर न=१. तर साधारण पदाचें रूप याप्रमाणें होतें. $\frac{क्ष^{१-१}}{०}$ अथवा $\frac{१}{०}$, परंतु हें रूप खरें नाहीं, खरें ह्मटलें असतां साधारण पद या पुढील गुणाकारांतील, न गुण्य किंवा गुणक यांचा गुणाकार आहे;

$$१\times\frac{क्ष}{१}\times\frac{क्ष}{२}\times\frac{क्ष}{३}\times\frac{क्ष}{४}\cdots\cdots\cdots$$

सिद्धांत. अ+ब+क+इ+फ+ इत्यादि ही श्रेणी या पुढील सारिखी आहे ;

$$\text{अ}\left\{\text{१}+\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{\text{कब}}{\text{बअ}}+\frac{\text{इकब}}{\text{कबअ}}+\frac{\text{फइकब}}{\text{इकबअ}}+\text{ इत्यादि}\right\}$$

ही गोष्ट सिद्ध करायास शिकणारास अवघड पडणार नाहीं. प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाशीं जें प्रमाण* ठेवितें तें दाखविण्यासाठीं, अंशस्थळीं जें अक्षर असतें तें मोठ्या रूपानें लिही.

$$\frac{\text{ब}}{\text{अ}}=\textbf{ब},\quad \frac{\text{क}}{\text{ब}}=\textbf{क},\quad \frac{\text{इ}}{\text{क}}=\textbf{इ},\quad \frac{\text{फ}}{\text{इ}}=\textbf{फ}\text{ इत्यादि.}$$

तर अ+ब+क+इ+फ+ इत्यादि या पुढील प्रमाणें होईल,

$$\text{अ}\left\{\text{१}+\textbf{ब}+\textbf{कब}+\textbf{इकब}+\textbf{फइकब}+\text{ इत्यादि}\right. \cdots\cdots\cdots (\text{१})$$

ब, **क**, **इ**, **फ**, जर हीं प्रत्येक प्रमाणें कांहीं **प** या सांगीतल्या परिमाणापेक्षां लहान असतील, तर

अ(१+**ब**) ही अ (१+**प**) यापेक्षां लहान होईल,

अ(१+**ब**+**कब**) ही अ(१+**प**+**पप**) यापेक्षां लहान होईल,

इत्यादि.

अथवा (१) या श्रेणीचे कितीहि पदांचें सर्वधन, या पुढील श्रेणीचे तितक्येच पदांचे सर्वधनापेक्षां कमी होईल,

$$\text{अ}(\text{१}+\textbf{प}+\textbf{प}^{2}+\textbf{प}^{3}+\text{ इत्यादि})\cdots\cdots\cdots (\text{२})$$

तेव्हां, जर **प** एकापेक्षां लहान असेल, तर (१) ही उतरती श्रेणी

* जें प्रमाण अ हा बशीं ठेवितो, तें दाखविण्यासाठीं $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ असें बीजरूपानें मांडितात.

असावी; कां कीं $१+प+प^२+$ इत्यादि कितीहि पदें घेतलीं, तरी १÷(१–प) यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहींं, यामुळें, (२) या श्रेणीचीं कितीहि पदें घेतलीं, तरी अ÷(१–प) यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहींं; (२) या श्रेणीचे वेगवेगळ्ये पदांपेक्षां (१) या श्रेणीचीं वेगवेगळीं पदें लहान आहेत, यामुळें हिचीं कितीहि पदें घेतलीं, तरी अ÷(१–प) हिजपेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहींत.

यामुळें कोणतेंहि पद त्याचे पूर्वीचे पदाशीं जें प्रमाण ठेवितें, तें प्रमाण जर एकापेक्षां लहान अशा परिमाणाहून लहान असेल, तेव्हां ती श्रेणी उतरती असती. श्रेणीचीं कांहीं पदें टाकून त्यांचे पुढल्ये पदांत वरची गोष्ट घडती, इतकें मात्र एथें सुचवितों; कां कीं, एकाद्ये श्रेणीचीं पहिलीं शंभर पदें वाढत जातात असें मनांत आण, तथापि शंभराव्या पदानंतरचे कितीहि पदांचे सर्वधनापासून, असें मनांत आण, कीं ५० यापेक्षां मोठें उत्तर येत नाहीं, आणि पहिल्ये शंभर पदांचें सर्वधन १००० आहे असें ह्मण, तर १०५० यापेक्षां मोठें उत्तर कोणत्याहि सर्वधनापासून निघणार नाहीं, ह्मणून अशी श्रेणी साधारण रूपानें पाहिली असतां उतरती आहे, अथवा खरें ह्मटलें असतां ती श्रेणी शंभराव्या पदानंतर उतरूं लागती.

उदाहरण. $१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{२\cdot३\cdot४}+$ इत्यादि

ही श्रेणी उतरती आहे. कां कीं यांत

$\frac{ब}{अ}=१,\ \frac{क}{ब}=\frac{१}{२},\ \frac{ड}{क}=\frac{१}{३},\ \frac{फ}{ड}=\frac{१}{४},$ इत्यादि.

ह्मणून दुसऱ्या गुणोत्तरापुढील सगळीं गुणोत्तरें $\frac{१}{२}$ पेक्षां लहान आहेत, आणि तें दुसरें गुणोत्तर एकापेक्षां लहान आहे.

या श्रेणीची नियतता बीजगणितांत बहुत उपयोगी अंक आहेत, याजकरितां दशांशाचे दाहा स्थळांपावेतों त्यांस काढितों, आणि दशांशाचे दाहाव्येस्थळीं खरा अंक होण्यासाठीं अकरा स्थळें पावेतों घेतों. वेगळालीं पदें दाखविण्यासाठीं $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि घे, तर याप्रमाणें होतें,

$अ_१ = १$, $अ_२ = १$, $अ_३ = \frac{१}{२} अ_२$, $अ_४ = \frac{१}{३} अ_३$, $अ_५ = \frac{१}{४} अ_४$ इत्यादि तर.

$अ_१ = १$	१·००००००००००००
$अ_२ = १$	१·००००००००००००
$अ_३ = \frac{१}{२} अ_२$	०·५०००००००००००
$अ_४ = \frac{१}{३} अ_३$	·१६६६६६६६६६७
$अ_५ = \frac{१}{४} अ_४$	·०४१६६६६६६६७
$अ_६ = \frac{१}{५} अ_५$	·००८३३३३३३३३
$अ_७ = \frac{१}{६} अ_६$	·००१३८८८८८८९
$अ_८ = \frac{१}{७} अ_७$	·०००१९८४१२७०
$अ_९ = \frac{१}{८} अ_८$	·००००२४८०१५९
$अ_{१०} = \frac{१}{९} अ_९$	·०००००२७५५७३
$अ_{११} = \frac{१}{१०} अ_{१०}$	·००००००२७५५७
$अ_{१२} = \frac{१}{११} अ_{११}$	·०००००००२५०५
$अ_{१३} = \frac{१}{१२} अ_{१२}$	·००००००००२०९
$अ_{१४} = \frac{१}{१३} अ_{१३}$	·०००००००००१६
$अ_{१५} = \frac{१}{१४} अ_{१४}$	·००००००००००१
	२·७१८२८१८२८४६

हें सर्वधन शेवटील अंकापावेतों खरें आहे; सारांश श्रेणीचें सर्वधन या पुढील दोन अंकांचे मध्यें आहे;

$$२·७१८२८१८२८४५$$

आणि $२·७१८२८१८२८४६$

परंतु तें सर्वधन या दोहोंतून पहिल्यापेक्षां दुसरे अंकांचे अधिक जवळ आहे. या सर्वधनाची नियतता दाखविण्यासाठीं e हें अक्षर कामांत घेतात; अथवा याप्रमाणें मांडितात;

$e = १+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+$ इत्यादि. (=२·७१८२८१८२८४६ अवळ अवळ) ७ वें पृष्ठ पहा.

वरची श्रेणी त्वरेनें उतरत जाती असें ह्मणतात.

सिद्धांत. अ+ब+क+ इत्यादि, जेव्हां या श्रेणीचीं पदें परस्पर असा संबंध ठेवितात, कीं $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि हीं सर्व एकापेक्षां मोठीं असतात, अथवा कोणत्याहि सांगीतलेल्या पदानंतर अशीं वाढत जातात, तेव्हां ही श्रेणी नेहमी चढती आहे.

हा सिद्धांत वरचे सिद्धांतासारिखा आहे, यामुळें याचा खरेपणा दाखवायास शिकणारावर सोंपितों.

सिद्धांत. अ−ब+क−इ+ इत्यादि, जेव्हां या श्रेणीचीं पदें अनियत घटत जातात, तेव्हां ती उतरती आहे; ह्मणजे, जेव्हां ब पेक्षां अ, आणि क पेक्षां ब इत्यादि मोठीं आहेत, आणि जेव्हां श्रेणीचें कांहीं पद कोणता कसाही लहान अपूर्णांक मनांत कल्पून घेतला त्यापेक्षां लहान आहे, तेव्हां ती उतरती आहे.

सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें अ, ब, क इ, इत्यादि कोणत्याहि श्रेणीचीं पदें उतरत जातात, असे असोत, तर

(अ−ब) + (ब−क)+(क−इ) + इत्यादि

ही उतरती श्रेणी असावी, कां कीं, पहिल्या दोन पदांची बेरीज अ+क आहे, पहिल्या तीन पदांची बेरीज अ−इ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि. आतां अ,ब,क,इ, इत्यादि पदें अनियत घटत जातात, तर अ−क,अ−इ, इत्यादि या श्रेणीचीं पदें वाढत वाढत जातात अशीं आहेत, आणि त्या श्रेणीची नियतता अ आहे. यामुळें वरचे श्रेणीचीं एका आड एक-पदें घेऊन जी श्रेणी होती, तिची नियतता अपेक्षां लहान असावी. परंतु ती श्रेणी पुढीलप्रमाणें आहे,

अ−ब+क−इ+ इत्यादि.

यावरून सिद्धांत खरा आहे.

यावरून

$$१-\frac{१}{२}+\frac{१}{३}-\frac{१}{४}+ \text{इत्यादि.}$$

ही उतरती श्रेणी आहे हें कळतें, जिची नियतता १ पेक्षां लहान आहे.

सिद्धांत. जर कोणतेंहि दिलेलें परिमाण प, या पुढील प्रमाणाचे कोणत्याहि श्रेणीपेक्षां मोठें असेल,

ह्मणजे

$$\frac{ब}{अ} \quad \frac{क}{ब} \quad \frac{इ}{क} \quad \frac{फ}{इ} \quad \frac{ग}{फ} \quad \text{इत्यादि.}$$

तर

$$अ+बक्ष+कक्ष^{२}+इक्ष^{३}+फक्ष^{४}+गक्ष^{५}+ \text{इत्यादि} \cdots\cdots\cdots\cdots (अ)$$

जेव्हां $\frac{१}{प}$ यापेक्षां क्ष लहान आहे, तेव्हां ही वरची श्रेणी उतरती आहे.

कांकीं वरची श्रेणी या पुढीलप्रमाणें आहे,

$$अ\left\{१+\frac{ब}{अ}क्ष+\frac{क}{ब}\cdot\frac{ब}{अ}\cdot क्ष^{२}+\frac{इ}{क}\cdot\frac{क}{ब}\cdot\frac{ब}{अ}\cdot क्ष^{३}+ \text{इत्यादि.}\right\}$$

आतां $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि यांपेक्षां प मोठा आहे, यामुळें $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि यांचे जागीं प मांडिला असतां वरचे श्रेणीची किंमत अधिक होती. ह्मणून असें केल्यानें ती श्रेणी याप्रमाणें होती.

$$अ\left\{१+पक्ष+प^{२}क्ष^{२}+प^{३}क्ष^{३}+ \text{इत्यादि.}\right\}$$

अथवा $$अ\left\{१+(पक्ष)+(पक्ष)^{२}+(पक्ष)^{३}+ \text{इत्यादि.}\right.$$

यांत जर १ पेक्षां पक्ष लहान असेल, अथवा, $\frac{१}{प}$ यापेक्षां क्ष लहान असेल, तर २७६ पृष्ठाप्रमाणें ही वरची उतरती श्रेणी आहे. आणि त्याच कल्पनेवरून मुळची पद्धति अधिक उतरती असावी, कांकीं तिचीं पदें या वरचे श्रेणीचे पदांपेक्षां उत्तरोत्तर लहान आहेत.

कोणत्याहि श्रेणीचे पदांचे प्रमाणांतून कांहीं दिलेल्या प्रमाणानंतरचा प्रमाणाहून जर प मोठा असेल, तर जा पदांपासून तें प्रमाण होतें, त्यापुढें जेव्हां १पेक्षां पक्ष लहान आहे, तेव्हां ती श्रेणी उतरती होती. ह्मणून मनांत आण, कीं (अ) श्रेणीचें हजारावें पद आणि त्याचे पुढलीं पदें हीं पुढील आहेत,

$$अक्ष^{९९९}+बक्ष^{१०००}+कक्ष^{१००१}+ \text{इत्यादि.}$$

अथवा $$अक्ष^{९९९}\left\{१+\frac{ब}{अ}क्ष+\frac{क}{ब}\,\frac{ब}{अ}\,क्ष^{२}+ \text{इत्यादि.}\right\}$$

तर, वरचा तर्काप्रमणें जर $\frac{ब}{अ}, \frac{क}{ब}$, इत्यादि प्रमाणापेक्षां जर प मोठा असेल, आणि जर $\frac{१}{प}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर वरची श्रेणी उतरती आहे.

उदाहरण, ही पुढील श्रेणी घे

$$१+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें $\frac{२}{१}$ $\frac{३}{२}$ $\frac{४}{३}$ $\frac{५}{४}$ इत्यादि.

यांत पहिल्याप्रमाणानंतरचा सर्व दुसऱ्या प्रमाणांपेक्षां २ मोठे आहेत; यामुळें जर $\frac{१}{२}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर ही श्रेणी दुसऱ्यापदापासून उतरत जाती. शंभरावें पद आणि त्याचे पुढलीं पदें याप्रमाणें आहेत,

$$१०० क्ष^{९९} + १०१ क्ष^{१००} + १०२ क्ष^{१०१} + \text{ इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें $\frac{१०१}{१००}$ $\frac{१०२}{१०१}$ $\frac{१०३}{१०२}$ इत्यादि.

यांत पहिल्याप्रमाणाशिवाय सर्व दुसऱ्या प्रमाणांपेक्षां $\frac{१०१}{१००}$ हें प्रमाण मोठें आहे. यामुळें, जर $१ \div \frac{१०१}{१००}$ अथवा $\frac{१००}{१०१}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर शंभराव्या पदापासून ही श्रेणी उतरत जाती. याच प्रमाणें दाखवितां येईल, कीं जा पदापासून १ पेक्षां क्ष लहान आहे, त्या पदापासून ही श्रेणी उतरत जाती, आणि जा पदापासून उतरण्याचा आरंभ होतो तें पद क्ष, पुरतेपणीं १ याचे जवळ केल्यानें, हवें तेवढें लांब नेतां येईल.

पुढील प्रमाणें दुसरें उदाहरण घे,

$$१+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{२\cdot३}+\frac{क्ष^{४}}{२\cdot३\cdot४}+ \text{ इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें १ $\frac{१}{२}$ $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{४}$ इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत घटत जातात, ह्मणून या श्रेणींत असें एक पद येईल, कीं त्या पदा पुढचीं सर्व पदें कोणत्याहि सांगीतलेल्या अतिलहान म अपूर्णांकापेक्षां लहान होतील. परंतु जर म हवा तेवढा लहान केला, तर $\frac{१}{म}$ हवा तेवढा मोठा करितां येईल. यामुळें क्षची प्रत्येक किमत कशीहि मोठी असली, तरी त्याचे किमतीविषयीं ही श्रेणी उतरती आहे; परंतु क्ष जेवढा जेवढा अधिक मोठा घेतां येईल, त्याप्र-

माणें जा पदापासून श्रेणीचा उतरण्याचा आरंभ होतो, तें पद लांब जाईल.

पुढीलप्रमाणें तिसरें उदाहरण घे,

$$१+२क्ष+२\cdot३क्ष^{२}+२\cdot३\cdot४\ क्ष^{३}+\ इत्यादि.$$

हिचीं प्रमाणें २ ३ ४ ५ इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत वाढत जातात, ह्मणून या सर्व पदांपेक्षां मोठें असें कोणतेंहि परिमाण नाहीं. यामुळें, क्षला कोणतीहि किंमत देतां येत नाहीं, जिणेंकरून ही श्रेणी उतरती होईल. हा पुढील सिद्धांत वरप्रमाणें सोप्या रितीनें स्थापितां येईल.

सिद्धांत. $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि कोणत्याहि प्रमाणाहून प लहान असेल, तर

$$अ+बक्ष+कक्ष^{२}+\ इत्यादि.$$

ही श्रेणी $\frac{१}{प}$ या पेक्षां क्ष चे प्रत्येक मोठ्या किमतींविषयीं चढती आहे.

याच रितीनें जी श्रेणी मागील उदाहरणांत दाखविली, ती $\frac{१}{३}$ पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं, दुसऱ्यापदापासून चढती, आणि तीच $\frac{१}{४}$ पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं तिसऱ्यापदापासून चढती, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; यावरून क्षला कोणत्याहि लहान अपूर्णांकाची किंमत दिल्यानें ही श्रेणी कोणत्याहि पदापासून चढती होणार नाहीं असा लहान अपूर्णांक नाहीं.

अशा तऱ्हेची चढती श्रेणी व्यवहार कामांत येत नाहीं; जी श्रेणी उतरती करितां येती, तिजपासून जीं साधारण अनुमानें निघतात, तीं अनुमानें सर्व श्रेण्यांस लावूं नये, हें सुचवायासाठीं मात्र या वरचा श्रेण्या घेतल्या आहेत.

यापुढें $अ+बक्ष+कक्ष^{२}+$ इत्यादि या श्रेणीविषयीं बोलणें, तर अर्थ हाच समजावा, कीं जा श्रेण्या चढत्या करितां येतील त्यांविषयीं मात्र बोलणें आहे; परंतु जर याच्रे उलटें सांगितलें असलें तर हा सांगितला अर्थ घेऊं नये. सगळीं पदें धन आहेत असें मानितों.

सिद्धांत. $अ+बक्ष+कक्ष^{२}$ या जातीचे सर्व श्रेण्यांत हा गुण आहे, ह्मणजे क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं त्या श्रेणींतील कोणत्याहि पदा-

मध्यें त्या पदाचे पुढील सर्व पदांची बेरीज इच्छेप्रमाणें हव्या तेवढ्या वेळा जाईल.

उदाहरण, क्ष पुरतेपणीं लहान घेतला, तर $कक्ष^{२}$ हें पद $इक्ष^{३}+फक्ष^{४}+$ इत्यादि यांपेक्षां दहा हजार पट अधिक मोठें करितां येईल. क्षची अति मोठी किंमत दाखविण्यासाठीं $क्ष_{१}$ असें चिन्ह घे, जेणेंकरून इ+फक्ष+ इत्यादि ही उतरती श्रेणी होती, आणि अशे पक्षांत त्या पदांची बेरीज दाखविण्यासाठीं **स** घे. तर $क्ष_{१}$ पेक्षां क्षचा जा प्रत्येक किंमती लहान आहेत, त्या प्रत्येकींविषयीं इ + फक्ष + इत्यादि ही पद्धति सपेक्षां लहान आहे. आतां $कक्ष^{२}$ यामध्यें $इक्ष^{३} + फक्ष^{४} +$ इत्यादि पदें कित्येक वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातात, ह्मणजे

$$\frac{कक्ष^{२}}{इक्ष^{३}+फक्ष^{४}+इत्यादि} \text{ अथवा } \frac{क}{इक्ष+फक्ष^{२}+इत्यादि} \text{ अथवा } \frac{क}{क्ष(इ+फक्ष+इत्यादि)}$$

$क्ष_{१}$ पेक्षां क्ष लहान घे, ह्मणून, यावरून इ+फक्ष+ इत्यादि पेक्षां **स** मोठा आहे, अथवा

$$\frac{क}{क्ष(इ+फक्ष+ इत्यादि)} \text{ अथवा } \frac{कक्ष^{२}}{इक्ष^{३}+फक्ष^{४}+इत्यादि} \text{ यापेक्षां } \frac{क}{क्षस} \text{ लहान आहे}$$

आतां क आणि **स** हीं दोन नियमित परिमाणें आहेत, ह्मणून क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं इच्छेप्रमाणें क÷क्ष**स** हवा तेवढा मोठा करितां येईल; परंतु क÷क्ष**स** पेक्षां $कक्ष^{२}÷ (इक्ष^{३}+फक्ष^{४}+ इत्यादि)$ अधिक मोठी आहे, तर ही इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी मोठी करितां येईल. यावरून हा सिद्धांत स्थापिला जातो.

उदाहरण.

$$१+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+५क्ष^{४}+ \text{ इत्यादि}$$

या श्रेणींत क्ष किती लहान असावा, असा कीं तिचे चवथ्ये पदामध्यें त्याचे पुढील सगळ्ये पदांची बेरीज, थोडक्या तरी १००० वेळा जाईल.

या श्रेणींतील चवथ्या पदाचे पुढलीं सर्व पदें याप्रमाणें मांडितात;

$$५क्ष^{४}\left\{१+\frac{६}{५}क्ष+\frac{७}{६}\cdot\frac{६}{५}क्ष^{२}+\text{इत्यादि}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (अ)$$

आणि $\frac{६}{५}$ हें प्रमाण त्याचे पुढील कोणत्याहि प्रमाणापेक्षां मोठें आहे; यामुळें ही वरची श्रेणी फेर करून पुढीलप्रमाणें मांडिली असतां वाढत जाती.

$$५क्ष^{४}\{१+\frac{६}{५}क्ष+\frac{६}{५}\cdot\frac{६}{५}क्ष^{२}+इत्यादि.\}\ अथवा\ \frac{५क्ष^{२}}{१-\frac{६}{५}क्ष}\ \ldots\ (ब)$$

३०९ पृष्ठ पहा. आतां क्ष असा घेतला पाहिजे, कीं

$$१०००\ \frac{५क्ष^{४}}{१-\frac{६}{५}क्ष}\ यापेक्षां\ ४क्ष^{३}\ हें\ पद\ मोठें\ आहे.$$

$$(\times)\ \left(\frac{१-\frac{६}{५}क्ष}{४क्ष^{३}}\right),२५०\times५क्ष\ अथवा\ १२५०\ क्ष\ यापेक्षां\ १-\frac{६}{५}क्ष$$

खचित मोठे असावे, जर १२५० क्षपेक्षां १−२ क्ष मोठे आहेत, अथवा जर १२५२ क्षपेक्षां १ मोठा आहे, अथवा जर क्षपेक्षां $\frac{१}{१२५२}$ मोठे आहेत, तर वरची गोष्ट निश्चयें खरी आहे. या पक्षांत १००० वेळा (ब) पेक्षां ४ क्ष^{३} मोठे आहेत; तर १००० वेळा (अ) पेक्षां अधिक मोठे आहेत.

सिद्धांत.

अ$_{०}$+अ$_{१}$क्ष+अ$_{२}$क्ष^{२}+ इत्यादि आणि ब$_{०}$+ब$_{१}$क्ष+ब$_{२}$क्ष^{२}+ इत्यादि या दोन श्रेण्या जर क्षचा प्रत्येक नियमित किमतीविषयीं सर्वदां बरोबर असतील, तर अ$_{०}$= ब$_{०}$, अ$_{१}$= ब$_{१}$, अ$_{२}$= ब$_{२}$, इत्यादि असें होईल, अथवा या दोन श्रेण्या सर्वांशीं एकरूप होतील.

या दोन श्रेण्या अ$_{०}$+अ आणि ब$_{०}$+ब या रूपाचा आहेत अशी कल्पना कर, आतांच जें वर दाखविलें त्यावरून अ आणि ब, हे अ$_{०}$ आणि ब$_{०}$ यांचा कोणत्याहि म भागापेक्षां लहान करितां येतील. शक्य असेल, तर अ$_{०}$ आणि ब$_{०}$ हे दोन निरनिराळे अंक आहेत, आणि अ$_{०}$=ब$_{०}$+त आहे अशी कल्पना कर. आतां सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें दोन श्रेण्या सर्वदां बरोबर आहेत, तर यावरून अ$_{०}$+अ=ब$_{०}$+ब, अथवा ब$_{०}$+त+अ=ब$_{०}$+ब; ह्मणजे त=ब−अ. परंतु अ$_{०}$ आणि ब$_{०}$ हीं दोन्हीं नियमित परिमाणें आहेत, यामुळें त्यांची वजाबाकी ही नियमित परिमाण आहे; आणि जीं प्रत्येक परिमाणें, हवीं तेवढीं लहान करितां येतील, त्या दोन परिमाणांचा वजाबाकी बरोबर त हें नियमित परि-

माण वरचा कल्पनेवरून आहे ही गोष्ट खोटी. यावरून $अ_०=ब_०+त$ असें होण्यास अशक्य; आणि तशेच तर्क रितीनें दाखवितां येतें, कीं $अ_०=ब_०-त$ हेंहि होण्यास अशक्य; यामुळें $अ_०=ब_०$. हीं दोन बरोबरीचीं पदें वरचे दोन्ही श्रेण्यांतून वजा करून बरोबरीचा वजाबाक्या क्षनें भाग, तर याप्रमाणें होईल,

$अ_१+अ_२क्ष+अ_३क्ष^२+$ इत्यादि आणि $ब_१+ब_२क्ष+ब_३क्ष^२+$ इत्यादि सर्वदां बरोबर आहेत;

वरची गोष्ट सिद्ध केल्याप्रमाणें $अ_१=ब_१$ असें निघतें; बरोबरीचीं पदें पुनः वरप्रमाणें वजा करून बाक्यांस क्षनें भागून $अ_२=ब_२$ असें निघेल आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून वरचा दोन श्रेण्यांतून एकींमध्यें एक किंवा अधिक पदें कमी असतील, तर दुसऱ्या श्रेणीमध्यें तितकींच कमी असावीं; ह्मणजे, जर अ−क्ष ही $अ_०+अ_१क्ष+अ_२क्ष^२$ यांचे सर्वदां बरोबर आहे, तर $अ=अ_०$, $-१=अ_१$, $०=अ_२$, $०=अ_३$ इत्यादि.

श्रेणीमध्यें क्ष=० केलें जाईल, आणि ती श्रेणी तिचे पदांचे संख्यांविषयीं नियत आहे. असें कल्पून त्याच रीतीनें साधारण चालीचीं बीजगणितरूपाचीं उत्तरें घेतलीं जातील, हें मात्र वरची कृती दाखविती. ह्मणजे, जर $अ_०+अ_१क्ष+$ इत्यादि $=ब_०+ब_१क्ष+$ इत्यादि, असें नेहेमी असेल, तर क्ष = ० असें करण्याचा परिणाम ह्मणजे, $अ_०=ब_०$ हें खरें आहे असें वर सिद्ध झालें. परंतु पूर्वी पहाण्यांत आलें, कीं जेव्हां क्ष = ० तेव्हां प=क्र असें ह्मणण्यास योग्य नाहीं, परंतु जेथें क्ष पुरतेपणीं लहान केला जाईल, अथवा ० च जवळ केला जाईल अशे पक्षांत मात्र असें ह्मटलें जाईल, कीं इच्छेप्रमाणें पचे हवा तितका जवळ क्र आणिला जाईल, जी अडचण नाहींशी केली ती या पुढीलप्रमाणें आहे. $१+२क्ष+२\cdot३क्ष^२+$ इत्यादि या श्रेणींत असें पाहिलें कीं क्ष कितीहि लहान केला, तरी पदांचें सर्वधन इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें मोठें केलें जाईल. यावरून या पुढीलप्रमाणें जेव्हां क्ष=०, तेव्हां वरची श्रेणी १+०+०+ इत्यादि अथवा १ असें ह्मणण्यास योग्य आहे कीं काय? जर पदांची संख्या सात असली, तर योग्य रीतीनें होय असें ह्मणण्यास कांहीं भ्रम नाहीं; परंतु जेव्हां पदांची संख्या अ-

नंत आहे, तेव्हां जें पूर्वीं सर्व सांगितलें त्यावरून कांहीं उत्तर देववत नाहीं. जी श्रेणी उतरती केली जाईल, तिजवर मात्र वरची सिद्धता लागू होत्ये, ही गोष्ट शिकाणरानें मनांत धरावी.

वरची गोष्ट सिद्ध करायास याप्रमाणें ह्मणण्याची चाल आहे, कीं जेव्हां वरच्या दोन श्रेण्या बरोबर आहेत, आणि जेव्हां क्ष=० तेव्हांहि त्या श्रेण्या बरोबर आहेत, आणि यामुळें $अ_० = ब_०$. आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या पक्षांत असें ह्मणण्याची गरज नाहीं, आणि हा पुढील सिद्धांत स्थापिला गेला असें ह्मणतां येईल. जेव्हां क्ष नियमित असून जा श्रेण्या उतरत्या केल्या जातील, त्या जर नेहेमी बरोबर आहेत, तर जेव्हां क्ष=० असेल, तरीहि त्या नेहेमी बरोबर असतील.

बहुतेक श्रेण्यांचे सर्वधनाची नियतता काढण्याची रीति या पुढील कित्येक उदाहरणांपासून समजांत येईल. पहिल्यानें, याप्रमाणें घे,

$$प = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+क्ष^{४}+ \text{ इत्यादि}$$

यांत प विषयीं एक नियमित बीजगणितानुरूप पद्धति काढण्याची इच्छा हि. स्पष्ट आहे, कीं

$१+क्ष+क्ष^{२}+$ इत्यादि **अनंत पावेतों** $= १+क्ष \{१+क्ष+क्ष^{२}+$ इत्यादि **अनंत पावेतों** $\}$

$$\text{ह्मणजे } प = १+क्षप \quad \text{अथवा } प = \frac{१}{१-क्ष}$$

असें उत्तर पूर्वीं निघालें. आतां, याप्रमाणें घे,

$$प = १+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} = २+३क्ष+४क्ष^{२}+५क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि } = \frac{१}{१-क्ष}$$

यावरून, $प \left\{\frac{१}{क्ष}-१\right\} = \frac{१}{१-क्ष}+\frac{१}{क्ष} = \frac{१}{क्ष}\cdot\frac{१}{१-क्ष}$

अथवा $$प = \frac{१}{(१-क्ष)^{२}}$$

आतां याप्रमाणें घे, $प = १+३क्ष+५क्ष^{२}+७क्ष^{३}+$ इत्यादि

$$\frac{प-१}{क्ष} = ३+५क्ष+७क्ष^२+९क्ष^३+ \text{ इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = २+२क्ष+२क्ष^२+२क्ष^३+ \text{ इत्यादि} = \frac{२}{१-क्ष}$$

यावरून $$प = \frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^२}$$

आतां, या प्रमाणें घे, $प = १+४क्ष+९क्ष^२+१६क्ष^३+$ इत्यादि

$$\frac{प-१}{क्ष} = ४+९क्ष+१६क्ष^२+२५क्ष^३+ \text{ इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = ३+५क्ष+७क्ष^२+९क्ष^३+ \text{ इत्यादि}$$

$$\therefore \left(\frac{प-१}{क्ष} - प\right) क्ष+१ = १+३क्ष+५क्ष^२+७क्ष^३+९क्ष^४+ \text{ इत्यादि} = \frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^२}$$

यावरून $$प = \frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^३}$$

वर लिहिलेल्ये श्रेण्यांचे पदांचे नियमित संख्यांचे सर्वधनाविषयीं अधिक सरळ बीजगणितरूप पद्धती काढण्याकरितां, वरचे सारिखीच रीति लाविता येईल. ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें घे,

$$प = १+२क्ष+३क्ष^२+ \cdots\cdots +(न-१)क्ष^{न-२}+नक्ष^{न-१}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} = २+३क्ष+४क्ष^२+ \cdots\cdots +नक्ष^{न-२}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = १+क्ष+क्ष^२ + \cdots\cdots + क्ष^{न-२} - नक्ष^{न-१}$$

१९८ पृष्ठाप्रमाणें, $$= \frac{१-क्ष^{न-१}}{१-क्ष} - नक्ष^{न-१} = \frac{१-(न+१)क्ष^{न-१}+नक्ष^{न}}{१-क्ष}$$

$$प = \frac{नक्ष^{न+१}-(न+१)क्ष^{न}+१}{(१-क्ष)^२}$$

हें पुढील उदाहरण शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावें;

$$१+३क्ष+५क्ष^२+\cdots+(२न-१)क्ष^{न-१} = \frac{\overline{२न-१}क्ष^{न+१}-\overline{२न+१}क्ष^{न}+क्ष+१}{(१-क्ष)^२}$$

जी गोष्ट बहुतकरून तपासावी लागती, ती वरचे गोष्टीचे उलटी आहे; ह्मणजे श्रेणीचे पदांपासून सर्वधन काढावें असें नाहीं, परंतु, पद्धति सांगीतली असतां, जा श्रेणीचें सर्वधन ती पद्धति आहे त्या श्रेणीस काढण्याचें अथवा त्यांतल्ये कोणत्याहि एक अक्षराचे घाताप्रमाणें त्या श्रेणीचा विस्तार करावयाचा आहे. मनांत आण कीं क्षचे घाता-

विषयीं त्याचे गुणक इत्यादि सुद्धां श्रेणीचीं पदें काढण्याची इच्छा आहे, जी श्रेणी उत्तरती असून सर्व पक्षांत $(१+क्ष) \div (१-क्ष)^{२}$ याचे बरोबर होईल. मनांत आण, कीं इच्छिलेली श्रेणी याप्रमाणें आहे, $अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+$ इत्यादि, तर याप्रमाणें होईल,

$$\frac{(१+क्ष)}{(१-क्ष)^{२}} = अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

वरचे समीकरणाचे दोन बाजूंस $(१-क्ष)^{२}$ अथवा $१-२क्ष+क्ष^{२}$ यांणीं गुण, तर

$$१+क्ष = \left\{\begin{array}{l} अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+ \quad \text{इत्यादि} \\ \quad -२अ_{०}क्ष-२अ_{१}क्ष^{२}-२अ_{२}क्ष^{३}- \text{ इत्यादि} \\ \qquad\qquad +अ_{०}क्ष^{२}+ \; अ_{१}क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि} \end{array}\right\}$$

$$= अ_{०}+(अ_{१}-२अ_{०})क्ष+(अ_{२}-२अ_{१}+अ_{०})क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि}$$

या समीकरणांत क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं दोन्ही बाजू बरोबर आहेत, ह्मणून ३१७ वे **पृष्ठावरचा** सिद्धांताप्रमाणें हें पुढील होतें;

$$\begin{array}{ll} अ_{०}=१ \qquad अ_{१}-२अ_{०}=१ & \text{अथवा } अ_{१} = ३ \\ अ_{२}-२अ_{१}+अ_{०} = ० & \text{अथवा } अ_{२} = ५ \\ अ_{३}-२अ_{२}+अ_{१} = ० & \text{अथवा } अ_{३} = ७ \\ \text{इत्यादि.} & \text{इत्यादि.} \end{array}$$

ह्मणून श्रेणी याप्रमाणें होईल, $१+३क्ष+५क्ष^{२}+७क्ष^{३}+$ इत्यादि हें पूर्वीं सांगीतल्याप्रमाणें आहे.

या श्रेणीचें पहिलें पद लागलेंच काढतां येतें; कां कीं क्ष=०, करून उत्तरें कामांत आणितां येतात असें पूर्वीं सिद्ध झालें, आणि जेव्हां क्ष = ० होतें तेव्हां $(१+क्ष)\div(१-क्ष)^{२}$ या बरोबर १ उत्पन्न होतो आणि श्रेणीचें रूप $अ_{०}$ होतें, तर $अ_{०}=१$.

$(१-क्ष^{४}) \div (१-क्ष)$ यास क्षचे घातांविषयीं श्रेणीचें रूप विस्तार करून मांडिलें असतां काय होईल असा प्रश्न करितों? वरप्रमाणें या श्रेणीचें पहिलें पद १ आहे; तर याप्रमाणें कल्पना कर, कीं

$$\frac{१-क्ष^{४}}{१-क्ष} = १+अ_{१} क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+अ_{४} क्ष^{४}+ \text{इत्यादि}$$

$$१-क्ष^{४} = १+अ_{१} क्ष+अ_{२} क्ष^{२}+अ_{३} क्ष^{३}+अ_{४} क्ष^{४}+अ_{५}क्ष^{५}+ \text{इत्यादि}$$

$$-क्ष-अ_{१} क्ष^{२}-अ_{२} क्ष^{३}-अ_{३} क्ष^{४}-अ_{४} क्ष^{५}+ \text{इत्यादि}.$$

पहिल्ये बाजूस क्षचा पहिला घात नाहीं, तर $अ_{१}-१ = ०$, अथवा $अ_{१} = १$ असें होईल. यासारिखेंच $अ_{२}-अ_{१} = ०$, अथवा $अ_{२}=अ_{१}=१$; $अ_{३}-अ_{२}=०$, अथवा $अ_{३} = १$. परंतु पहिल्ये बाजूस $क्ष^{४}$ याचा गुणक -१ आहे, यामुळें $अ_{४}-अ_{३} = -१$ अथवा $अ_{४}-१ = -१$, ह्मणजे $अ_{४}=०$; पुनः, $अ_{५}-अ_{४} =०$ अथवा $अ_{५} = ०$, $अ_{६}-अ_{५} = ०$, अथवा $अ_{६} = ०$ आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून श्रेणी या पुढीलप्रमाणें आहे,

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+०\times क्ष^{४}+०\times क्ष^{५}+ \text{इत्यादि}$$

अथवा $१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}$

असें उत्तर केवळ सरळ भागाकारानें, अथवा १९७ पृष्ठावरचे रितीप्रमाणें निघतें. ह्मणजे, असें दिसतें, कीं जें परिमाण नियमित आहे तें दाखविण्यासाठीं जेव्हां एकादि अनंत श्रेणी घेतों, तेव्हां जें पद नियमित परिमाणांत नसतें त्या प्रत्येक पदाचा गुणक ०आहे, असें श्रेणींचा गुणक काढण्याचा रितीनें दाखवितां येईल.

पुनः, $१\div १+क्ष^{२}$ याचा विस्तार करून दाखविण्यासाठीं पुढीलप्रमाणें घे,

$$\frac{१}{१\div क्ष^{२}} = अ_{०}+अ_{१} क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३} क्ष^{३}+ \text{इत्यादि}.$$

वरचे कृतीवरून या पुढीलप्रमाणें होईल,

$अ_{०}=१$ $\quad$ $अ_{२}+अ_{०}= ०$ अथवा $अ_{२} =-१$ $\quad$ $अ_{४}+अ_{२}= ०$ अथवा $अ_{४}=१$

$अ_{१}= ०$ $\quad$ $अ_{३}+अ_{१} = ०$ अथवा $अ_{३} = ०$ $\quad$ $अ_{५}+अ_{३}= ०$ अथवा $अ_{५}=०$.

ह्मणून श्रेणी याप्रमाणें होईल,

$$१+०\times क्ष -क्ष^{२}+०\times क्ष^{३}+क्ष^{४}+०\times क्ष^{५} \text{ इत्यादि}.$$

अथवा $१-क्ष^{२}+क्ष^{४}-क्ष^{६}+$ इत्यादि.

जाचा दोन बाजू गुणकाचे किमतीविषयीं कोणत्याहि कल्पनेनें एक-

रूप करवत नाहीं, असें एक समीकरण जर वरचे कृतीवरून निघतें, तर त्यावरून असें कळतें, कीं दिलेल्या पद्धतीस सांगीतल्या श्रेणीचें रूप देतां येत नाहीं. जर १÷(१+क्ष)क्ष यास श्रेणीचें रूप देण्यास या पुढीलप्रमाणें घेतलें ह्मणजे

$$\frac{१}{क्ष(१+क्ष)} = अ_० + अ_१ क्ष + अ_२ क्ष^२ + अ_३ क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

तर या पुढीलप्रमाणें निघेल,

$$१ = अ_० क्ष + (अ_१ + अ_०) क्ष^२ + (अ_२ + अ_१) क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

कशीहि कल्पना केली तरी या दोन बाजू सारिख्या करितां येत नाहीं; कां कीं १ याचे बरोबर होईल असें दुसऱ्ये बाजूस क्षचे संबंधावांचून कोणतेंहि पद नाहीं. सारांश याप्रमाणें निघेल,

$$\frac{१}{१+क्ष} = १ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

$(\div)क्ष,\quad \frac{१}{क्ष(१+क्ष)} = \frac{१}{क्ष} - १ + क्ष - क्ष^२ + \text{इत्यादि}$

ह्मणून या पक्षांत $क्ष^{-१}$, असें ऋण घातप्रकाशक चिन्ह आणिल्याशिवाय, या अपूर्ण पद्धतीस क्षचे **धन** आणि पूर्ण घातांचे सारिणीचें रूप देतां येत नाहीं.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें दिलीं आहेत;

१. जर $\text{प} = अ_० + अ_१ क्ष + अ_२ क्ष^२ + \text{इत्यादि}$ तर

$\frac{\text{प}}{१-क्ष} = अ_० + (अ_० + अ_१)क्ष + (अ_० + अ_१ + अ_२)क्ष^२ + \text{इत्यादि}$ असें होईल.

आणि $\frac{\text{प}}{१+क्ष} = अ_० + (अ_१ - अ_०)क्ष + (अ_२ - अ_१ + अ_०)क्ष^२ + \text{इत्यादि}$ असें होईल.

२. $\frac{१}{१+क्ष+क्ष^२} = १ - क्ष + क्ष^३ - क्ष^४ + क्ष^६ - क्ष^७ + \text{इत्यादि}.$

३. $\frac{१+कक्ष}{क+क्ष} = \frac{१}{क} - \left(\frac{१}{क^२} - १\right) क्ष + \left(\frac{१}{क^३} - \frac{१}{क}\right) क्ष^२ - \text{इत्यादि}.$

४. $\frac{म+नक्ष}{प+कक्ष} = \frac{म}{प} - \left(\frac{मक}{प^२} - \frac{न}{प}\right) क्ष + \left(\frac{मक}{प^३} - \frac{कन}{प^२}\right) क्ष^२ - \text{इत्यादि}.$

नववा अध्याय.

अंकगणितांतील बरोबरी शब्दार्थाहून भिन्न, अशा बीजगणितांतील बरोबरी शब्दाचे अर्थाविषयीं.

१३९ पृष्ठावर, शब्दांचे विस्तारामध्यें, असें सांगितलें, कीं कोणत्याहि दोन पद्धतींतून एक दुसरीचे जागीं चुकीवांचून मांडितां येईल त्या ठिकाणीं बरोबर हा शब्द लावायाजोगा आहे असें मानितां येतें. यापूर्वी धन किंवा ऋण अशा नियमित बीजगणितरूप परिमाणास मात्र हा विस्तार लागू केला; पद्धतीचे परिमितीचा निश्चय अंकगणितरूप किमतीवरून होतो, आणि समोरासमोरचे संबंधांतून कोणता सांगायाचा मनांत योजिला आहे हें मात्र बरोबरीचें चिन्ह दर्शवितें. आतां बरोबर हा शब्द, अथवा त्याचें चिन्ह = याचा विचार करितों, आणि त्याचा व्याख्यानापासून जो अर्थ होईल त्या अर्थाहून अधिक विस्तीर्ण अर्थानें त्याचा विचार करीत नाहीं, परंतु जा अर्थानें पूर्वी तो शब्द कामांत घेतला त्याहून विस्तीर्ण अर्थानें त्याचा विचार करितों.

जेव्हां दोन परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याचे जागीं चुकीवांचून मांडितां येईल, तेव्हां तीं दोन परिमाणें बरोबर आहेत असें ह्मणतात. या व्याख्यानाचा अभिप्राय या पुढील प्रश्नाचे उत्तरांत आहे, चूक ह्मणजे काय? उत्तर हेंच आहे, कीं जेणेंकरून विरुद्ध उत्तरें निघतात, अथवा जेणेंकरून शुद्ध रीतीनें कृति करीत असतां विरुद्ध उत्तरें निघतात, तिचें नाव चूक.

जेव्हां दोन उत्तरें समजायाजोगीं आहेत अथवा त्यांपासून अर्थ निघण्यास योग्य आहे, असें असतांहि जर तीं दोन्हीं परस्पर मिळत नाहीं, तर तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत; परंतु त्यांतून एक किंवा दोनहि समजायाजोगीं नसतील, या कारणावरूनच केवळ तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत असें

ह्मणवत नाहीं. कां कीं जेव्हां प्रतिज्ञेचा कोणत्याहि भागाचा अर्थ ठाऊक नसतो, तेव्हां ती खरी किंवा खोटी आहे हें सांगवत नाहीं. उदाहरण, ८४ पृष्ठावरील $क्ष = \frac{क}{०}$ ही पद्धति तिचे मागील विषयाशीं कांहीं विरुद्ध नव्हती, कां कीं $\frac{क}{०}$ यास कांहीं पूर्वीं अर्थ नव्हता. असा निश्चय झाल्यानंतर त्याचे पूर्वींचे मूळ कारणापासून जें कांहीं निघण्यास शक्य होतें त्याशीं विरुद्ध न होई असा अर्थ द्यावा हा अभिप्राय होता.

वर दाखविलें गेलें, कीं जर एकंमापेक्षां क्ष कमी असेल, तर $१+क्ष+क्ष^{२}+$ इत्यादि याचे पदांचे बेरिजेपासून उत्तरोतर $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे अधिक जवळ उत्तरें निघतील, तथापि अशा कृतीपासून तीं उत्तरें अगदीं त्याचे बरोबर होणार नाहीं. यावरून या पुढील समीकरणांत = हें चिन्ह कामांत घेतलें.

$\frac{१}{१-क्ष} = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+$ इत्यादि अनंत पावेतों.

या समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूचीं पुरतेपणीं पदें घेतलीं, तर अंकगणितानुरूप बोलण्याप्रमाणें, त्याच्या दोन बाजू हव्या तेवढ्या जवळ जवळ बरोबर करितां येतील. बीजगणितानुरूप बोलण्याप्रमाणें, वरचा दोन बाजू अगदी खऱ्या आहेत असें मानितां येईल; परंतु दुसऱ्या बाजूचीं सर्व पदें मांडिलेलीं असलीं किंवा तीं तेथें आहेत अशीं कल्पिलेलीं असलीं, तरी तीं त्यांत आहेत असें मानितां येईल. या कल्पनेवरून मात्र वरचें समीकरण खरें आहे, परंतु ही कल्पना अंकगणितरूपानें अशक्य आहे, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. उदाहरण, समीकरणाची पहिली बाजू $१-क्ष^{२}$ यांणीं गुणून त्याचा गुणाकार $१+क्ष$ होतो; त्याच परिमाणानें दुसरी बाजू गुणिली असतां गुणाकार या पुढीलप्रमाणें होतो,

$$\left\{ \begin{array}{l} १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+क्ष^{४}+क्ष^{५}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.} \\ \quad\quad -क्ष^{२}-क्ष^{३}-क्ष^{४}-क्ष^{५}- \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.} \end{array} \right.$$

अथवा $१+क्ष+०+०+०+०+$ इत्यादि अनंत पावेतों.

यांत प्रत्येक पुढलें पद ० होईल, हें पाहिजे तर सिद्ध केलें जाईल; श्रेणीचें प्रत्येक पद प्रत्यक्ष तपासून पहाण्यास अशक्य, ह्मणून अशानें सिद्ध होत नाहीं, परंतु श्रेणीचे जे नेम ठाऊक आहेत, त्यांचे अनुमानावरून सिद्ध होतें. $क्ष^{म} \times क्ष^{न} = क्ष^{म+न}$ हें दाखवितां येतें,याचे प्रत्येक पक्ष पहाण्यास

अशक्य, ह्मणून अशानें दाखवितां येत नाहीं, परंतु $क्ष^{म}$ याचा अर्थ ठाऊक आहे ह्मणून त्यावरून दाखवितां येतें.

जर अंकगणितरूपानें चालून, हवीं तितकीं पुष्कळ पदें घेतलीं, ह्मणजे $क्ष^{न}$ पर्यंत घेतलीं, तर या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$(१+क्ष+क्ष^{२}+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + क्ष^{न-१}+क्ष^{न}) \times (१-क्ष)^{२}$$

$$= \begin{cases} १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \cdot\cdot\cdot\cdot + क्ष^{न-१}+क्ष^{न} \\ \quad -क्ष^{२}-क्ष^{३}- \cdot\cdot\cdot + क्ष^{न-१}-क्ष^{न}-क्ष^{न+१}-क्ष^{न+२} \end{cases}$$

$$= १+क्ष-क्ष^{न-१}-क्ष^{न+२}$$

यांत १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर न इतका मोठा घेतां येईल, कीं इच्छेप्रमाणें $क्ष^{न+१}$ आणि $क्ष^{न+२}$ हवे तेवढे लहान होतील. या ठिकाणीं बीजगणित रूपाची बरोबरी आहे, ती अंकगणितरूपाचे बरोबरीचे हवी तेवढी जवळ जवळ होईल.

आतां अशी कल्पना कर, कीं १ पेक्षां क्ष मोठा आहे; ह्मणजे क्ष=२, असें घे, तर

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों}$$

ही श्रेणी, गणितानुरूप भाषेप्रमाणें अनंत आहे, कांकीं १+२+४+८+ इत्यादि यांची बेरीज केल्यानें जी परिमिती येईल, तीस नियतता नाहीं. तर वरची श्रेणी आणि $\frac{अ}{०}$ या दोहोंमध्यें बीजगणितरूप बरोबरी आहे असें खचित् ह्मणावें कीं काय? ८० इत्यादि पृष्ठांचे गोष्टीवरून असें ह्मणण्यास योग्य नाहीं, कां कीं $\frac{अ}{०}$ याची अंकगणितरूपानें गणना होत नाहीं, ही गोष्ट कशी स्पष्ट करावी हें जरी तेथें दाखविलें, तथापि त्या पासून त्याचे उलटे विषयाचा बोध होत नाहीं, ह्मणजे जें कांहीं अंक गणित रूपानें गणलें जात नाहीं, त्यास $\frac{अ}{०}$ याणें दर्शवायास योग्य आहे. तर वरचा श्रेणीचा योग्य बीज गणितरूप दर्शक काय आहे? कांहीं दर्शक असेल, तर त्यास दाखविण्यासाठीं प घे; आतां वरचे श्रेणीचें रूप या पुढील प्रमाणें आहे,

$$१+क्ष \{१+क्ष+क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों}\}$$

जर प याचे जागीं १+क्ष प मांडितां येत नाहीं, तर वरची पद्धती दा-

पाहिजे

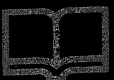
$$प=१+क्षप \text{ ज्यापासून } प=\frac{१}{१-क्ष} \text{ येई असें,}$$

जेव्हां १ पेक्षां क्ष कमी होता तेव्हां हेंच उत्तर निघालें होतें. आणि मागील पृष्ठाचे रितीप्रमाणें हेंहि दाखवितां येईल, कीं $\frac{१}{१-क्ष}$ याशीं किंवा $१+क्ष+क्ष^२+$ इत्यादि यांशीं कशीहि बीजगणितरूप कृति केली, तरी दोहोंपासून सारखेंच उत्तर निघतें; खरें ह्मटलें असतां, बीजगणितरूप गुणाकार कृतींत, जीं परिमाणें कामांत आणितात तीं धन असावीं असा कांहीं संकेत नाहीं, ह्मणून ज्या पक्षांत १ पेक्षां क्ष मोठा आहे, त्या पक्षास मागील पृष्ठांत जी कृति कामांत आणिली ती बरोबर लागू होती. परंतु मागील पृष्ठाप्रमाणें या पक्षीं अंकगणितरूपाची बरोबरी होत नाहीं, परंतु त्याचे केवळ उलटें घडतें; कां कीं जसजसा न वाढत जातो, तसे $क्ष^{न+१}$ आणि $क्ष^{न+२}$ हे घटण्याचे जागीं अधिक अधिक वाढत जातात.

३२० इत्यादि पृष्ठांवर बीजगणितरूप परिमाणांचा विस्तार करण्याची रीति सांगितली, त्यांत क्ष उतरत्ये श्रेणीचे नियततेंत असावा असें अगत्य नाहीं; परंतु ती कृति सर्व पक्षांसहि निश्चित लागू होती. उदाहरण, जर $\frac{१}{१+क्ष}$ याचा विस्तार करायाचा असेल, तर हें विचारितों, कीं $अ_०+अ_१क्ष+$ इत्यादि. या रूपाचा कोणकोणत्या पद्धती $\frac{१}{१+क्ष}$ याचे बरोबर होतील. $\frac{१}{१+क्ष}$ यास $१+क्ष$ यांणीं गुणिलें असतां, + होतो, इतकें मात्र या पद्धतींविषयीं ठाऊक आहे. क्षचे किमतीचे संबंधरहित, $१-क्ष+क्ष^२-क्ष^३+$ इत्यादि या श्रेणींतहि तसाच गुण आहे.

आतां या पुढील दोन गोष्टींचा विचार करितों; ह्मणजे, पहिल्यानें, जोंपर्यंत उदाहरणावरून दाखविलें जाईल तोंपर्यंत = हें चिन्ह साधारण रीतीनें कामांत घेतलें असतां, कांहीं विरुद्ध उत्तरें निघणार नाहींत, असें सिद्ध करितां येतें. दुसऱ्यानें, अशा जातीचे सिद्धतेवर आश्रय ठेवण्याची गरज पडत नाहीं, परंतु जें उत्तर निघतें तें मूळ कल्पनांचे गुणांपासून अवश्य होतें.

वरची पहिली गोष्ट तपासण्यासाठीं, सर्व पक्षांत हें **पुढील समीकरण खरें आहे असें मनांत घे,**



$\frac{१}{१+\text{क्ष}} = १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{४} -$ इत्यादि अनंत पावेतों.

जर $\text{क्ष} = १$, तर वरची पद्धति याप्रमाणें होईल,

$\frac{१}{२} = १ - १ + १ - १ + १ -$ इत्यादि अनंत पावेतों.

असें उत्तर कोणत्याहि अर्थानें, अंक गणितरूपाचे बरोबरीची पद्धति नाहीं; कां कीं ती श्रेणी विस्तार करून पदांची समसंख्या घेतली असतां अवश्य ० होईल, आणि पदांची विषम संख्या घेतली असतां, १ होईल. कोणत्याहि परिमाणाशीं त्याच परिमाणाची प्रथम मिळवणी आणि नंतर लागलीच वजाबाकी, असा क्रम अनंत पावेतों करून त्याशीं बीजगणित रूप कृति केली असतां, उत्तर त्या परिमाणाचे अर्धाबरोबर होईल कीं नाहीं, याचा आतां विचार करितों. मनांत आण, कीं

$$\left.\begin{aligned} \text{प} &= १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{ इत्यादि.} \\ -\text{प} &= \quad -१ - \text{क्ष} - \text{क्ष}^{२} - \text{ इत्यादि.} \\ +\text{प} &= \qquad +१ + \text{क्ष} + \text{ इत्यादि.} \\ -\text{प} &= \qquad\quad -१ - \text{ इत्यादि.} \end{aligned}\right\} \quad (\text{अ})$$

$\therefore$ **प−प+प**− इत्यादि $= १ + (\text{क्ष} - १) + (\text{क्ष} - \text{क्ष}^{२} + १)$ इत्यादि.

१९७ पृष्ठावरून $= \frac{\text{क्ष}+१}{\text{क्ष}+१} + \frac{\text{क्ष}^{२}-१}{\text{क्ष}-१} + \frac{\text{क्ष}^{३}+१}{\text{क्ष}+१}$ इत्यादि.

$$= \frac{\text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{ इत्यादि.}}{\text{क्ष}+१} + \frac{१ - १ + १ - \text{ इत्यादि.}}{\text{क्ष}+१}$$

परंतु $\text{प} = \frac{१}{१-\text{क्ष}}$ आणि $\text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} +$ इत्यादि $= \text{क्ष}(१ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} +$ इत्यादि$)$ $= \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१}$; यामुळें, जर वरची कृति $\frac{१}{१-\text{क्ष}}$ याचे अर्धकरण्याचे कृतीशीं बीजगणितरूपानें बरोबर असेल, आणि जर $१ - १ + १ - १ +$ इत्यादि हे $\frac{१}{२}$ या रूपाचे करितां येतील, तर हें पुढील समीकरण होईल;

$$\frac{१}{२}\,\frac{१}{१-\text{क्ष}} = \frac{\frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}}}{\text{क्ष}+१} + \frac{१}{२}\,\frac{१}{\text{क्ष}+१}$$

अथवा $$\frac{१}{२}\,\frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१} + \frac{१}{२}\,\frac{१}{\text{क्ष}+१}$$

हें खरें आहे असें दिसतें.

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$
$$-१-क्ष-क्ष^{२}-क्ष^{३}- \text{ इत्यादि.}$$
$$\text{इत्यादि. इत्यादि.}$$

अथवा (१−१+१− इत्यादि.) + (क्ष−क्ष+क्ष− इत्यादि.)
यावरचा रूपाबदल या पुढील रूपानें (अ) ही श्रेणी मांडण्याची बीजगणित रूप कृति वरचे उदाहरणांत आहे, ह्मणजे

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$
$$-१-क्ष-क्ष^{२}- \text{ इत्यादि.}$$
$$\text{इत्यादि. इत्यादि.}$$

परंतु = या चिन्हास प्रत्येक बीजगणितरूपाचे कामांत आणण्यानें गणितरूपाचा बरोबऱ्या उत्पन्न होतील असें ह्मणवत नाहीं, परंतु जेव्हां कधीं = हें चिन्ह बीजगणितरूपानें कामांत आणिल्यानें अंकगणितानुरूप समीकरण उत्पन्न होतें, तेव्हां दिसण्यांत येईल, कीं तें समीकरण अंकगणितरूपानें खरें आहे; असें ह्मणतां येईल या प्रतिज्ञेविषयीं अद्यापि कोठें विरोध आला नाहीं.

आतां वरची दुसरी गोष्ट तपासून पहातों.

बीजगणिताचे मूळ भूत चिन्हांचे अर्थांची यापूर्वीं अशी योजना केली आहे, कीं त्या योजनेनें कित्येक पक्षांत बीजगणित अंकगणिताशीं अगदीं मिळतें; आणि इतकेंच केवळ नाहीं, तर व्याख्यानापासून जा रिती निघतात, त्या अशा योजिल्या आहेत, कीं जेव्हां उत्तर केवळ गणितरूपाचें असून कृतींतील त्याचे पूर्वींचा पायऱ्या बीजगणितरूपाचा असतात, तेव्हां त्या पायऱ्या अंकगणितरूप करायास जे फेर करावे लागतात, त्यांपासून उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं, असेंहि घडतें. आरंभीं असें असून, आणि याशिवाय बीजगणितरूप कृतीनें कितीहि पायऱ्या झाल्या तरी वरचे गोष्टीचा गुण फिरत नाहीं, हें उघड दाखविलें गेलें, यावरून या पुढील दोन गोष्टी कळतात, ह्मणजे पहिल्यानें, जीं अंकगणित कृतीनें उत्तरें निघतात त्यांजवर जितका खरेपणाचा भ-

रंवसा ठेवितां येतो, तितका खरेपणाचा भरंवसा, जीं सर्व अंकगणित-रूपाचीं उत्तरें निघतात त्यांजवरहि ठेवितां येईल; दुसऱ्यानें, सगळीं उत्तरें जीं अंकगणितानें दाखवितां येत नाहीं, तथापि वरचे सांगितलेल्या व्याख्यानाशीं तीं पुरीं संगतवार आहेत; आणि, जर तीं सर्वदां अंकगणितरूपानें खरीं नसतील, तरी त्यांपासून अंकगणितरूपाचें असून खोटें असें उत्तर येण्यास अशक्य.

बीजगणिताचें भाषण कसें कामांत आणावें, याचा परिचय झाल्यावांचून वरचा भाषणांत जे शब्द आहेत, त्यांचा पुरतेपणीं बोध होणार नाहीं. आणि तो बोध झाल्यावांचून वरचा संवाद जो सर्वपक्षीं साधारण जातीचा आणि कठीण आहे, तो नव्ये शिकणारास पुरतेपणीं समजणार नाहीं, या कारणास्तव तो उघड करायास उदाहरणें दिलीं आहेत. या शिवाय **बीजगणितरूपरहित**, तर्क करण्याचीं मूळ कारणें हीं आहेत* आणि तीं कठीण आहेत, यामुळें त्यांची माहितगारी केवळ बीजगणितानें नवे शिकणारास होणार नाहीं, तशे जातीचा एक तर्क या पुढीलप्रमाणें आहे; ह्मणजे, जर प्रतिज्ञा परस्परांशीं विरुद्ध नसून योग्यतेनें

---

* परिमाण विद्यानुरूप तर्क, याचा अर्थ परिमाण विद्येस तर्क लावणें असा आहे, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि प्रकारचे तर्काहून भिन्न नाहीं, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. तर्क करण्याची संवय परिमाण विद्येनें होती, परंतु त्या परिमाण विद्येने तर्कविद्या शिकविली जात नाहीं; आणि तर्काचे प्रत्येक दुसऱ्या प्रकारांमध्यें जीं मूळ कारणें कामांत आणितात, त्यांशिवाय परिमाण विद्यावानास कोणतेंहि दुसरें मूळ कारण कामांत आणावयाची गरज पडत नाहीं. खरें ह्मटलें असतां, ही गोष्ट उलटी आहे, का कीं दुसऱ्ये प्रकारचे तर्कांचीं मूळ कारणें परिमाण विद्येचे बहुतेक प्रकारांत लागू पडत नाहीं अशीं असतात, जा लोकांस ही वरची गोष्ट ठाऊक नाहीं त्यांचे मनांत असें वाटतें, कीं परिमाण विद्यानुरूप जी उपपत्ती ती दुसऱ्ये सर्व जातीचे उपपत्तीहून भिन्न आहे.

परंतु ही गोष्ट अशी नव्हे; परिमाण विद्यानुरूप उपपत्ती, जेथपर्यंत लागू होती तेथपर्यंत ती दुसऱ्या सर्व प्रकारचे उपपत्ती सारिखीच आहे, आणि तर्क करण्याचे रितींत परिमाण विद्येचा उत्तमपणा नाहीं, परंतु इतर साधारण विषयावर तर्क करणाराचें लक्ष्य, आपले विषयावर जितकें असतें, त्यापेक्षां परिमाण विद्यावानाचें लक्ष्य आपले विषयावर अधिक असतें. जें कांहीं मोजितां किंवा मापितां येतें त्याजवर परिमाण विद्या लागू होती; आणि याशिवाय इतर विषयांवर परिमाण विद्यानुरूप उपपत्ति लागू करून, तिजविषयीं जो कोणी बोलतो, त्याचे मनांतील अभिप्राय हाच, कीं ती उपपत्ति तर्कानुसार किंवा नियमित जातीची आहे, आणि त्याचा अभिप्राय असा नसल्यास, जाविषयीं तो बोलत असतो तो विषय त्यास न समजतां तो बोलतो असें जाणावें.

जे या परिमाण विद्यानुरूप तर्काला तुच्छ मानितात, ते मुख्यत्वेंकरून, परिमाण विद्येचे प्रतिवादी आहेत; आणि जे परिमाण विद्यावान आहेत त्यांचानें दुसऱ्या विषयावर खरे तर्क करवत नाहीं, असा शोध लाविला ह्मणून जय मानून ते परिमाण विद्येस तुच्छ मानितात.

आणि तर्कानुसारानें कामांत घेतल्या, तर त्यांपासून जे परिणाम निघतात, ते परस्परांस विरुद्ध होण्यास अशक्य. हीं प्रतिज्ञा संपूर्ण अर्थानें जरी नवे शिकणारास समजून घेण्यास फार कठीण आहे, तथापि तो कठिणपणा बीजानुरूपाचा नाहीं.

जेव्हां अंकगणितरूप उत्तर येतें, तें ज्या कृतीचे पायऱ्यांपासून निघतें, त्या पायऱ्या मुळीं जर अंकगणितरूपाचा नसल्या, तथापि त्यांस अंकगणितरूप देतां येईल, असें वर सांगितलें अथवा सुचविलें आहे. ४+५=९ यांत बरोबरीची पूर्ण कल्पना दिसती, केवळ यांसच अंकगणित रूपाची बरोबरी ह्मणावी असें नाहीं, परंतु जवळ जवळचा बरोबरीसहि* अंकगणित रूपाची बरोबरी ह्मणतात, ह्मणजे तें या पुढील उदाहरणांत दिसेल.

$$\frac{१}{१-\frac{१}{२}} \text{ अथवा } २=१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

आतां मनांत आण, कीं १ पेक्षां अ कमी आहे, परंतु अशी कल्पना कर कीं इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा १ चे जवळ असेल. आणि १ पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, ह्मणून शेवटील समीकरणाची अंकगणितरूपाची स्थिती होण्यास क्ष असा असण्याचें अगत्य आहे; यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{१}{१+\text{अ}}=१-\text{अ}+\text{अ}^{२}-\text{अ}^{३}+\text{ इत्यादि} \\ \frac{१}{१-\text{क्ष}}=१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+\text{ इत्यादि} \end{array}\right\} \text{ अंकगणित रूपानें } \begin{array}{l} \cdots\cdots(१) \\ \cdots\cdots(२) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{१}{१+\text{अ}}\cdot\frac{१}{१-\text{क्ष}} = & १+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+\text{ इत्यादि} \\ & -\text{अ}-\text{अक्ष}-\text{अक्ष}^{२}-\text{ इत्यादि} \\ & +\text{अ}^{२}+\text{अ}^{२}\text{क्ष}+\text{ इत्यादि} \\ & -\text{अ}^{३}-\text{ इत्यादि} \end{array}$$

$$\text{अ} > \text{क्ष. अशे कल्पनेनें} = १-(\text{अ}-\text{क्ष})+(\text{क्ष}^{२}-\text{अक्ष}+\text{अ}^{२})-\text{ इत्यादि}$$

---

* एथें अंकगणिताची मर्यादा सुटत नाहीं. ह्मणजे $\sqrt{१०}$, $\sqrt[३]{११}$ इत्यादि यांस जवळ जवळ याशिवाय दुसरी स्थिति नाहीं; असे अपूर्णांक काढितां येतात जे परस्पर गुणून इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे १०चे जवळ जवळ होतील, आणि १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, इत्यादि पदांचो बेरीज घेतल्यानें इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी २ चे जवळ जवळ होईल.

$$=\frac{अ+क्ष}{अ+क्ष}-\frac{अ^2-क्ष^2}{अ+क्ष}+\frac{अ^3+क्ष^3}{अ+क्ष}-\text{इत्यादि}$$

$$=\frac{अ-अ^2+अ^3-\text{इत्यादि}}{अ+क्ष}+\frac{क्ष+क्ष^2+क्ष^3+\text{इत्यादि}}{अ+क्ष}$$

$$=\frac{अ}{१+अ}\cdot\frac{१}{अ+क्ष}+\frac{क्ष}{१-क्ष}\cdot\frac{१}{अ+क्ष}$$

१ पेक्षां अ कमी घेतला, मग तो कितीहि थोडा असला तरी कांहीं चिंता नाहीं, तर अशी कल्पना आहे तोंपर्यंत वरची कृति अंकगणित रूपाची आहे; परंतु अ=१ अशी कल्पना करितांच वरचे (१) या समीकरणाचें अंकगणितरूप नाहींसें होतें. तथापि या शेवटील समीकरणाचें रूप ३२८ पृष्ठाचे समीकरणाप्रमाणें होतें.

फार सरळ पक्ष वर दाखविला, परंतु पुरती विस्तार कृति करून आणि तऱ्हेतऱ्हेचा क्लृप्ती घेऊन, कोणत्याहि बीजगणितरूप बरोबरीला अंकगणितरूप बरोबरीस आणितां येईल. परंतु असें करायास एकदांच तोंकडी आणि साधारण अशी रीति अद्यापि शिकणारास समजणार नाहीं.

मनांत आण, कीं पहिल्यानें क्ष धन आहे. नंतर त्यास ० होऊं दे, आणि त्यानंतर तो ऋण होऊं दे. तर हा पुढील कोष्टक आणि त्यासारिखे दुसरे कोष्टक होतील.

	क्षचें चिन्ह	+	०	−
$\frac{1}{क्ष}$	याचें चिन्ह	+	∞	−
$क्ष^3$	.....	+	०	−
$\frac{1}{क्ष^3}$	.....	+	∞	−
$क्ष^2$	.....	+	०	+
$\frac{1}{क्ष^2}$	....	+	∞	+

या आणि याशिवाय दुसऱ्या उदाहरणांपासून, हें पुढील मूळ कारण निघतें; जर क्ष, अपासून बकडे त्यांचे मधील सर्व किमतीं-

तून जातानां क्षचे फङ्क्शनाचें चिन्ह धनापासून ऋणाकडे जातें, अथवा ऋणापासून धनाकडे जातें, तेव्हां जा ठिकाणीं तो फेर होतो, ती जागा क्षची किंमत शून्य किंवा अनंत या चिन्हांनीं दर्शवितात; परंतु याचीं उलट ह्मणजे फङ्क्शनाची किंमत जेव्हां शून्य किंवा अनंत होत्ये, तेव्हां त्याचें चिन्ह नेहेमी बदलावें ही गोष्ट खरी नाहीं.

यांत जी अनंतता सांगीतली ती $\frac{अ}{०}$ या रूपाची आहे; परंतु पूर्वीं पाहिलें, कीं अंकगणितरूप अनंतता संपादायास ह्मणजे अंक अनियत वाढविण्याचा सगळ्या अंकगणितानुरूप रीति, $\frac{अ}{०}$ याणें योग्य दर्शविल्या जात नाहींत. जर हें पुढील समीकरण घेतलें,

$$\frac{१}{१-क्ष} = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

तर पहाण्यांत येतें, कीं जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तेव्हां अंकगणितरूपाचे भाषेप्रमाणें समीकरणाची दुसरी बाजू अनियत अंक सांपडायाची रीति मात्र दाखविती, आणि पहिली बाजू ऋण होत्ये. $\frac{१}{२}$ पासून २पर्यंत जेव्हां क्ष जातो तेव्हां चिन्हाची बदल होती असें मनांत आण, आणि जेव्हां क्ष=१ होतो तेव्हां ती बदल होती, तिजपासून याप्रमाणें होतें.

$$२ = १+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+ \text{ इत्यादि.}$$
$$\frac{१}{०} = १+१+१+१+ \text{ इत्यादि.}$$
$$-\frac{१}{१} = १+२+४+८+ \text{ इत्यादि.}$$

यामुळें असें दिसतें, कीं चढती श्रेणी ऋण परिमाणाची बीजगणितानुरूप दर्शक होईल; परंतु

$$\frac{१}{१-क्ष^{२}} = १+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

यांत १पेक्षां क्ष मोठा असेल, तेव्हां ही श्रेणी चढती आहे, आणि सर्व पक्षांत आपासून त्याचें उत्तर धन येईल. यापासून असें दिसतें, कीं जर अनंत श्रेणीविषयीं विचार आहे, आणि सांगीतली बरोबरी शुद्ध बीजगणित रूपाची आहे, तेव्हां कोणत्याहि अंकगणित रूपाचे ताडण्याचे रितीनें परिमाणाचें ताडणें होणार नाहीं. ह्मणजे, जर

अंकगणित आणि बीजगणित यांतील बरोबरी शब्दाचे अर्थाविषयीं.

अ' पेक्षां अ मोठा असेल, ब' पेक्षां ब मोठा असेल, इत्यादि तर असें ह्मणवतें, कीं अ'+ब'+ इत्यादि यांपेक्षां अ+ब+ इत्यादि मोठे आहेत; परंतु पहिल्यानें दोहोंचीं पदें जोंपर्यंत नियमित आहेत; आणि दुसऱ्यानें अ, ब, इत्यादि यांचा संबंध असा असावा कीं अ+ब+ इत्यादि सांगितलेल्या नियततेचे वर जाणार नाहीं, तर वरची गोष्ट घडेल, परंतु जेव्हां अ+ ब+ इत्यादि अनियत वाढतात, तेव्हां वरचे सारिखा सारांश काढवत नाहीं; आणि या कारणास्तव १+२+४+८ इत्यादि यांची बीजगणितानुरूप पद्धति १+$\frac{१}{२}$+$\frac{१}{४}$+ इत्यादि या पद्धतीपेक्षां अधिक आहे असेंहि ह्मणवत नाहीं.

ही वरची रीति कधीं सोडिली जात नाहीं, कां कीं परिमाणावर जो तर्क चालवावा तो तर्क लागू न होई असें झाल्याचे पूर्वीं जें परिमाण घेतलेलें असतें तें अंकगणिताचे विषयाचे बाहेर जातें. **तर लक्ष्यांत ठेवावें कीं चढत्या श्रेणीविषयीं, जीं उत्तरें बरोबरीचा अशा नियत बीजानुरूप पद्धतींचे ताडण्यापासून निघतात तीं घेतात, त्यांशिवाय दुसरीं कोणतींहि ताडण्यापासून निघालेलीं उत्तरें मान्य केलीं जात नाहीं.**

दहावा अध्याय.

फङ्शनगणिताविषयीं.

क्षचें **फङ्शन** ह्मणजे काय तें पूर्वींच सातवे अध्यायाचे **पहिल्ये पृष्ठांत** सांगीतलें ; एकाद्या अव्यक्त फङ्शनास नियमित चिन्ह देण्याचें असतें, अथवा फङ्शनास संक्षेपरूपानें मांडण्याचें असतें, ह्मणून या अध्यायांत फङ्शनास मांडण्याची रीति दाखविली आहे.

क्ष^{२}+ अक्ष इत्यादि पद्धतींत जा रितीनें क्ष येतो, त्या रितीविषयीं आणि क्षचे किंमतींविषयीं मात्र विचार करणें असतो, परंतु जा रितीनें अ अथवा त्याची किंमत त्या पद्धतींत येती, याजविषयीं विचार करायाचा नसतो, तेव्हां त्या पद्धतीस क्षचें फङ्शन असें ह्मणतों, आणि जसा गुणक मांडितात त्याप्रमाणें क्षचा मागें कांहीं अक्षर मांडून तें फङ्शन दाखवितों. परंतु हें फङ्शन चिन्ह आणि दुसरें कोणतेंहि गुणक चिन्हें या दोहोंचा गोंधळ चुकविण्याकरितां, फङ्शन चिन्हें दाखविण्यास कांहीं अक्षरें निराळीं घेतलेलीं असतात, आणि तीं गुणक दाखवायास घेत नाहीं. या ग्रंथांत **फ**, **फ़**, ℘, ψ अशीं चिन्हें घेतलीं आहेत. ह्मणजे वेंगळाले पक्ष दाखविण्याविषयीं **फ** क्ष, **फ़** क्ष, ℘ क्ष, ψ क्ष, हीं चिन्हें केवळ क्षचिं फङ्शनें आहेत असें जाणावें, तें फङ्शन दिलेलें असो अथवा नसो. **फ** ℘ क्ष याचा अर्थ हाच, कीं जसा **फ** क्ष हा क्षचें फङ्शन आहे, तसा **फ** ℘ क्ष हें ℘ क्षचें फङ्शन आहे ; ह्मणजे जर **फ** क्ष=क्ष +क्ष^{२}, तर **फ** ℘ क्ष हा ℘ क्ष+(℘ क्ष)^{२} आहे.

उदाहरणें ℘ क्ष = १+क्ष^{२} **फ** क्ष = १−क्ष^{२} असें घे, तर

फ ℘ क्ष = १−(१+क्ष^{२})^{२} = −२क्ष^{२}−क्ष^{४}

℘ **फ** क्ष = १+(१−क्ष^{२})^{२} = २−२क्ष^{२}+क्ष^{४}

ϕ क्ष = क्ष^{अ} असें घे, तर ϕ(१+क्ष)=(१+क्ष)^{अ} ϕ(२क्ष)=(२क्ष)^{अ}
ϕ (अ)=अ^{अ} ब=ब^{अ} इत्यादि

समीकरणांतील क्षचा प्रत्येक किंमतीविषयीं एक किंवा अनेक फङ्‌शनें जीं अवश्य खरीं आहेत, त्या समीकरणास **फङ्‌शनानुरूप समीकरण** ह्मणतात. जसें जर ϕक्ष=अक्ष, तर ϕ(बक्ष)=अबक्ष =ब×ϕक्ष, अथवा

ϕ(बक्ष)=बϕक्ष

जेव्हां ϕक्ष याचा अर्थ अक्ष आहे, तेव्हां वरचें समीकरण नेहमी खरें आहे.

यावरून हीं पुढील समीकरणें काढितां येतील;

जर ϕक्ष=क्ष^{अ}	तर	ϕक्ष×ϕय=ϕ(क्षय)
ϕक्ष=अ$^{क्ष}$	तर	ϕक्ष×ϕय=ϕ(क्ष+य)
ϕक्ष=अक्ष+ब	तर	$\frac{\phi क्ष-\phi य}{\phi क्ष-\phi ज्ञ}=\frac{क्ष-य}{क्ष-ज्ञ}$
ϕक्ष=अक्ष	तर	ϕक्ष+ϕय=ϕ(क्ष+य)

जा बीजगणित रूपानें एकादें फङ्‌शनानुरूप समीकरण स्थापिलें जातें तें रूप त्या समीकरणापासून नेहमी काढितां येतें; उदाहरण, जर ϕ(क्षय)=क्ष×ϕय असें आहे, आणि हें सर्वदां खरें आहे असें कल्पिलें, तर जेव्हां य=१ असेल तेव्हांहि खरें होईल, आणि त्यापासून ϕ(क्ष)=क्ष×ϕ(१) असें होईल. परंतु ϕ क्ष यांत क्षचे ठिकाणीं १ मांडिल्यानें ϕ(१) हें अन्यसंबंधरहित परिमाण होतें, त्यास क ह्मण; तर कची कोणती एकादि किंमत त्या समीकरणास स्थापील किंवा नाहीं, इतकें मात्र पहाण्याचें राहिलें आहे. ϕक्ष=कक्ष घे; तर ϕ(क्षय)=कक्षय आणि क्ष×ϕय= क्ष×कय= कक्षय; यावरून कचा सर्व किंमतीविषयीं ϕ(क्षय)=क्षϕय, आणि ϕक्ष हा कक्ष आहे, ϕ(१) हा क×१ अथवा क पूर्वीचे कल्पनेप्रमाणेंच आहे. त्याचप्रमाणें,

जर $\phi क्षय=(\phi क्ष)^{य}$ तर $क्ष=१$ केल्यानें या पुढीलप्रमाणें होतें

$$\phi य=\{\phi(१)\}^{य}=क^{य} \qquad \phi क्ष=क^{क्ष}$$

$$\phi(क्षय)= क^{क्षय} =(क^{क्ष})^{य}=(\phi क्ष)^{य}$$

आणि $\phi(१)=क^{१}=क$, हें पूर्वींचे कल्पनेप्रमाणें आहे. फङ्शन संबंधीं जें यांत लिहिण्याचें पडेल त्याची माहितगारी होण्यास हा आणि पुढला सिद्धांत पुरेसा आहे.

पूर्वीं पाहिलें कीं जर $\phi क्ष=क^{क्ष}$, तर $\phi क्ष\times\phi य=\phi(क्ष+य)$ असें होतें; परंतु जांचा योगानें असे गुण होतील अशीं क्षचीं दुसरीं कांहीं फङ्शनें आहेत कीं नाहीं, हें अद्यापि समजत नाहीं. तथापि याचे उलटें आतां सिद्ध करून दाखवितों, ह्मणजे, $\phi क्ष\times\phi य=\phi(क्ष+य)$ हें समीकरण $क^{क्ष}$ अशेरूपाचें फङ्शन असल्या शिवाय क्षचा कोणत्याहि फङ्शनानें स्थापिलें जाणार नाहीं.

$$\phi क्ष\times\phi य=\phi(क्ष+य) \cdots\cdots (अ)$$

मनांत आण, कीं यांत $\phi क्ष$ हें अशे जातीचें फङ्शन आहे, कीं क्ष **आणि य यांचा कशाहि किमती असोत** तरी वरचें समीकरण खरें होईल. यचे ठिकाणीं अ+ब मांड, त्यापासून हें होईल

$$\phi क्ष\times\phi(अ+ब)=\phi(क्ष+अ+ब)$$

परंतु वर लिहिल्याप्रमाणें (अ) समीकरणापासून $\phi(अ+ब)=\phi अ\times\phi ब$, यावरून

$$\phi क्ष\times\phi अ\times\phi ब=\phi(क्ष+अ+ब)$$

यांत कोणत्याहि अक्षराचे जागीं ह्मणजे एथे अचे जागीं क+इ मांड. यापासून हें होईल

$$\phi क्ष\times\phi(क+इ)\times\phi ब=\phi(क्ष+क+इ+ब)$$

परंतु $\phi(क+इ)=\phi क\times\phi इ$

यावरून $\phi क्ष\times\phi क\times\phi इ\times\phi ब=\phi(क्ष+क+इ+ब)$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणजे जर हय़ा त्या किमतीचीं न पदें असतील, ह्मणजे, $अ_१, अ_२, अ_३, \cdots अ_{न-१}, अ_न$, असें असेल, तर पुढीलप्रमाणें होईल

$$\phi अ_१ \times \phi अ_२ \cdots \times \phi अ_{न-१} \times \phi अ_न = \phi(अ_१ + अ_२ + अ_३ + \cdots + अ_{न-१} + अ_न)$$

आतां हीं न परिमाणें परस्परांचा बरोबर असून प्रत्येक अचे बरोबर आहे अशी कल्पना कर. यापासून हें होईल

$$\left\{\begin{matrix} \phi अ \times \phi अ \times \cdots \times \phi अ \times \phi अ \\ \text{न पदापर्यंत} \end{matrix}\right\} = \phi \left(\begin{matrix} अ + अ + अ + \cdots + अ + अ \\ \text{न पदापर्यंत} \end{matrix}\right)$$

अथवा $$(\phi अ)^न = \phi(नअ)$$

यांत न कांहीं पूर्णांक आहे*.

या सारिखेंच, जर म परिमाणें प्रत्येक बचे बरोबर आहेत अशी कल्पना केली, तर याप्रमाणें होईल

$$(\phi ब)^म = \phi(मब)$$

म आणि न हे दोन्हीं पूर्णांक आहेत, ह्मणून आतां मब = नअ आहे अशी कल्पना घे, तर याप्रमाणें होईल

$$\phi(मब) = \phi(नअ) \text{ अथवा} (\phi ब)^म = (\phi अ)^न$$

अथवा $$\phi ब = (\phi अ)^{\frac{न}{म}} \text{ परंतु } ब = \frac{न}{म} अ$$

तर $$\phi\left(\frac{न}{म} अ\right) = (\phi अ)^{\frac{न}{म}}$$

अथवा जेव्हां प पूर्णांक आहे, अथवा १९२ पृष्ठाप्रमाणें तो सममान अपूर्णांक आहे, तेव्हां $\phi(पअ) = (\phi अ)^प$. हेंहि समीकरण खरें आहे.

वरचे (अ) समीकरणांत, क्ष = ० आणि य = ० असें घे, यावरून क्ष+य = ०. $\phi(०)$ यास क ह्मण, तेव्हां याप्रमाणें होईल, क×क = क, अथवा क = १. नंतर य = −क्ष, अथवा क्ष+य = ० असें घे, तर याप्रमाणें होईल

* वरची कृति अपूर्णांकास लागू होईल असें कल्पवत नाहीं. १०४ आणि १०५ पृष्ठ पहा.

$$\phi क्ष \times \phi(-क्ष) = \phi(०) = १ \text{ अथवा } \phi(-क्ष) = \frac{१}{\phi क्ष};$$

हें समीकरण क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं खरें आहे, ह्मणजे प पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल, आणि क्षचे जागीं पअ मांडिला, तर त्याविषयीं हें समीकरण खरें आहे. असें केल्यानें याप्रमाणें होईल

$$\phi(-पअ) = \frac{१}{\phi पअ} = \frac{१}{\phi(अ)^{प}} = \phi अ^{-प}$$

अथवा जर प ऋण पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल तेव्हां हें पुढील समीकरण खरें आहे,

$$\phi(पअ) = (\phi अ)^{प}$$

यावरून, २४० पृष्ठाप्रमाणें, अ = १ असें करून, जर प सममान जाती असेल, तर ही पुढील गोष्ट सिद्ध होईल.

$$\phi(प) = क^{प}$$

यांत क कोणतेंहि परिमाण असो.

जेव्हां प असममान परिमाण असेल, जसें $\sqrt{२}$, $\sqrt[३]{४}$, इत्यादि, तरी वरचें समीकरण खरें आहे; परंतु या समीकरणाचा सारांशाशीं अशे रितीनें कृति करितां येईल; कीं त्याचा ताळा दाखविण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं.

अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

$$\phi(क्ष+य) + \phi(क्ष-य) = २\phi क्ष \times \phi य$$

हें समीकरण अचे प्रत्येक किमतीविषयीं या पुढील समीकरणानें स्थापलें जाईल, हें दाखीव;

$$\phi क्ष = \frac{१}{२}(अ^{क्ष} + अ^{-क्ष})$$

आणि

$$\phi(क्ष+य) = \phi क्ष + \phi य$$

यास या पुढील समीकरणावांचून दुसरें कांहीं उत्तर नाहीं हें दाखीव ह्मणजे

$$\phi क्ष = अक्ष$$

अकरावा अध्याय.

द्वियुक्पदसिद्धांताविषयीं.

$(अ+ब)^{न}$ यांस अ आणि ब यांचे घातांप्रमाणें श्रेणींत विस्तार करण्याचे रितीला द्वियुक्पदसिद्धांत असें नाव दिलेलें आहे, ती श्रेणी नियत किंवा अनियत जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणें असो, आणि न घातप्रकाशक हा पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण, सममान किंवा असममान असो.

$(१+क्ष)^{न}$ यास क्षचे घातांचे श्रेणींत विस्तार करण्याप्रमाणें वरचे पक्षाचा विस्तार केला आहे; कां कीं

$$अ+ब=अ\left(१+\frac{ब}{अ}\right) \qquad (अ+ब)^{न}=अ^{न}\left(१+\frac{ब}{अ}\right)^{न}$$

$क्ष=\frac{ब}{अ}$ असें घे, तर $(१+क्ष)^{न}$ हें विस्तार करण्याचें फङ्क्शन आहे.

हा सिद्धांत फार उपयोगाचा आहे, यासाठीं त्याचे सिद्धतेचा दोन रिती दाखवितों; पहिली, पृथक्करणाची रीति, ह्मणजे तींत असा शोध करावा लागतो. कीं $(१+क्ष)^{न}$ याचे बरोबर श्रेणी ती कोणती आहे; दुसरी एकीकरण रीति, ह्मणजे तींत असें दाखविलें आहे, कीं जी श्रेणी पहिल्या रितीनें सांपडली ती इच्छिली श्रेणी आहे.

शक्य असेल, तर $(१+क्ष)^{न}$ ही क्षचीं पूर्ण घातांची श्रेणी या पुढील रूपाची असावी

$$(१+क्ष)^{न}=अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+ \text{इत्यादि}$$

यांत $अ_{०}$, $अ_{१}$, इत्यादि हीं नचीं फङ्क्शनें आहेत, आणि क्षचीं नाहींत.

लेम्मा. जसा ब अधिक अधिक अचे बरोबर होण्यास जवळ जवळ येतो, तसाच $\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}$, हा अपूर्णांक जा नियततेजवळ जवळ जातो, ती नियतता $नअ^{न-१}$ आहे, यांत नची किंमत कशीहि असो.

पहा कीं जेव्हां अ=ब आहे, तेव्हां वरचा अपूर्णांकाचें $\frac{0}{0}$ असें रूप होतें, २८० पृष्ठ पहा.

पहिल्यानें, न पूर्णांक आहे अशी कल्पना कर. तर १९७ पृष्ठाप्रमाणें,

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}=अ^{न-१}+अ^{न-२}ब+अ^{न-३}ब^{२}+\cdots+अब^{न-२}+ब^{न-१}$$

जेव्हां अ आणि ब हे परस्पर बरोबर होण्यास जवळ येतात, तेव्हां वरचे समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूची नियतता या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$अ^{न-१}+अ^{न-२}अ+अ^{न-३}अ^{२}+\cdots\cdots+अअ^{न-२}+अ^{न-१}$$

अथवा. $अ^{न-१}+अ^{न-१}+अ^{न-१}+\cdots\cdots+अ^{न-१}+अ^{न-१}$

अथवा $नअ^{न-१}$

बचे १ घातापासून न−१ घातपर्यंत प्रत्येक घाताविषयीं एक **एक पद आहे, आणि** एक पद **बशीं निराधार आहे, यावरून वरचे श्रेणीमध्यें न पदें आहेत हें स्पष्ट आहे.**

दुसऱ्यानें, न अपूर्णांक आहे अशी कल्पना कर, ह्मणजे $\frac{प}{क}$ असा आहे आणि त्यांत प, क, हे पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर याप्रमाणें होईल

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}=\frac{अ^{\frac{प}{क}}-ब^{\frac{प}{क}}}{अ-ब}=\frac{\left(अ^{\frac{१}{क}}\right)^{प}-\left(ब^{\frac{१}{क}}\right)^{प}}{\left(अ^{\frac{१}{क}}\right)^{क}-\left(ब^{\frac{१}{क}}\right)^{क}}$$

$\left(अ^{\frac{१}{क}}=अ_{१}\text{ आणि }ब^{\frac{१}{क}}=ब_{१}\text{ असें घे}\right)$, तर वरची पद्धति $=\dfrac{अ_{१}^{प}-ब_{१}^{प}}{अ_{१}^{क}-ब_{१}^{क}}$

$$=\frac{\dfrac{अ_{१}^{प}-ब_{१}^{प}}{अ_{१}-ब_{१}}}{\dfrac{अ_{१}^{क}-ब_{१}^{क}}{अ_{१}-ब_{१}}}$$

आतां, जसा बचे जवळ अ होत जातो, तसा $ब_{१}$ चे जवळ $अ_{१}$ होत जातो.

आणि प आणि क हे पूर्णांक आहेत, ह्मणून वरचे अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांचा नियतता $पअ_{१}^{प-१}$ आणि $कअ_{१}^{क-१}$ आहेत; यावरून वरचे अपूर्णांकाची नियतता ही आहे,

$$\frac{पअ_{१}^{प-१}}{कअ_{१}^{क-१}}, \text{ अथवा } \frac{प}{क}अ_{१}^{प-क} \text{ अथवा } \frac{प}{क}\left(अ^{\frac{१}{क}}\right)^{प-क} \text{ अथवा } \frac{प}{क}अ^{\frac{प}{क}-१} \text{ अथवा, } नअ^{न-१}$$

तिसऱ्यानें, न ऋण आहे अशी कल्पना कर, आणि त्याचे जोडीचें धन परिमाण प असावें, असें कीं न $=-$ प होईल. तर

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब} = \frac{अ^{-प}-ब^{-प}}{अ-ब} = \frac{\frac{१}{अ^{प}}-\frac{१}{ब^{प}}}{अ-ब} = \frac{१}{अ^{प}ब^{प}}\cdot\frac{ब^{प}-अ^{प}}{अ-ब}$$

$$= -\frac{१}{अ^{प}ब^{प}}\times\frac{अ^{प}-ब^{प}}{अ-ब}$$

जसा ब कडे अ येत जातो, तशी वरची प्रथम गुणक पदाची नियतता $-\frac{१}{अ^{प}अ^{प}}$ अथवा $-अ^{-२प}$ होईल, आणि प धन आहे, तर पूर्वी सिद्ध केल्याप्रमाणें वरचे दुसऱ्या गुण्य पदाची नियतता $पअ^{प-१}$ आहे. यावरून वरचे गुणाकाराची नियतता $-अ^{-२प}\times पअ^{प-१}$ अथवा $-पअ^{-प-१}$, आणि न $=-$ प आहे तर या नियततेचें रूप $नअ^{न-१}$ होईल.

आतां पूर्वीं कल्पिलेली श्रेणी पुनः घेतों,

$(१+क्ष)^{न}=अ_{०}+अ_{१}\,क्ष+अ_{२}\,क्ष^{२}+अ_{३}\,क्ष^{३}+$ इत्यादि

इच्छेप्रमाणें क्षचे हवें तेवढें जवळ करितां येईल असें एक य परिमाण घे; क्षचे सर्व किमतीविषयीं वरची श्रेणी खरी आहे अशी कल्पना केल्यावरून, क्षचे जागीं य मांडितां येईल, तर याप्रमाणें होईल

$(१+य)^{न}=अ_{०}+अ_{१}\,य+अ_{२}\,य^{२}+$ इत्यादि

$(१+क्ष)^{न}-(१+य)^{न}=अ_{१}\,(क्ष-य)+अ_{२}(क्ष^{२}-य^{२})+$ इत्यादि

याचे दोन बाजूंस, क्ष–य, अथवा (१+क्ष)–(१+य) यांणीं भाग.

$$\text{तर }\frac{(१+क्ष)^{न}-(१+य)^{न}}{(१+क्ष)-(१+य)} = अ_{१}+अ_{२}\frac{क्ष^{२}-य^{२}}{क्ष-य}+अ_{३}\frac{क्ष^{३}-य^{३}}{क्ष-य}+\text{ इत्यादि.}$$

याचा दोन्ही बाजू नेहेमी बरोबर आहेत, आणि जसे क्ष आणि य हे बरोबर होण्यास जवळ येत जातात, तसा १+क्ष आणि १+य हे बरोबर होण्यास जवळ होत जातात, यावरून त्या दोन बाजूंचा नियतता बरोबर आहेत; अथवा

$$न\,(१+क्ष)^{न-१} = अ_{१}+२अ_{२}क्ष+३अ_{३}क्ष^{२}+\text{ इत्यादि}$$

याचा दोन्ही बाजू १+क्ष यार्णी गुण. तर

$$न(१+क्ष)^{न} = अ_{१}+२अ_{२}क्ष+३अ_{३}क्ष^{२}+४अ_{४}क्ष^{३}+\text{ इत्यादि}$$
$$+\; अ_{१}क्ष+२अ_{२}क्ष^{२}+३अ_{३}क्ष^{३}+\text{ इत्यादि}$$

परंतु

$$न\,(१+क्ष)^{न} = न\,अ_{०}+नअ_{१}क्ष+नअ_{२}क्ष^{२}+नअ_{३}क्ष^{३}+\text{ इत्यादि}$$

यामुळें, ३१७ पृष्ठाप्रमाणें

$$अ_{१} = नअ_{०},\; २अ_{२}+अ_{१} = नअ_{१},\text{ अथवा } अ_{२} = \frac{न-१}{२}अ_{१} = न\frac{न-१}{२}अ_{०}$$
$$३अ_{३}+२अ_{२} = नअ_{२}\text{ अथवा } अ_{३} = \frac{न-२}{३}अ_{२} = न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}अ_{०}$$
$$४अ_{४}+३अ_{३} = न\,अ_{३}\text{ अथवा } अ_{४} = \frac{न-३}{४}अ_{३} = न\,\frac{न-१}{२}\,\frac{न-२}{३}\,\frac{न-३}{४}अ_{०}$$

या सर्व पदांत $अ_{०}$ साधारण गुणक आहे, हें पाहून त्यास ही क्षची किंमत कल्पिलेल्ये श्रेणींत मांडून याप्रमाणें होईल

$$(१+क्ष)^{न} = अ_{०}\left(१+नक्ष+न\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+न\frac{न-१}{२}\frac{न-२}{३}क्ष^{३}+\text{ इत्यादि}\right)$$

यांत $अ_{०}$ याचा अद्यापि निश्चय झाला नाहीं. तो निश्चय करायाकरितां पहिल्यानें पाहिलें पाहिजे, कीं वरची श्रेणी कधीं उतरती होत जाती कीं नाहीं.

परंतु अगोदर लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जी गोष्ट सिद्ध झाली ती योग्य ह्मणण्याप्रमाणें, वरचे समीकरणाची सिद्धता नाहीं, परंतु हें मात्र आहे, कीं **जर $(१+क्ष)^{न}$ हीचा क्षचे पूर्ण घाताचे कोणत्याहि श्रेणींत सर्वदां विस्तार करितां येईल, तर ती श्रेणी वरची आहे.** कारण अशी कल्पना घेतली, कीं $(१+क्ष)^{न} = अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+$

इत्यादि आहे, परंतु असें कदाचित् घडेल, कीं जी श्रेणी कल्पायास योग्य ती अपूर्णांकाची किंवा ऋण, किंवा मिश्रघातांची असावी.

पूर्वींचा शोधामध्यें, जेव्हां अशक्यरूपाची कल्पना घेतली, तेव्हां कृतीचे शेवटास ज्याचा अर्थ सांगीतला नाहीं असा कांहीं नवा उलटा विषय दृष्टीस पडल्यावरून, त्या अशक्य रूपाचे कल्पनेची सूचना झाली. जा श्रेणीस खरी असें सिद्ध करण्यास कल्पना अथवा अनुभव होता, त्या शिवाय दुसऱ्ये श्रेणीची कल्पना या पूर्वीं घेतली नाहीं, आणि जी श्रेणी तयार झाली आहे तिचा खऱ्येपणाविषयीं अनुभव अथवा कारणहि नाहीं, यावरून आपण खरे चालतों हें कळत नाहीं अथवा आपल्ये खोट्येपणाची सूचना कोणती तीहि कळत नाहीं. जर कांहीं चूक झाली असेल, तर त्या चुकीनंतर श्रेणीचा निरंतर चढतेपणा दृष्टीस पडेल. याजकरितां वरची श्रेणी शोधून पहातों.

वेगळालीं पदें जीं त्यांचे पूर्वींचे पदाशीं प्रमाणें ठेवितात तीं याप्रमाणें आहेत,

नक्ष, $\frac{न-१}{२}$ क्ष, $\frac{न-२}{३}$ क्ष, $\frac{न-३}{४}$ क्ष इत्यादि

याचें साधारण रूप हें होतें

$$\frac{(प+२)\text{ पद}}{(प+१)\text{ पद}} = \frac{न-प}{प+१}\text{क्ष}$$

पहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं जर न धन पूर्णांक असेल, तर श्रेणी नियत आहे; कां कीं (न+२) या आणि याचे पुढचे सगळ्ये पदांत न–न अथवा ०, गुणक स्थळीं येईल. यामुळें जा पक्षांत न अपूर्ण किंवा ऋण येतो असा पक्ष घेतों. जेव्हां प, नचे पार गेला आहे तेव्हां श्रेणीचें मागलें प्रमाण नेहेमी ऋण होईल, आणि त्यावरून असें दिसेल, कीं श्रेणीचीं एकाआड एक पदें धन आणि ऋण होत जातील; कां कीं जेव्हां दोन परिमाणांचें प्रमाण ऋण आहे, त्यावरून त्या परिमाणांचीं चिन्हें भिन्न आहेत असें कळतें. मागील पदाचें चिन्ह सोडून दे आणि त्यास धन कर. वरचे श्रेणीचीं पदें एकाआड एक धन आणि ऋण आहेत तिचा जोडीची धन पदांची श्रेणी जर उतरती करितां येईल तर ती श्रेणीहि उतरती करितां येईल, हें पहाण्याचा अभिप्राय आहे, ह्मणून वरची गोष्ट करितां येईल. यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल

$$\frac{प-न}{प+१} क्ष \text{ अथवा } \frac{पक्ष}{१+प} - \frac{नक्ष}{१+प} \text{ अथवा } \frac{क्ष}{१+\frac{१}{प}} - \frac{नक्ष}{१+प}$$

जशीं जशीं मोठालीं पदें घेतों, तसें तसें वरचें दुसरें पद अनियत घटत जातें, आणि पहिल्याची नियतता क्ष होती. यामुळें जर १पेक्षां क्ष कमी आहे तर वर लिहिलेलें प्रमाण, कांहीं पदानंतर १पेक्षां कमी होईल, आणि नंतर तेंच प्रमाण क्ष नियततेचा जवळ क्रमानें येईल. ह्मणजे जेव्हां १पेक्षां क्ष कमी आहे तेव्हां ती मिळालेली श्रेणी नेहेमी उतरती आहे.

असा पक्ष खरा आहे तर, **३१८ पृष्ठाप्रमाणें**, क्ष =० असें केल्यानें त्यापासून जें उत्तर निघतें तें कामांत आणितां येईल, आणि त्यापासून $(१)^{न}=अ_{०}$ असें होईल. जर न पूर्णांक असेल, तर $अ_{०}=१$; परंतु जर न अपूर्णांक असेल, जसा $\frac{प}{क}$, तर $(१)^{\frac{प}{क}}=अ_{०}= (१^{प})^{\frac{१}{क}}= (१)^{\frac{१}{क}}$, ह्मणजे $अ_{०}$ हा १चें कोणतेंहि क मूळ होईल; **२१२ पृष्ठ पहा.** जर त्याचें अंकगणितरूप मूळ घेतलें, तर $अ_{०}=१$ असें निघतें; आणि जर संशयाची पहिल्यानें कल्पिलेली श्रेणी खरी असेल, तर जेव्हां १पेक्षां क्ष कमी आहे, तेव्हां ही श्रेणी १+क्ष याचा अंकगणितरूपाचा न घात आहे अथवा सर्व पक्षांत $(अ+क्ष)^{न}$ याचे बीजगणित रूपाचे बरोबरीचा आहे.

जेव्हां न पूर्णांक आहे तेव्हां वरची श्रेणी खरी आहे असें दाखवितों. कोणत्याहि पूर्णांकाविषयीं ती खरी आहे अशी कल्पना कर, आणि तो पूर्णांक दाखवायासाठीं म घे. तर $अ_{०}$ हा १ असून याप्रमाणें होईल.

$$(१+क्ष)^{म}=१+मक्ष+म\frac{म-१}{२}क्ष^{२}+म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

दोन्ही बाजू १+क्ष यांणीं गुण.

$$(१+क्ष)^{म+१}=१+मक्ष+म\frac{म-१}{२}क्ष^{२}+म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$

$$+क्ष+म\quad क्ष^{२}+म\frac{म-१}{२}\quad क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$

$$=१+(म+१)क्ष+\left(म\frac{म-१}{२}+म\right)क्ष^{२}+\left(म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}+म\frac{म-१}{२}\right)क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि.}$$

परंतु $म\frac{म-१}{२}+म=म\left(\frac{म-१}{२}+१\right)=म\frac{म+१}{२}=(म+१)\frac{म}{२}$

$$म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}+म\frac{म-१}{२}=म\frac{म-१}{२}\left(\frac{म-२}{३}+१\right)=(म+१)\frac{म}{२}\,\frac{म-१}{३}$$

यावरून

$(१+क्ष)^{म+१}=१+(म+१)क्ष+(म+१)\frac{म}{२}क्ष^{२}+(म+१)\frac{म}{२}\,\frac{म-१}{३}क्ष^{३}+$इत्यादि.

आतां म+१ याचे जागीं न, अथवा मचे जागीं न−१ मांडिला असतां ही श्रेणी या पुढील श्रेणी सारिखीच, अथवा तिचाच नियमाप्रमाणें चालेल,

$(१+क्ष)^{न}=१+नक्ष+न\cdot\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+न\cdot\frac{न-१}{२}\,\frac{न-२}{२}क्ष^{३}+$ इत्यादि.

यावरून जर ही पद्धति नचे कोणत्याहि पूर्ण किमतीविषयीं खरी आहे; तर त्याचे जवळचे पुढल्या किमतीविषयींहि खरी आहे. परंतु जेव्हां न=१ असेल तेव्हां ही खरी आहे; कां कीं

$(१+क्ष)^{१}=१+१क्ष+१\cdot\frac{१-१}{२}क्ष^{२}+१\cdot\frac{१-१}{२}\cdot\frac{१-२}{३}क्ष^{३}+$ इत्यादि

यामुळें, जेव्हां न=२ तेव्हां खरी आहे; परंतु यामुळें जेव्हां न=३, तेव्हां खरी आहे, आणि याप्रमाणें पुढें अनंत पावेतों.

$(१+क्ष)^{न}$ ही नचें फङ्क्शन आहे, असें कल्पिलें, आणि तीस $\phi न$ ह्मटलें, तर दिसण्यांत येतें, कीं

$$(१+क्ष)^{न}\times(१+क्ष)^{म}=(१+क्ष)^{न+म}$$

अथवा $$\phi न\times\phi म=\phi(न+म)$$

परंतु जेव्हां न पूर्णांक आहे तेव्हां $(१+क्ष)^{न}$ ही इच्छिलेली श्रेणी आहे; यामुळें, जेव्हां न पूर्णांक आहे, आणि वरची श्रेणी $\phi न$ आहे, असें ह्मटलें, तेव्हां

$$\phi न\times\phi म=\phi(न+म)$$

अथवा

$$\left(१+नक्ष+न\cdot\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}क्ष^{३}+\text{इत्यादि}\right)$$
$$\times\left(१+मक्ष+म\cdot\frac{म-१}{२}क्ष^{२}+म\cdot\frac{म-१}{२}\cdot\frac{म-२}{३}क्ष^{३}+\text{इत्यादि}\right)$$
$$=१+(म+न)क्ष+(म+न)\frac{म+न-१}{२}क्ष^{२}+(म+न)\frac{म+न-१}{२}\cdot\frac{म+न-२}{३}क्ष^{३}+\text{इत्यादि}$$

केवळ गुणाकार कृतीनें, हें हवें तेवढें पुढें पावेतों सिद्ध करितां येईल; कां कीं पहिल्या दोन श्रेण्या परस्पर गुणिल्या असतां याप्रमाणें होईल.

$$\text{परंतु } न \cdot \frac{न-१}{२} + नम + म \cdot \frac{म-१}{२} = \frac{न^{२}-न+२नम+म^{२}-म}{२}$$

$$= \frac{(न+म)^{२}-(न+म)}{२} = (न+म)\frac{न+म-१}{२}$$

$$न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} + न \cdot \frac{न-१}{२} म + नम \frac{म-१}{२} + म \frac{म-१}{२} \cdot \frac{म-२}{३}$$

$$= \frac{न^{३}-३न^{२}+२न+३न^{२}म-३नम+३नम^{२}-३नम+म^{३}-३म^{२}+२म}{२\times३}$$

$$= \frac{(न+म)^{३}-३(न+म)^{२}+२(न+म)}{२\times३} = (न+म)\frac{न+म-१}{२} \cdot \frac{न+म-२}{३}$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. आतां हें पुढील मूळ प्रकर्ण सांगतों; जा पक्षांत पूर्णांकांचे जागीं अक्षरें असतां वर दाखविल्याप्रमाणें बीजगणितरूप गुणाकारावरून किंवा दुसरे कांहीं बीजगणितरूप कृतीवरून, एकादें खरें उत्तर निघतें, असें जेव्हां सिद्ध केलें जातें, तेव्हां अपूर्णांकाविषयीं, किंवा असममान अंकांविषयीं आणि अंक ऋण आहेत त्यांविषयीं हीं जीं अक्षरें घेतलीं त्यांपासून जें उत्तर निघतें तें त्याप्रमाणेंच खरें आहे. कां कीं पूर्णांकांविषयीं जीं उत्तरें खरीं आहेत, आणि जीं खरीं नाहींत यांचें तारतम्य पहाण्याची अद्यापि गरज पडली नाहीं; परंतु प्रवेशकांत सांगितल्याप्रमाणें पूर्णांक किंवा अपूर्णांकांचे जागीं अक्षरें घेतलीं तरी सगळ्या कृती खऱ्या आहेत. पूर्णांकाचे जागीं अक्षर घेतलें असतां, समीकरणांत एकादें पद होतें, परंतु जेव्हां अपूर्णांकाचे जागीं अक्षर घ्यावें तेव्हां तें पद नाहींसें होतें असा पक्ष कोणत्याहि कृतींत आला नाहीं. यामुळें म आणि न हे पूर्णांक असून गुणाकाराचे सरळ रितीनें, जर $\wp न \times \wp म = \wp (म+न)$ असें होईल, तर जेव्हां म आणि न अपूर्णांक असतील किंवा त्यांतून एक किंवा दोन्ही ऋण असतील, तेव्हां त्याच कृतीवरून $\wp(म+न)$ निघेल; यामुळें,

$$१+नक्ष+न\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि}$$

या श्रेणींत हाच गुण आहे, कीं जर ती, नचें फङ्क्शन आहे असें मानिलें, आणि त्यास $\wp न$ असें ह्मटलें असतां; तिचा योगानें सर्व पक्षांत हें पुढील समीकरण स्थापिलें जातें,

$$\wp न \times \wp म = \wp (म+न)$$

परंतु ३३९ पृष्ठावरून सिद्ध झालें, कीं वरचे समीकरणाचें उत्तर $\wp न = क^{न}$ असावें, यांत $क = \wp(१)$, आणि $\wp(१)$ याची किंमत या पुढीलप्रमाणें आहे असें दिसतें.

$$१+१क्ष+१\frac{१-१}{२}क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि अथवा } १+क्ष$$

यामुळें सर्व पक्षांत $\wp न = (१+क्ष)^{न}$ वर जा सिद्धांताविषयीं विचार झाला तो हा आहे.

वरची श्रेणी कामांत आणायाची, असेल तर पुढें चालायाचे पूर्वीं, न, $\frac{न-१}{२}$, $\frac{न-२}{३}$, इत्यादि वेगवेगळे गुणक काढावे ह्मणजे ही रीति सहज आणि सोपी होईल; जसें, न $=\frac{१}{२}$ असें घे, अथवा $\sqrt{१+क्ष}$ या द्वियुक्पदास श्रेणीचें विस्तार रूप देण्याचें आहे असें मनांत आण.

$न=\frac{१}{२}, \frac{न-१}{२}=-\frac{१}{४}, \frac{न-२}{३}=-\frac{१}{२}, \frac{न-३}{४}=-\frac{५}{८}$ · इत्यादि.

$\sqrt{१+क्ष}=१+\frac{१}{२}क्ष+(\frac{१}{२})(-\frac{१}{४})क्ष^{२}+(\frac{१}{२})(\frac{१}{४})(-\frac{१}{२})क्ष^{३}+(\frac{१}{२})(-\frac{१}{४})$
$\times(-\frac{१}{२})(-\frac{५}{८})क्ष^{४}+$ इत्यादि

$=१+\frac{१}{२}क्ष-\frac{१}{८}क्ष^{२}+\frac{१}{१६}क्ष^{३}-\frac{५}{१२८}क्ष^{४}+$ इत्यादि

जर न $=-१$ तर

$न=-१, \frac{न-१}{२}=-१, \frac{न-२}{३}=-१, \frac{न-३}{४}=-१$ इत्यादि

$(१+क्ष)^{-१}$ अथवा $\frac{१}{१+क्ष}=१+(-१)क्ष+(-१)(-१)क्ष^{२}+(-१)(-१)$
$\times(-१)क्ष^{३}+$ इत्यादि

$$=१-क्ष+क्ष^{२}-क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}$$

ही श्रेणी पूर्वीं सिद्ध झाली त्याप्रमाणेंच आहे

जर न $=५$, तर

$$न=५\quad \frac{न-१}{२}=२\quad \frac{न-२}{३}=१\quad \frac{न-३}{४}=\frac{१}{२}\quad \frac{न-४}{५}=\frac{१}{५}\quad \frac{न-५}{६}=०$$

$$(१+क्ष)^५=१+५क्ष+\begin{pmatrix}५\\ \times२\end{pmatrix}क्ष^२+\begin{pmatrix}५\\ \times२\\ \times१\end{pmatrix}क्ष^३+\begin{pmatrix}५\\ \times२\\ \times१\\ \times\frac{१}{२}\end{pmatrix}क्ष^४+\begin{pmatrix}५\\ \times२\\ \times१\\ \times\frac{१}{२}\\ \times\frac{१}{५}\end{pmatrix}क्ष^५+\begin{pmatrix}५\\ \times२\\ \times१\\ \times\frac{१}{२}\\ \times\frac{१}{५}\\ \times०\end{pmatrix}क्ष^६$$

$$=१+५क्ष+१०क्ष^२+१०क्ष^३+५क्ष^४+क्ष^५+०+०+ \text{इत्यादि}$$

जा पक्षांत घातप्रकाशक पूर्णांक आहे, तेव्हां द्वियुक्पदाचा सिद्धांत या पुढीलप्रमाणें सिद्ध करण्याची चाल आहे; क्ष+अ यास क्ष+ब यांणीं गुण, ह्मणजे $क्ष^२+(अ+ब)\,क्ष+अब$ असें होतें, आणि पुनः या गुणाकारास क्ष+क यांणीं गुणून, याप्रमाणें होईल

$$क्ष^३+(अ+ब+क)\,क्ष^२+(अब+बक+कअ)क्ष+अबक$$

यावरून दिसतें, कीं जर $अ_१, अ_२, \cdots अ_न$ अशीं न परिमाणें असतील, आणि जर सर्वांची बेरीज दाखविण्यासाठीं $प_१$ घेतला, आणि प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारांची बेरीज दाखविण्यासाठीं $प_२$ इत्यादि घेतले, ह्मणजे, जर,

$$प_१=अ_१+अ_२+अ_३+\cdots\cdots$$

$$प_२=अ_१\,अ_२+अ_२अ_३+अ_१अ_३+\cdots\cdots$$

$$प_३=अ_१\,अ_२अ_३+अ_१अ_३अ_४+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$प_{न-१}=\{अ_१$ यावांचून सर्वांचा गुणाकार$\}+\{अ_२$ यावांचून सर्वांचा गुणाकार$\}+\cdots$

$प_न$ =सर्वांचा गुणाकार;

याप्रमाणें घेतलें, तर या पुढीलप्रमाणें निघतें

$$(क्ष+अ_१)(क्ष+अ_२)\cdots(क्ष+अ_न)=क्ष^न+प_१क्ष^{न-१}+प_२क्ष^{न-२}+\cdots+प^{न-१}क्ष+प_न$$

$प_१$ यांत पदांची संख्या न आहे; आणि $प_२$ यामध्यें न परिमाणांतून २ परिमाणांचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे, अथवा **अंकगणित मूळपीठिकेचा २१० व्ये कलमाप्रमाणें** $न\cdot\frac{न-१}{२}$; $प_३$ यामध्यें न परिमाणांतून ३ परिमाणांचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे,अथवा $न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}$; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून जर अशी कल्पना केली, कीं $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि हीं सर्व परस्पर बरोबर असून प्रत्येक अचे बरोबर आहेत, तर याप्रमाणें होतें.

$$प_१ = अ + अ + अ + \cdots = न\,अ$$
$$प_२ = अ^२+अ^२+अ^२+\cdots = न\cdot\frac{न-१}{२}\,अ^२$$
$$प_३ = अ_३+अ_३+अ_३+\cdots = न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\,अ^३$$

. . . .

अथवा $\left\{\begin{array}{l}(क्ष+अ)(क्ष+अ)\cdots(क्ष+अ)\\ \text{जांत न गुणक आहेत}\end{array}\right\} \begin{array}{l}=क्ष^न+नअक्ष^{न-१}\\ +न\cdot\frac{न-१}{२}अ^२क्ष^{न-२}+ \text{इत्यादि.}\end{array}$

यांत, जर क्ष = १ असें कल्पिलें, तर याप्रमाणें होईल

$$(१+अ)^न=१+नअ+न\cdot\frac{न-१}{२}\,अ^२+ \text{इत्यादि.}$$

श्रेणीचे कोणत्येहि शेवटापासून आरंभिलें तर गुणक सारिखेच आहेत, याचें कारण अंकगणित मूळपीठिकेंतील २११ व्ये कलमावरून लक्षांत येईल. जसें या पुढील उदाहरणांतहि दिसेल.

$$(१+क्ष)^२ = १+२क्ष+क्ष^२$$
$$(१+क्ष)^३ = १+३क्ष+३क्ष^२+क्ष^३$$
$$(१+क्ष)^४ = १+४क्ष+६क्ष^२+४क्ष^३+क्ष^४$$
$$(१+क्ष)^५ = १+५क्ष+१०क्ष^२+१०क्ष^३+५क्ष^४+क्ष^५$$
$$(१+क्ष)^६ = १+६क्ष+१५क्ष^२+२०क्ष^३+१५क्ष^४+६क्ष^५+क्ष^६$$

$(१-क्ष)^{न}$ याची किंमत काढायासाठीं, श्रेणींत क्षचें चिन्ह बदल कर; ह्मणजे, क्षचे जागीं–क्ष मांड; $क्ष^{२}$ याचें चिन्ह तसेंच राहूं दें; $क्ष^{३}$ याचे जागीं $-क्ष^{३}$ मांड; आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणजे याप्रमाणें होईल

$$(१-क्ष)^{न} = १-नक्ष+न\cdot\frac{न-१}{२}क्ष^{२}- \text{इत्यादि.}$$

जेव्हां न पूर्णांक आहे, तेव्हां साधारण रूपानें श्रेणी या पुढील रितीनें मांडितां येईल, जांत १ आणि न यांचे मधील आणि त्यासुद्धां सर्व गुणक जे पूर्णांक आहेत ते $प_{न}$ याणें दाखविले जातात.

$$(१+क्ष)^{न} = प_{न}\left\{\frac{१}{प_{न}}+\frac{क्ष}{प_{१}प_{न-१}}+\frac{क्ष^{२}}{प_{२}प_{न-२}}+\cdots+\frac{क्ष^{न-१}}{प_{न-१}प_{१}}+\frac{क्ष^{न}}{प_{न}}\right\}$$

ह्मणजे वर सांगीतल्याप्रमाणें गुणकांचा सारिखेपणा यापासून दाखविला जातो.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों;

१. जेव्हां न पूर्णांक आहे,

$$२^{न} = १+न+न\frac{न-१}{२}+न\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}+ \text{इत्यादि}$$

$$०^{न} = १-न+न\cdot\frac{न-१}{२}-न\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}+ \text{इत्यादि}$$

$$२^{न-१} = १+न\frac{न-१}{२}+न\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\frac{न-३}{४}+ \text{इत्यादि}$$

२. $(अ+ब)^{न} = अ^{न}+नअ^{न-१}ब+न\frac{न-१}{२}अ^{न-२}ब^{२}+$ इत्यादि

३. जर न अपूर्णांक असेल, तर

$$(क्ष+\frac{१}{क्ष})^{२} = क्ष^{२}+\frac{१}{क्ष^{२}}+२$$

$$(क्ष+\frac{१}{क्ष})^{३} = क्ष^{३}+\frac{१}{क्ष^{३}}+३(क्ष+\frac{१}{क्ष})$$

$$(क्ष+\frac{१}{क्ष})^{४} = क्ष^{४}+\frac{१}{क्ष^{४}}+४(क्ष^{२}+\frac{१}{क्ष^{२}})+६$$

$$(क्ष+\frac{१}{क्ष})^{२न} = क्ष^{२न}+\frac{१}{क्ष^{२न}}+२न(क्ष^{२न-२}+\frac{१}{क्ष^{२न-२}})$$
$$+२न\frac{२न-१}{२}(क्ष^{२न-४}+\frac{१}{क्ष^{२न-४}})+\cdots\cdots$$

याचे शेवटीं $\frac{२न(२न-१)\cdot(२न-२)\cdots(न+१)}{१\cdot२\cdot३\cdots न}$

$$(क्ष+\frac{१}{क्ष})^{२न+१}=क्ष^{२न+१}+\frac{१}{क्ष^{२न+१}}+(२न+१)\left(क्ष^{२न-१}+\frac{१}{क्ष^{२न-१}}\right)+\cdot$$

याचे शेवटीं $\frac{(२न+१)(२न)\cdots(न+२)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots(न+१)}(क्ष+\frac{१}{क्ष})$

$$४.\ \frac{(१+क्ष)^{न}+(१-क्ष)^{न}}{२}=१+न\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+न\frac{न-१}{२}\frac{न-२}{३}\frac{न-३}{४}क्ष^{४}+ इत्यादि$$

$$\frac{(१+क्ष)^{न}-(१-क्ष)^{न}}{२}=नक्ष+न\frac{न-१}{२}\frac{न-२}{३}क्ष^{३}+ इत्यादि$$

५. शिकणारानें आपल्या कामासाठीं या पुढील तऱ्हेनें उदाहरणें आणि त्यांचे ताळे सिद्ध करून बाळगून ठेवावे; कोणताहि न घातप्रकाशक, पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण असो, असा घेऊन सिद्धांताचे सहाय्यानें, $(१+क्ष)^{न}$ आणि $(१+क्ष)^{न-१}$ यांचा श्रेणीचे रूपांत विस्तार करावा; नंतर निघालेल्ये पहिल्ये श्रेणीस १+क्ष यांणीं गुणिलें असतां वरचे दुसऱ्ये द्वियुक्पदाची श्रेणी होईल.

६. $अ^{न}=ब^{न}+न(अ-ब)\ ब^{न-१}+न\frac{न-१}{२}(अ-ब)^{२}\ ब^{न-२}+$ इत्यादि.

यानंतर या पुढील पक्षांवर विशेषेंकरून अधिक दृष्टी ठेवावी लागेल;

$$(१+\frac{१}{न})^{नक्ष}=१+नक्ष\frac{१}{न}+नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\cdot\frac{१}{न^{२}}+नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\frac{नक्ष-२}{३}\frac{१}{न^{३}}+ इत्या\text{-}$$

परंतु $नक्ष\ \frac{१}{न}=क्ष,\quad नक्ष\ \frac{नक्ष-१}{२}\times\frac{१}{न^{२}}=क्ष\ \frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}$

$नक्ष\ \frac{नक्ष-१}{२}\times\frac{नक्ष-२}{३}\times\frac{१}{न^{३}}=क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\ \frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}$ इत्यादि, यावरून

$$(१+\frac{१}{न})^{नक्ष}=१+क्ष+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}+ इत्यादि.$$

वरचे श्रेणींत क्ष = १ असें घे, तर याप्रमाणें होईल

$$(१+\frac{१}{न})^{न}=१+१+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{न}}{३}+ इत्यादि$$

परंतु २०० पृष्ठाप्रमाणें, $(१+\frac{१}{न})^{नक्ष}=\{(१+\frac{१}{न})^{न}\}^{क्ष}$

ह्मणजे वरची पहिली श्रेणी दुसऱ्ये श्रेणीचा क्ष घात आहे, आणि

$$\left(१+१+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}+ इत्यादि\right)^{क्ष}=१+क्ष+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}+ इत्यादि$$

जर न = ०, तर $(१+क्ष)^{न} = १$, १७२ पृष्ठ पहा अथवा $(१+क्ष)^{न} - १ = ०$, अथवा $\frac{(१+क्ष)^{न}-१}{न}$ हा अपूर्णांक $\frac{०}{०}$ हें रूप धरितो. आतां विचारितों कीं जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां या अपूर्णांकास नियतता आहे कीं नाहीं, २८० पृष्ठ पहा.

साधारण रूपाचे सिद्धांतापासून,

$$\frac{(१+क्ष)^{न}-१}{न} = क्ष + \frac{न-१}{२} क्ष^{२} + \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} क्ष^{३} + \text{इत्यादि.}$$

आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां दुसऱ्ये बाजूची नियतता याप्रमाणें होती,

$$क्ष + (\frac{-१}{२}) क्ष^{२} + (\frac{-१}{२})(\frac{-२}{३}) क्ष^{३} + (\frac{-१}{२})(\frac{-२}{३})(\frac{-३}{४}) क्ष^{४} + \text{इत्यादि}$$

अथवा $क्ष - \frac{क्ष^{२}}{२} + \frac{क्ष^{३}}{३} - \frac{क्ष^{४}}{४} + \text{इत्यादि}$

ह्मणजे,

जसा न अनियत घटत जातो,
तसी $\frac{१+क्ष^{न}-१}{न}$ ही पद्धति या समोरचे श्रेणीचे अनियत जवळ जवळ होत जाती. $\Bigg\}$ $क्ष - \frac{क्ष^{२}}{२} + \frac{क्ष^{३}}{३} - \frac{क्ष^{४}}{४} + \text{इत्यादि.}$

जर क्ष = ज्ञ − १, आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां $\frac{ज्ञ^{न}-१}{न}$ याची नियतता याप्रमाणें आहे,

$$(ज्ञ-१) - \frac{१}{२}(ज्ञ-१)^{२} + \frac{१}{३}(ज्ञ-१)^{३} - \frac{१}{४}(ज्ञ-१)^{४} + \text{इत्यादि}$$

जेव्हां क्ष अथवा ज्ञ−१, १ पेक्षां कमी, अथवा ज्ञ, २ पेक्षां कमी आहे, तेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे या खेरीज या श्रेणीचे गुणाविषयीं दुसरें कांहीं माहित नाहीं. जा पद्धतीपासून ही श्रेणी उत्पन्न होती तीस आतां शोधून पहातों. त्या पद्धतीमध्यें जर ज्ञचे जागीं $ज्ञ^{म}$ घेतला, तर याप्रमाणें होईल

$$\frac{ज्ञ^{मन}-१}{म} \text{ अथवा } म \frac{ज्ञ^{मन}-१}{मन}$$

यांत म नियत परिमाण आहे, आणि न अनियत घटत जातो अशी कल्पना कर; तर मनहि अनियत घटत जातो. आतां,

जेव्हां न अनियत घटत जातो तेव्हां जर ϕ नची नियतता **न** आहे, तर ϕ(मन) याची नियतता तीच असावी. परंतु यांत इतका मात्र भेद आहे, कीं जर (म=६ असें घेतलें), तर नचे कोणत्येहि अति लहान किमतीविषयीं, जितका ϕ न त्या नियततेचे जवळ होत जातो, तितके ϕ(६न) त्याचे जवळ जात नाहींत, कां कीं या नियततेचा गुण याप्रमाणें आहे, कीं, न पुरतेपणीं लहान घेतल्यानें, इच्छेप्रमाणें लहान अशा **न**चा कोणत्याहि सांगीतल्या क अपूर्णांकापेक्षां ϕ न कमी करितां येतो, तर नचे इच्छिल्ये किमतीचा ६ वा भाग घेतल्यानें ϕ(६न) हे तसेच **न**चे तितके जवळ करितां येतील. यावरून वरचा दोन पद्धती ह्मणजे

$$\frac{\text{ज्ञ}^{\text{न}}-१}{\text{न}} \text{ आणि म } \frac{\text{ज्ञ}^{\text{मन}}-१}{\text{मन}}$$

यांची नियतता सारिखीच आहे. परंतु जर पहिल्ये पद्धतीला ψ ज्ञ ह्मटलें, तर दुसरी पद्धती $\frac{१}{\text{म}}$ ψ (ज्ञ$^{\text{म}}$) आहे; तर याप्रमाणें होतें

$$\psi \text{ ज्ञची नियतता} = \frac{१}{\text{म}}\psi \text{ ज्ञ}^{\text{म}} \text{ ची नियतता}$$
$$= \frac{१}{\text{म}} \times \psi \text{ ज्ञ}^{\text{म}} \text{ ची नियतता}$$

अथवा

$$\text{ज्ञ}-१-\tfrac{१}{२}(\text{ज्ञ}-१)^{२}+\text{इत्यादि}=\tfrac{१}{\text{म}}(\text{ज्ञ}^{\text{म}}-१-\tfrac{१}{२}(\text{ज्ञ}^{\text{म}}-+)^{२}+\text{इत्यादि})$$

या श्रेणीचा हा गुण पुढील शोधाचा ताळा पहाण्याकरितां कामांत आणितां येईल.

$$(१+\text{क्ष})^{\sqrt{२}}$$

वरचा पद्धतींत मूळप्रकाशक चिन्ह असममान आहे, असा पक्ष वरचे कृतींमध्यें अद्यापि आला नाहीं, परंतु $\sqrt{२}$ याची नियतता अंकगणितरूपानें काढली असतां उत्तरोत्तर याप्रमाणें पदें होतात,

१, १·४, १·४१, १·४१४, १·४१४२, इत्यादि

यावरून १+क्ष $(१+\text{क्ष})^{\frac{१४}{१०}}$ $(१+\text{क्ष})^{\frac{१४१}{१००}}$ $(१+\text{क्ष})^{\frac{१४१४}{१०००}}$ इत्यादि

हीं उत्तरोत्तरचीं पदें घेतल्यानें $(१+\text{क्ष})^{\sqrt{२}}$ याचे नियततेचे जवळजवळ होत जातात असें जाणलें पाहिजे, ह्मणजे $\sqrt{२}$ याचे जागीं, अथवा कोणत्येहि नियततेचे जागीं तें चिन्ह घेतलें आहे त्याचे जागीं कोणतेंहि जवळचें पद

क असतां, $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याचे जोडीची जवळची श्रेणी याप्रमाणें आहे,

$$१+ कक्ष+क \frac{क-१}{२} क्ष^{२}+ इत्यादि$$

जेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे, आणि जर प्रत्येक पद सहस्रांशाचे आंत खरें होई असें निघेल, तर स्पष्ट आहे, कीं श्रेणींचें सर्वधन सहस्रांशाचे आंत खरें होईल. **१९४ पृष्ठाप्रमाणें** $\sqrt{२}$ यांचे जवळचा क आणि क+म ह्या दोन किमती आहेत अशी कल्पना कर, ह्मणजे पहिली कमी आणि दुसरी अधिक, आणि अशी कल्पना कर कीं त्यांचें प पद आणि $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ हीं ताडितों, अथवा,

$$क\cdot\frac{क-१}{२}\cdots\frac{क-प+२}{प-१}क्ष^{प-१} \text{ आणि } (क+म)\cdot\frac{क+म-१}{२}\cdots\frac{क+म-प+२}{प-१}क्ष^{प-१}$$

याचें प्रमाण याप्रमाणें आहे,

$$\frac{क+म}{क}\cdot\frac{क+म-१}{क-१}\cdots\cdot\frac{क+म-प+२}{क-प+२}$$

यांत म इच्छेप्रमाणें लहान घेतां येईल, तर स्पष्ट आहे, कीं वरचे प्रत्येक गुण्य गुणक इच्छेप्रमाणें एकंमाचे हवा तेवढा जवळ करितां येईल, आणि, यामुळें, त्यांचा गुणाकार इच्छेप्रमाणें एकंमाचे हवा तेवढाजवळ केला जाईल. ह्मणजे कांहीं दिलेल्या पदांचे संख्येविषयीं, दोन जवळजवळचे पदांची किंमत इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ करितां येईल. आतां क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे अशी कल्पना कर, ह्मणून अशानें **३४५ पृष्ठाप्रमाणें** दोन जवळचा श्रेण्या उतरत्या आहेत. यावरून, क पदें घेतलीं जातील, कीं त्यांचे पुढील राहिल्ये पदांचे बेरीजेची नियतता इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी लहान होईल; आणि म इतका लहान घेतां येतो, कीं एक जवळचे श्रेणीचीं सर्व क पदें दुसऱ्ये जवळचे श्रेणीचे क पदांचे दशलक्षांशाचे आंत इतक्या अंतरानें जवळ होतील; यावरून ह्या जवळ जवळचा श्रेण्या या पुढील रूपानें मांडितां येतील;

अ+ब+क+ · · · · · · · · ·+ ज्ञ · · · · ·+ {पूर्वींचे पदांचे बेरिजेचे दश लक्षांशाहून कमी अशीं पुढील राहिलेलीं पदें.

अ(१+अ)+ब(१+ब)+ · · · · +ज्ञ(१+व)+ {पूर्वींचे पदांचे बेरिजेचे दश लक्षांशाहून कमी अशीं पुढील राहिलेलीं पदें.

यांत **अ, ब,**.... **व**, हे प्रत्येक निरनिराळे दश लक्षांशापेक्षां कमी आहेत. अ+ब+क.... +ज्ञ हीस, पहिल्ये जवळचे श्रेणीचे जवळची आहे असें ह्मण, आणि ती दाखवायासाठीं **प** घे; तर अ **अ**+बब+....ज्ञव ही **प**चे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहे, आणि पहिली जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प+क्षप यांत **क्ष** दश लक्षांशापेक्षां कमी आहे,

दुसरी जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प(१+वि) + यप (१+वि) यांत **वि** आणि **य** प्रत्येक दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत.

यांची वजाबाकी याप्रमाणें आहे,

पवि+ प(य–क्ष)+ पयवि

ही वजाबाकी पचे **तीन** दश लक्षांशांपेक्षां कमी आहे; कांकीं **वि, य–क्ष, यवि,** हीं निरनिराळीं **प** चे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत. परंतु $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याची नियतता वरचे दोन श्रेण्याचे मध्यें असावी, आणि यामुळें त्या दोन जवळचे श्रेण्याचें अंतर **प**चे तीन दशलक्षांश आहे, इतकें पचें आणि त्या नियततेचें अंतर नाहीं.

जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक किंवा श्रेणी चढती आहे, तेव्हां या पक्षीं **वरचे रितिप्रमाणें** तसेंच उत्तर दाखवायास अशक्य आहे; परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं या पक्षांत केवळ **बीजगणितरूप** बरोबरीची प्रतिज्ञा सांगीतली, परंतु **अंकगणित रूपाची नाहीं;** आणि जें वर लिहिलें तें हेंच आहे, कीं

$$१+\sqrt{२}\,क्ष+\sqrt{२}\,\frac{\sqrt{२}-१}{२}\,क्ष^{२}+ इत्यादि$$

ही पद्धति, चुकीवांचून $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याचे जागीं मांडितां येईल; ह्मणून **३४७,३४८ पृष्ठांवरील** मूळ कारणापासून जी सामान्य सिद्धता काढिली तींत या पक्षाची सिद्धता आहे. जेव्हां श्रेणी उतरती आहे, तेव्हां वरची कृती **अंकगणित रूपाचे** बरोबरीचा जवळपणा दाखविती.

इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ होण्याविषयीं, कोणत्येहि दुसऱ्ये पक्षांस वरची गोष्ट लागू होईल. आतां द्वियुक्पदसिद्धांताचे कांहीं अधिक परिणाम सांगतों.

बारावा अध्याय.

घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयीं.

जसजसें, बीजगणितरूपाचें चिन्ह दुसऱ्ये निरनिराळ्ये चिन्हांशीं किंवा चिन्हांचे एकीकरणाशीं संबंध ठेवितें, तस तशीं त्यास निरनिराळीं नावें असतात. जसें अब, यांत बचे संबंधानें, अ यास **गुणक** ह्मणतात; अब चे संबंधानें अ यास **फाकटर*** ह्मणतात, तसेंच, $अ^{ब}$ यांत, अ चे संबंधानें, ब यास **घातप्रकाशक** ह्मणतात; $अ^{ब}$ याचे संबंधाने, ब यास **लाग्रतम** ह्मणतात, आणि बचे संबंधानें अ यास लाग्रतमाचा **पाया** ह्मणतात.

जसें $३^{४}$, यांत, ३ या पायास, $३^{४}$ अथवा ८१ यांचें लाग्रतम ४ आहे; $अ^{क्ष}$, यांत, अ या पायास $अ^{क्ष}$ याचें लाग्रतम क्ष आहे. हें याप्रमाणें दर्शवितां येईल, ह्मणजे $४ = लाग_{३}\ ८१$ आणि $क्ष = लाग_{अ}\ अ^{क्ष}$; यांत लाग ह्मणजे **लाग्रतम** शब्दाचा संक्षेप, आणि खालीं लिहिलेला अंक त्याचा पाया आहे.

उदाहरणें. $१०^{३} = १०००$ $\qquad ३ = लाग_{१०}\ १०००$

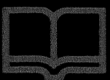
जर $अ^{क्ष} = य$ तर $क्ष = लाग_{अ}\ य$

जर $प^{क} = १ - ज्ञ$ तर $क = लाग_{प}\ (१ - ज्ञ)$

कांहीं दिलेल्या ह्मणजे एथे १० या पायास लाग्रतमाचा एकादा

---

* फाक्टर हा इंग्लिश शब्द आहे, जा दोन पदांपासून कांहीं गुणाकार होतो त्या प्रत्येक पदास ह्मणजे गुण्य किंवा गुणक यांतून प्रत्येकास सामान्यनाम फाक्टर आहे.



पर्याय लागू करण्यासाठीं, हीं पुढील समीकरणें एका पुढें एक उलगडून, प्रत्येकांतून क्षची किंमत काढिली पाहिजे.

$१०^{क्ष}=१ \quad १०^{क्ष}=२ \quad १०^{क्ष}=३ \quad १०^{क्ष}=४$ इत्यादि

ही किंमत बहुतकरून, केवळ जवळ काढितां येईल; ह्मणजे, बहुत करून एकंमाशीं लाग्रतम असममान आहे. तेव्हां जर असें ह्मटलें, कीं $लाग_{१०}२ = \cdot३०१०३$ आहे, तर अर्थ हाच, कीं

$१०^{\cdot३०१०३}=२$ चे अतिजवळ, अथवा $\sqrt[१०००००]{१०^{३०१०३}}=२$ चे जवळ जवळ, आणि असा एकादा अपूर्णांक क काढितां येईल, कीं $१०^{क}$ इच्छेप्रमाणें २ याचे हवे तेवढे जवळ होतील; आणि ·३०१०३ हे त्या अपूर्णांकाचे जवळचे आहेत.

या पुढील सिद्धांतामध्यें एकच पाया कल्पिला आहे, तो अ आहे.

१ सिद्धांत. पाया कोणताहि असला तरी, १ याचें लाग्रतम० आहे. स्पष्ट आहे, कीं ही गोष्ट $अ^{०}=१$ याची मांडण्याची दुसरी रीति आहे, आणि ती याप्रमाणें मांडितां येईल, $लाग_{अ}१=०$,

२ सिद्धांत. पायाचेंच लाग्रतम १ आहे. ही गोष्ट $अ^{१}=अ$, यांत आहे, आणि ती याप्रमाणें दर्शविली जाती; ह्मणजे $लाग_{अ} अ=१$.

३ सिद्धांत. य आणि $\frac{१}{य}$ यांचीं लाग्रतमें भिन्नचिन्हांचीं असतात, परंतु त्यांची अंक गणितरूपाची किंमत बरोबर असती. का कीं जर $य=अ^{क्ष}$ अथवा $क्ष=लाग_{अ} य$, तर याप्रमाणें होतें, $\frac{१}{य}=अ^{-क्ष}$ अथवा $-क्ष=लाग_{अ}\frac{१}{य}$; ह्मणजे, $लाग_{अ}\frac{१}{य}=-लाग_{अ} य$.

४ सिद्धांत. जर पाया अ आहे, आणि $अ^{म}$ आणि $अ^{न}$ यांमध्यें कोणताहि पूर्ण किंवा अपूर्णांक येतो, तर त्या पूर्ण किंवा अपूर्णांकाचें लाग्रतम म आणि न यांमध्यें येतें.

का कीं जर $अ^{म}$ आणि $अ^{न}$ यांचेमध्यें $अ^{क्ष}$ हा अंक आहे; तर म आणि न यांचे मध्यें क्ष हें लाग्रतम येतें, १७९,१८० पृष्ठ पहा.

पाया १०.		पाया $\frac{१}{२}$.	
या खालीं दिलेल्या अंकांमधील अंकांचें लाग्रतम	या अंकांमध्यें असतें	या खालीं दिलेल्या अंकांमधील अंकांचें लाग्रतम	या अंकांमध्यें असतें
१ आणि १०	० आणि १	१ आणि $\frac{१}{२}$	० आणि १
१० आणि १००	१ आणि २	$\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{४}$	१ आणि २
१०० आणि १०००	२ आणि ३	$\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{८}$	२ आणि ३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि
१ आणि $\frac{१}{१०}$	० आणि −१	१ आणि २	० आणि −१
$\frac{१}{१०}$ आणि $\frac{१}{१००}$	−१ आणि −२	२ आणि ४	−१ आणि −२
$\frac{१}{१००}$ आणि $\frac{१}{१०००}$	−२ आणि −३	४ आणि ८	−२ आणि −३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि

५ **सिद्धांत. गुणाकाराचें लाग्रतम त्याचे फाक्टराचे लाग्रतमाचे बेरिजेबरोबर आहे.** अ पाया असेल, आणि **प**, **क**, आणि **र**, यांचीं लाग्रतमें प, क, आणि र असतील, तर

$$\mathbf{प} = अ^{प} \qquad \mathbf{क} = अ^{क} \qquad \mathbf{र} = अ^{र}$$

$\mathbf{पकर} = अ^{प+क+र}$ अथवा लाग(**पकर**) $=$ प+क+र $=$ लाग **प**+लाग **क** +लाग **र**.

६ **सिद्धांत. प्रमाणाचें, भागाकाराचें, किंवा अपूर्णांकाचें लाग्रतम, अग्रसर आणि उपाग्रसरांचें, भाज्य आणि भाजकाचें, किंवा अंश आणि छेद यांचे लाग्रतमाचे वजावाकी बरोबर आहे.**

कां कीं $\frac{\mathbf{प}}{\mathbf{क}} = अ^{प-क}$ अथवा लाग $\frac{\mathbf{प}}{\mathbf{क}}$ $=$ प−क $=$ लाग **प**−लाग **क**.

७ **सिद्धांत. $\mathbf{प}^{म}$ याचें लाग्रतम पचे लाग्रतमास मनें गुणून निघतें**; ह्मणजे, जर **प** $= अ^{प}$ आहे, तर $\mathbf{प}^{म} = अ^{मप}$, अथवा लाग $\mathbf{प}^{म} =$ मप $=$ म लाग **प**.

८ **सिद्धांत. ऋण अंकास गणितरूपाचें लाग्रतम नाहीं**; आणि जो बीजगणिताविषयीं यापूर्वी विचार झाला त्यांत, ऋणपायाचे

लाग्रतमाचा कांहीं पर्यायहि नाहीं. हा सिद्धांत नाहीं, परंतु व्याख्यान आहे, आणि त्याचा सारांश हाच; कीं कांहीं उलटे विषय आहेत, जांचा अर्थ अद्यापि शिकणाराचे समजांत येणार नाहीं, यामुळें ऋण परिमाणाचे लाग्रतमाचा विचार, आणि जा धन परिमाणाचे लाग्रतमास अंक गणितरूपाचा अर्थ आहे, याशिवाय धन परिमाणाचे सर्व लाग्रतमाचाहि विचार एकीकडे ठेवावा लागतो. कां कीं $अ^{क्ष}$ = ब या समीकरणाचें जरी केवळ एक **अंकगणितरूप** उत्तर आहे, तरी केवळ एकच उत्तर आहे असें सिद्ध झालें नाहीं.

९ **सिद्धांत. ० याचें लाग्रतम अनंत आहे;** याचा अर्थ हाच, कीं यचें लाग्रतम नेहेमी १ याचे एके किंवा दुसऱ्ये बाजूस ऋण आहे, तर जसजसा य अनियत घटत जातो, तसतसें त्याचें लाग्रतम अंकगणितरूपानें अनियत वाढत जातें. $(\frac{१}{२})^{क्ष}$ हें अनियत घटण्यासाठीं, क्ष अंकगणितरूपानें अनियत वाढत जावा आणि तो धनही असावा; आणि $२^{क्ष}$ ऋण आहे, तर त्यास अनियत घटण्यासाठीं क्षलाहि अंकगणितरूपाची वाढ अनियत असावी. यावरून २७२ पृष्ठावरचे प्रतिज्ञेचा अर्थ कळून येतो; आणि लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं बीजगणितामध्यें ∞ हें चिन्ह धन किंवा ऋण असतें, ह्मणून ही गोष्ट या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल. जर य = $\frac{१}{क्ष}$, तर य आणि क्ष यांस सारिखें चिन्ह असावें; जर क्ष अनियत घटत जातो, तर तो ० या रूपाचे जवळ येतो, आणि अशा रूपास कांहीं चिन्ह नाहीं, कां कीं हें धन आणि ऋण परिमाणांचे मध्यांतील मर्यादा आहे. यामुळें य, हा अनियत वाढत असतां, तशेच मर्यादेचे जवळ होत जातो; कां कीं य आणि $\frac{१}{क्ष}$ याचें चिन्ह सारिखेंच आहे, तर क्षचें कोणतेंहि रूप असेल, जास धन किंवा ऋणचिन्ह कल्पिलें जाईल, तर यला ही त्यासारिखेंच चिन्ह कल्पितां येईल. परंतु वेगवेगळ्ये उदाहरणांपासून जो या गोष्टीचा समज व्हावयाचा तो भूमितीशीं बीजगणित लागू करण्याचीं कांहीं अधिक उदाहरणें पाहिल्यावांचून, शिकणारास प्राप्त होणार नाहीं.

वरचे सिद्धांतांचे दृष्टांताविषयीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों.

$क्ष \times १ = क्ष$	लाग क्ष + लाग १ = लाग क्ष	(लाग १ = ०)
$क्ष^{१} = क्ष$	१ × लाग क्ष = लाग क्ष	

$$\text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{अक्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{क्ष} + \text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{अ} = \text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{क्ष} + १$$

$$\text{लाग क्ष}\sqrt{\text{य}} = \text{लाग क्ष} + \text{लाग य}^{\frac{१}{२}} = \text{लाग क्ष} + \frac{१}{२}\text{लाग य}$$

$$\text{लाग}\,\frac{\text{क्षय}^{\frac{१}{३}}}{\text{पक}^{२}} = \text{लाग क्ष} + \frac{१}{३}\text{लाग य} - \text{लाग प} - २\,\text{लाग क}$$

$$\text{लाग}\left(\frac{\text{क्षय}^{३}}{\text{पक}^{-१}}\right)^{-१} = -१\left\{\text{लाग क्ष} + ३\,\text{लाग य} - \text{लाग प} - (-१)\text{लाग क}\right\}$$

$$= -\text{लाग क्ष} - ३\,\text{लाग य} + \text{लाग प} - \text{लाग क}$$

आतां लाग्रतमाचे संबंधाचे श्रेण्यांचा विचार करितों.

३५२ व्ये पृष्ठावर, न आणि क्ष यांचे सर्व किंमतींविषयीं हा पुढील सिद्धांत सिद्ध केला आहे,

$$\left\{१+१+\frac{१-\frac{१}{\text{न}}}{२}+\frac{१-\frac{१}{\text{न}}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{\text{न}}}{३}+\text{इत्यादि}\right\}^{\text{क्ष}} = १+\text{क्ष}+\text{क्ष}\,\frac{\text{क्ष}-\frac{१}{\text{न}}}{२} + \text{क्ष}\,\frac{\text{क्ष}-\frac{१}{\text{न}}}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-\frac{२}{\text{न}}}{३}+\text{इ०}$$

या दोन श्रेण्या या साधारणरूपाचा आहेत, ह्मणजे $(१+\frac{१}{\text{न}})^{\text{क}}$, ह्मणून ३४५ व्ये पृष्ठाप्रमाणें जेव्हां १पेक्षां $\frac{१}{\text{न}}$ कमी आहे, किंवा जेव्हां १पेक्षां न अधिक आहे, तेव्हां वरचा दोन श्रेण्या उतरत्या आहेत. आतां मनांत आण, कीं न अनियत वाढत जातो तर या पक्षांत वरचा श्रेण्यांची नियतता याप्रमाणें होईल, ह्मणजे

$$१+१+\frac{१-\frac{१}{\text{न}}}{२}+\frac{१-\frac{१}{\text{न}}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{\text{न}}}{३}+\text{इत्यादि याची नियतता} = १+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+\text{इत्यादि}$$

$$\text{आणि } १+\text{क्ष}+\text{क्ष}\,\frac{\text{क्ष}-\frac{१}{\text{न}}}{२}+\text{क्ष}\,\frac{\text{क्ष}-\frac{१}{\text{न}}}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-\frac{२}{\text{न}}}{३}+\text{इत्यादि याची नियतता}$$

$= १+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{२\cdot३}+$ इ०.

परंतु $१+१+\frac{१}{२}+$ इत्यादि याची जवळची किंमत **३११ पृष्ठाप्रमाणें** काढिली असतां हीच आहे, २·७१८२८१८२···, आणि यास e ह्मटलें. यामुळें **३११ पृष्ठाप्रमाणें,**

$$e=१+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{२\cdot३}+\text{इत्यादि.}$$

यामुळें, **जर e पाया असेल, तर ज्या अंकाचें लाग्रतम क्ष आहे, तो अंक $१+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+$ इत्यादि आहे.** यावरून, शोधण्याचे क्र-मानें, ज्याचा पाया e आहे, असा जो लाग्रतमाचा पर्याय निघाला, त्या-स लाग्रतमाचा **स्वाभाविक** पर्याय ह्मणतात; इंग्लिश भाषेंत त्याचीं दुसरींहि नामें आहेत तीं एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं.

एथें ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं **बीजगणिताचे पृथक्करणामध्यें, नुसता लाग असा शब्द आला, तर असें समजावें कीं त्या लाग्रतमाचा पाया e आहे, जेव्हां असें नसेल तेव्हां विशेषेंकरून सांगितलें असेल.**

वरचें समीकरण नेहेमी खरें असतानां, याप्रमाणें होतें

$$e^{कक्ष}=१+कक्ष+\frac{क^{२}क्ष^{२}}{२}+\frac{क^{३}क्ष^{३}}{२\cdot३}+\text{इत्यादि.}$$

परंतु $e^{कक्ष}=(e^{क})^{क्ष}$; आणि जर e पाया असून अचें लाग्रतम क आहे असें कल्पिलें, तर $e^{क}=$**अ,** आणि

$$(e^{क})^{क्ष} \text{ अथवा } अ^{क्ष}=१+(\text{लाग } अ)क्ष+\frac{\text{लाग } अ^{२}क्ष^{२}}{२}+\frac{(\text{लाग} अ)^{३}क्ष^{३}}{२\cdot३}+\text{इ०}$$

यापासून हें निघतें, कीं जर क्ष अनियत घटत जातो तर $\frac{अ^{क्ष}-१}{क्ष}$ याची नियतता लाग अ होईल.

परंतु अशे नियततेची श्रेणी पूर्वी ३५२ पृष्ठावर मिळाली; यावरून

$$\text{लाग अ} = (\text{अ}-१) - \frac{१}{२}(\text{अ}-१)^२ + \frac{१}{३}(\text{अ}-१)^३ - \text{इत्यादि}$$

अथवा, जर अ = १+ब, तर याप्रमाणें होईल

$$\text{लाग }(१+\text{ब}) = \text{ब} - \frac{\text{ब}^२}{२} + \frac{\text{ब}^३}{३} - \text{इत्यादि} \cdots\cdots (१)$$

बचे जागीं −ब मांड, तर याप्रमाणें होईल

$$\text{लाग }(१-\text{ब}) = -\text{ब} - \frac{\text{ब}^२}{२} - \frac{\text{ब}^३}{३} - \text{इत्यादि} \cdots\cdots (२)$$

वरचे पहिल्ये श्रेणींतून दुसरी वजा कर, तर

$$\text{लाग }(१+\text{ब}) - \text{लाग }(१-\text{ब}) = \text{लाग }\left(\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}}\right)$$

$$\text{लाग }\left(\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}}\right) = २\left\{\text{ब} + \frac{\text{ब}^३}{३} + \frac{\text{ब}^५}{५} + \text{इत्यादि}\right\} \cdots\cdots (३)$$

$\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}} = \frac{१+\text{क्ष}}{\text{क्ष}}$ असें घे, तर $\text{ब} = \frac{१}{२\text{क्ष}+१}$

$$\text{लाग }\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}} = \text{लाग }\frac{१+\text{क्ष}}{\text{क्ष}} = \text{लाग }(१+\text{क्ष}) - \text{लाग क्ष}$$

$$\text{लाग}(\text{क्ष}+१) - \text{लागक्ष} = २\left\{\frac{१}{२\text{क्ष}+१} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(२\text{क्ष}+१)^३} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{(२\text{क्ष}+१)^५} + \text{इ०}\right\} \cdots (४)$$

या शेवटील श्रेणीपासून याप्रमाणें होतें

$$\text{क्ष} = १,\ \text{लाग }२ = २\left\{\frac{१}{३} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{२७} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{२४३} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = २,\ \text{लाग }३ = \text{लाग }२ + २\left\{\frac{१}{५} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{१२५} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{३१२५} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = ३,\ \text{लाग }४ = \text{लाग }३ + २\left\{\frac{१}{७} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{३४३} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{१६८०७} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = ४,\ \text{लाग }५ = \text{लाग }४ + २\left\{\frac{१}{९} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{७२९} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{५९०४९} + \text{इत्यादि}\right\}$$

वरप्रमाणें पूर्णांकांचीं लाग्रतमें क्रमक्रमानें हवीं तेवढीं जवळ जवळ काढितां येतील, ह्मणजे ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावरून दिसेल त्यांत खरेपणाचे जवळ जवळ होण्यासाठीं दशांशांचीं स्थळें अकरापर्यंत घेतलीं आहेत.

$$\frac{१}{३} = \cdot ३३३३३३३३३३३$$
$$\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{३^{३}} = \cdot ०१२३४५६७९०१$$
$$\frac{१}{५}\cdot\frac{१}{३^{५}} = \cdot ०००८२३०४५२७$$
$$\frac{१}{७}\cdot\frac{१}{३^{७}} = \cdot ००००६५३२१०५$$
$$\frac{१}{९}\cdot\frac{१}{३^{९}} = \cdot ०००००५६४५०३$$
$$\frac{१}{११}\cdot\frac{१}{३^{११}} = \cdot ००००००५१३१८$$
$$\frac{१}{१३}\cdot\frac{१}{३^{१३}} = \cdot ०००००००४८२५$$
$$\frac{१}{१५}\cdot\frac{१}{३^{१५}} = \cdot ००००००००४६५$$
$$\frac{१}{१७}\cdot\frac{१}{३^{१७}} = \cdot ०००००००००४६$$
$$\frac{१}{१९}\cdot\frac{१}{३^{१९}} = \cdot ००००००००००५$$

·३४६५७३५९०२८
२

लाग २ = ·६९३१४७१८०५६ = लाग २ जवळजवळ

यारितीनें ३ यांचें लाग्रतम २ यांचे लाग्रतमापासून काढितां येईल, ४ यांचें लाग्रतम ३ यांचे लाग्रतमापासून काढितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढें कोणत्याहि पूर्णांकाचें लाग्रतम काढितां येईल. शिकणारानें अंक गणिताचे अभ्यासाकरितां १० अंक पावेतों लाग्रतमें काढावीं; असें केल्यानें त्या अंकांचीं लाग्रतमें आठ दशांश स्थळांपावेतों या पुढीलप्रमाणें आहेत;

लाग १ = ०·००००००००	लाग ६ = १·७९१७५९४७
लाग २ = ०·६९३१४७१८	लाग ७ = १·९४५९१०१५
लाग ३ = १·०९८६१२२९	लाग ८ = २·०७९४४१५४
लाग ४ = १·३८६२९४३६	लाग ९ = २·१९७२२४५८
लाग ५ = १·६०९४३७९१	लाग १० = २·३०२५८५०९

परंतु केवळ प्रैम ह्मणजे अविभाज्य अंकांविषयीं वरची श्रेणी कामांत आणण्याची गरज पडेल, आणि आरंभीं जे लाग्रतमाचे कोष्टक तयार झाले ते, या पुढीला प्रमाणें. ५९, अथवा ५८+१ यांचें लाग्रतम काढायास इच्छिलें आहे, असें मनांत आण. आतां ५८=२×२९, ह्मणजे हे दोन फाक्टर अविभाज्य अंक आहेत; जर, २ आणि २९ यांचीं लाग्रतमें पूर्वीं सापडलीं आहेत, तर ५८ यांचें लाग्रतम या पुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५८=\text{लाग } २+\text{लाग } २९$$

आणि ५९ यांचें लाग्रतम या पुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५९=\text{लाग } ५८+२\left\{\frac{१}{११७}+\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(११७)^{३}}+\text{इत्यादि}\right\}$$

आतां लाग २ यापासून आरंभ करून या पुढीलप्रमाणें निघतें;

लाग २=एक दिलेली लेणी लाग ६=लाग ३+लाग २
लाग ३=लाग२+एक दिलेली श्रेणी लाग७=लाग६+एक दिलेली श्रेणी
लाग ४=२ लाग २ लाग ८=३ लाग २
लाग ५=लाग ४+एक दिलेली श्रेणी लाग ९=२ लाग ३

लाग १०=लाग २+लाग ५; आणि इत्यादि.

३५४ पृष्ठावरून ही पुढील श्रेणी सिद्ध केली ह्मणजे,

$$\text{ज्ञ}-१-\frac{१}{२}(\text{ज्ञ}-१)^{२}+\text{इत्यादि}=\frac{१}{\text{म}}\left(\text{ज्ञ}^{\text{म}}-१-\frac{१}{२}(\text{ज्ञ}^{\text{म}}-१)^{२}+\text{इत्यादि}\right)$$

आतां हें दिसतें, कीं वरची श्रेणी या पुढील सारिखीच आहे,

$$\text{लाग ज्ञ}=\frac{१}{\text{म}}\text{लाग ज्ञ}^{\text{म}}$$

आणि त्या श्रेणीवरून हें पुढील समीकरण अधिक उघड होतें असें दिसतें, ह्मणजे

$$\frac{\text{ज्ञ}^{\text{म}}-१}{\text{म}}\text{ याची नियतता}=\text{ज्ञ}-१-\frac{१}{२}(\text{ज्ञ}-१)^{२}+\text{इत्यादि}=\text{लाग ज्ञ}.$$

म अनियत घटता केला, अथवा म उत्तरोत्तर लहान लहान अपूर्णांक केला, अशे कल्पने वरून समजांत येतें, कीं ज्ञ चें उत्तरोत्तर अधिक अधिक मोठें मूळ काढावें लागतें. ज्ञ चें पुरतेपणीं मोठें मूळ काढिल्यानें इच्छेप्रमाणें ज्ञ$^{\text{म}}$ हवा तेवढा १ या जवळ आणतां येईल, अथवा इच्छेप्र-

माणें $ज्ञ^{म}-१$ हवा तेवढा लहान करितां येईल; ह्मणजे **३१६ पृष्ठाप्रमाणें** $ज्ञ^{म}-१$ इच्छेप्रमाणें सगळ्ये श्रेणीचे सर्व धना बरोबर हवा तितका जवळ जवळ करितां येईल. या मूळ कारणाचे आधारावरून, आणि ज्ञचें वर्गमूळ वारंवार काढिल्यानें लाग्रतमाचे कोष्टक पूर्वकाळीं या पुढील सारणीचे सहाय्यानें करीत असत,

$$लाग\ ज्ञ = (ज्ञ^{\frac{1}{140737488355328}} - १) \times १४०७३७४८८३५५३२८$$

फार जवळ जवळ, जो अंक घेतला तो $२^{४७}$ आहे, ह्मणजे तो अंक ४७ वेळा वर्गमूळ काढिल्याचे बरोबर आहे.

पूर्वींप्रमाणें एकाद्ये पूर्णांकाचें लाग्रतम काढिल्यानंतर, अंशाचे लाग्रतमांतून छेदाचें लाग्रतम वजा केल्यानें, अपूर्णांकाचें लाग्रतम काढितां येईल.

ही पुढील गोष्ट सांगीतली पाहिजे; जेव्हां क्ष मोठा अंक आहे तेव्हां,

$$लाग\ (क्ष+१) = लाग\ क्ष + \frac{२}{२क्ष+१}$$ जवळ जवळ **३६३ पृष्ठ पहा.**

याविषयाविषयीं जें सांगण्याचें बाकी राहिलें, तें पुढील अध्याय पर्यंत ठेविलें आहे. आतां तर वरचे श्रेणींचे कांहीं उपयोग दाखवितों.

लेम्मा. जर फ(क्ष) हें क्षचें असें फङ्शन असेल, कीं फ(क्ष+य) याचा या पुढील श्रेणीचे रूपांत विस्तार करितां येईल, ह्मणजे

$$अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + \text{इत्यादि तर}$$

यांत जर $अ_०$, $अ_१$, इत्यादि हीं केवळ क्षचीं फङ्शनें असतील, तर

$$फ\ (अ+ब\sqrt{-१}) + फ(अ-ब\sqrt{-१})$$

याशीं नुसते साधारण रितीनें काम केलें असतां, ही पद्धति नेहेमी धन किंवा ऋण परिमाणांची दर्शक होईल, ह्मणजे, जीं परिमाणें केवळ चिन्हरूप अथवा **अशक्यरूपाचीं** आहेत तीं सर्व नाहींशीं होतील; परंतु दुसऱ्या पक्षीं

$$फ\ (अ+ब\sqrt{-१}) - फ(अ-ब\ \sqrt{-१})$$

ही या रूपाची होईल, ह्मणजे, एक शक्य परिमाण$\times\sqrt{-१}$.

यचें चिन्ह बदल करून पहिल्यानें फ (क्ष+य) याची किंमत मांड, आणि नंतर फ (क्ष−य) याची किंमत मांड;

$$फ\,(क्ष+य)=अ_० + अ_१\,य + अ_२\,य^२ + अ_३\,य^३ + इत्यादि$$

$$फ\,(क्ष-य)=अ_० - अ_१\,य + अ_२\,य^२ - अ_३\,य^३ + इत्यादि$$

यापासून,

$$फ\,(क्ष+य)+फ\,(क्ष-य)=२\,अ_० + २\,अ_२\,य^२ + २अ_४\,य^४ + \;इत्यादि$$

$$फ\,(क्ष-य)-फ\,(क्ष-य)=२अ_१\,य + २अ_३\,य^३ + २अ_५\,य^५ + \;इत्यादि$$

क्षचे जागीं अ मांड, तर $अ_०$, $अ_१$, इत्यादि हीं केवळ अचीं फङ्शनें होतात; यचे जागीं ब $\sqrt{-१}$ मांड, ह्मणजे मनांत आण, कीं

$$य = ब\sqrt{-१}$$

$$य^२ = ब^२ \times -१ = -ब^२$$

$$य^३ = -ब^२ \times ब\sqrt{-१} = -ब^३\sqrt{-१}$$

$$य^४ = -ब^३\sqrt{-१} \times ब\sqrt{-१}$$

$$= -ब^४ \times -१ = ब^४$$

$$य^५ = ब^५\sqrt{-१}$$

$$य^६ = -ब^६$$

$$य^७ = -ब^७\sqrt{-१}$$

$$य^८ = ब^८ \;इत्यादि$$

यावरून,

$$फ(अ+ब\sqrt{-१})+फ\,(अ-ब\sqrt{-१}) = २\,अ_० - २अ_२\,ब^२ + २\,अ_४\,ब^४ - \;इत्यादि$$

हें शक्य परिमाण आहे; आणि

$$फ\,(अ+ब\sqrt{-१})-फ(अ-ब\sqrt{-१}) = २अ_१\,ब\sqrt{-१} - २अ_३\,ब^३ \times \sqrt{-१} + \;इत्यादि$$

$$= \{२अ_१\,ब - २अ_३\,ब + \;इत्यादि\}\sqrt{-१}$$

हें शक्यरूप परिमाण $\times \sqrt{-१}$ आहे.

उदाहरणें. $$\frac{१}{अ+ब\sqrt{-१}} + \frac{१}{अ-ब\sqrt{-१}} = \frac{२अ}{अ^२+ब^२}$$

$$\frac{१}{अ+ब\sqrt{-१}} - \frac{१}{अ-ब\sqrt{-१}} = -\frac{२ब}{अ^२+ब^२}\sqrt{-१}$$

$$(अ+ब\sqrt{-१})^न+(अ-ब\sqrt{-१})^न = २अ^न - २न\frac{न-१}{२}अ^{न-२}ब^२ + \text{इत्यादि}$$

$$(अ+ब\sqrt{-१})^न-(अ-ब\sqrt{-१})^न = (२नअ^{न-१}ब - २न\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}अ^{न-३} \times ब^३ + \text{इत्यादि})\sqrt{-१}.$$

अचे सर्व किमतींविषयीं वरचा सिद्धांत खरा आहे, यामुळें जेव्हां अ = ० तेव्हांहि खरा आहे; ह्मणजे, या पुढील विषयीं

$फ(ब\sqrt{-१})+फ(-ब\sqrt{-१})$ आणि $फ(ब\sqrt{-१})-फ(-ब\sqrt{-१})$

उदाहरणें. न धन पूर्णांक आहे असें मनांत घे, तर

$$(ब\sqrt{-१})^न+(-ब\sqrt{-१})^न = \begin{cases} +२ब^न, & \text{जेव्हां न **समतेने सम***आहे} \\ ०, & \text{जेव्हां न विषम आहे.} \\ -२ब^न, & \text{जेव्हां न **विषमतेने सम** † आहे} \end{cases}$$

$$(ब\sqrt{-१})^न-(-ब\sqrt{-१})^न = \begin{cases} ०, & \text{जेव्हां न सम आहे.} \\ २ब^न\sqrt{-१}, & \text{जेव्हां न १,५,९, इ० आहे} \\ -२ब^न\sqrt{-१}, & \text{जेव्हां न ३,७,११, इ० आहे} \end{cases}$$

$e^{क्ष\sqrt{-१}}$ आणि $e^{-क्ष\sqrt{-१}}$ यांस जर वरची कृति लागू केली, तर याप्रमाणें निघेल

$$e^{क्ष\sqrt{-१}} = १ + क्ष\sqrt{-१} - \frac{क्ष^२}{२} - \frac{क्ष^३}{२\cdot३}\sqrt{-१} + \frac{क्ष^४}{२\cdot३\cdot४} + \text{इत्यादि}$$

$$e^{-क्ष\sqrt{-१}} = १ - क्ष\sqrt{-१} - \frac{क्ष^२}{२} + \frac{क्ष^३}{२\cdot३}\sqrt{-१} + \frac{क्ष^४}{२\cdot३\cdot४} - \text{इत्यादि}$$

$$\frac{e^{क्ष\sqrt{-१}}+e^{-क्ष\sqrt{-१}}}{२} = १ - \frac{क्ष^२}{२} + \frac{क्ष^४}{२\cdot३\cdot४} - \frac{क्ष^६}{२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६} + \text{इत्यादि}\cdots(अ)$$

$$\frac{e^{क्ष\sqrt{-१}}-e^{-क्ष\sqrt{-१}}}{२\sqrt{-१}} = क्ष - \frac{क्ष^३}{२\cdot३} + \frac{क्ष^५}{२\cdot३\cdot४\cdot५} - \text{इत्यादि}\cdots\cdots\cdots(ब)$$

---

* समतेने सम अंक ह्मणजे, जो ४ यांणी भागिला जातो; जसें ४,८,१२, इत्यादि हे समतेने सम आहेत.

† विषमतेने सम अंक ह्मणजे, जो २ यांणीं भागिला जातो, परंतु ४ यांणीं भागिला जात नाहीं; जसा २,६,१०, इत्यादि.

या पूर्वी या पुस्तकांत $\sqrt{-१}$ असें चिन्ह कामांत आणण्याची योग्यता, केवळ अनुभवावर ठेविली, आहे २०९ पृष्ठ पहा; कोठपर्यंत खरीं उत्तरें निघतील हें पहाण्याकरितां उलगडण्याचे लांब क्रमाचें उत्तर शोधायाचा आतां प्रसंग आला आहे. वरचे (अ) आणि (ब) समीकरणांचा दोनहि बाजूंमध्यें बरोबरीचें बीजगणितरूप चिन्ह मांडिलें आहे; तर हेंच विचारायाचें आहे, कीं जे संबंध पहिल्ये दोन बाजूंत आहेत, तेच संबंध त्यांचे दुसऱ्ये बाजूंत असतील कीं नाहीं?

ह्मणजे $= \dfrac{e^{क्ष\sqrt{-१}} + e^{-क्ष\sqrt{-१}}}{२}$ यास ϕ क्ष ह्मण

आणि $\dfrac{e^{क्ष\sqrt{-१}} - e^{-क्ष\sqrt{-१}}}{२\sqrt{-१}}$ यास ψ क्ष ह्मण

तर यावरून याप्रमाणें होतें

$$(\phi क्ष)^2 = \frac{e^{२क्ष\sqrt{-१}} + २e^{क्ष\sqrt{-१}}\, e^{-क्ष\sqrt{-१}} + e^{-२क्ष\sqrt{-१}}}{४}$$

$$(\psi क्ष)^2 = \frac{e^{२क्ष\sqrt{-१}} - २e^{क्ष\sqrt{-१}}\, e^{-क्ष\sqrt{-१}} + e^{-२क्ष\sqrt{-१}}}{-४}$$

$$(\phi क्ष)^2 + (\psi क्ष)^2 = \frac{४e^{क्ष\sqrt{-१}-क्ष\sqrt{-१}}}{४} = e^{०} = १$$

$$(\phi क्ष)^2 - (\psi क्ष)^2 = \frac{e^{२क्ष\sqrt{-१}} + e^{-२क्ष\sqrt{-१}}}{२} = \phi\, २क्ष$$

$$\phi क्ष \times \psi क्ष = \frac{e^{२क्ष\sqrt{-१}} - e^{-२क्ष\sqrt{-१}}}{४\sqrt{-१}} = \frac{१}{२}\psi\,(२क्ष)$$

तर

$$(\phi क्ष)^2 + (\psi क्ष)^2 = १ \qquad (\phi क्ष)^2 - (\psi क्ष)^2 = \phi(२क्ष)$$

$$२\,\phi क्ष \times \psi क्ष = \psi(२क्ष)$$

या तीन संबंधांविषयीं हेंच विचारायाचें आहे, कीं (अ) आणि (ब) या समीकरणांचा दुसऱ्या बाजूंविषयीं हे संबंध खरे आहेत कीं नाहींत?

कोणतीहि श्रेणी तिणें तीच गुणायाची असेल, तर तिचा गुणाकार या पुढील रितीवरून निघेल; प्रत्येक पदाचा वर्ग कर, आणि त्याचे पुढील सर्व पदें त्याच पदाचे दुपटीनें गुण. ह्मणजे (अ) या श्रेणीचा वर्ग याप्रमाणें आहे.

$$१-क्ष^{२}+\frac{क्ष^{४}}{३\cdot४}-\frac{क्ष^{६}}{३\cdot४\cdot५\cdot६}+ \text{इत्यादि}$$
$$+\frac{क्ष^{४}}{२^{२}}-\frac{क्ष^{६}}{२\cdot३\cdot४}+ \text{इत्यादि}$$
$$+ \text{इत्यादि}$$

(ब) या श्रेणीचा वर्ग याप्रमाणें आहे

$$क्ष^{२}-\frac{क्ष^{४}}{३}+\frac{क्ष^{६}}{३\cdot४\cdot५}- \text{इत्यादि}$$
$$+\frac{क्ष^{६}}{२^{२}\cdot३^{२}}- \text{इत्यादि}$$
$$- \text{इत्यादि.}$$

यांत पहिला वर्ग दुसऱ्यानें अधिक केला असतां, याप्रमाणें होईल,

$$१+\left\{\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{२^{२}}-\frac{१}{३}\right\}क्ष^{४}-\left\{\frac{१}{३\cdot४\cdot५\cdot६}+\frac{१}{२\cdot३\cdot४}-\frac{१}{३\cdot४\cdot५}-\frac{१}{२^{२}\cdot३^{२}}\right\}क्ष^{६}+\text{इ०}$$
$$=१+\{०\} \qquad -\{०\} \qquad +\text{इ०}$$

आणि पहिल्यांत दुसरा वर्ग वजा केला असतां, याप्रमाणें होईल,

$$१-२क्ष^{२}+\left\{\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{३}\right\}क्ष^{४}-\left\{\frac{१}{३\cdot४\cdot५\cdot६}+\frac{१}{२\cdot३\cdot४}+\frac{१}{३\cdot४\cdot५}+\frac{१}{२^{२}\cdot३^{२}}\right\}क्ष^{६} +\text{इत्यादि}$$

$$=१-\frac{(२क्ष)^{२}}{२}+\frac{(२क्ष)^{४}}{२\cdot३\cdot४}-\frac{(२क्ष)^{६}}{२\cdot३\cdot४\cdot५\cdot६}+\text{इत्यादि}$$

गुणाकारानें याच रितीप्रमाणें तिसरा संबंधहि खरा होईल. (अ) आणि (ब) या समीकरणांचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये बाजूंविषयीं तशीच रितीनें हीं पुढील उत्तरें सिद्ध करितां येतील.

$$\phi(क्ष+य)=\phi क्ष\,\phi य-\psi क्ष\,\psi य \qquad \psi(क्ष+य)=\psi क्ष\,\phi य+\phi क्ष\,\psi य$$
$$\phi(क्ष-य)=\phi क्ष\,\phi य+\psi क्ष\,\psi य \qquad \psi(क्ष-य)=\psi क्ष\,\phi य-\phi क्ष\,\psi य$$

$e^{क्ष\sqrt{-1}}$ यास प ह्मण, आणि $\frac{\psi क्ष}{\phi क्ष}$ यास (χक्ष) अथवा चै क्ष ह्मण, तर (अ) आणि(ब) हीं समीकरणें याप्रमाणें होतील,

$$\frac{१}{\sqrt{-१}} \cdot \frac{प-\frac{१}{प}}{प+\frac{१}{प}} = \frac{\psi क्ष}{\phi क्ष} = \chi क्ष \text{ अथवा } \frac{प^२-१}{प^२+१} = \sqrt{-१}\,\chi क्ष$$

यावरून $$प^२ = \frac{१+\sqrt{-१}\,\chi क्ष}{१-\sqrt{-१}\,\chi क्ष}$$ ३६२ पृष्ठाप्रमाणें

$$लाग\ प^२ = २\left\{\sqrt{-१}\,\chi क्ष + \frac{१}{३}(\sqrt{-१}\,\chi क्ष)^३ + इत्यादि\right\}$$

$$= २\sqrt{-१}\left\{\chi क्ष - \frac{१}{३}(\chi क्ष)^३ + \frac{१}{५}(\chi क्ष)^५ - इत्यादि\right\}$$

परंतु $प^२ = e^{२क्ष\sqrt{-१}}$ अथवा $लाग\ प^२ = २क्ष\sqrt{-१}$, यामुळें

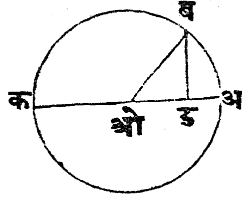
$$क्ष = \chi क्ष - \frac{१}{३}(\chi क्ष)^३ + \frac{१}{५}(\chi क्ष)^५ - इत्यादि.$$

(अ) आणि (ब) या दोन श्रेण्या नेहेमी उतरत्या आहेत, हें ३१२ आणि ३१३ पृष्ठांवरून सिद्ध करितां येईल; परंतु क्ष पुरतेपणीं मोठा केल्यानें, कोणतेंहि पद तें कितीहि लांब असलें, त्यापासून उतरण्याचा आरंभ होई असें करितां येईल. ह्मणजे, जर क्ष = १००० असले, तर या पुढील लिहिलेल्या पदाचे पूर्वीं पहिल्या श्रेणीचे उतरण्याचा आरंभ होणार नाहीं.

$$\frac{क्ष^{२६४}}{२.३.४.५......२६३.२६४}$$

परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं पदें अनुक्रमानें धन आणि ऋण आहेत, तर जरी श्रेणीचीं पहिलीं पदें मोठीं आहेत, तथापि ϕक्ष आणि ψक्ष यांची खरी किंमत १ पेक्षां अधिक कधीं होऊं शकत नाहीं; कां कीं १ हा धन असेल किंवा ऋण असेल, त्यापेक्षां वरचा दोहोंतून एक तरी अंकगणितरूपानें अधिक असला, तर $(\phi क्ष)^२+(\psi क्ष)^२ = १$ हें खरें होण्यास अशक्य.

त्रिकोणमितीमध्यें, वरचे श्रेण्यांचे गुण या पुढील रितीनें भूमितीशीं जोडिलेले आहेत. एक वर्त्तुळ कर;



आणि **अ** बिंदूपासून **ब** बिंदू पुढें चालतो, असा कीं शेवटीं त्याचे चालण्यापासून **ओअ** त्रिज्येचा क्ष वेळांचे लांबी बरोबर कौंस होतो, आणि हवी तर वर्त्तुळाची पुनः प्रदक्षिणा करावी. **बड** रेघ **कअ** रेघेवर लंब कर; तेव्हां सिद्ध करितां येईल, कीं **बड** ह्मणजे ψ क्ष हा **ओअ**चा अपूर्णांक आहे आणि **ओड** ह्मणजे ϕ क्ष हा **ओअ**चा अपूर्णांक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१. $\frac{१+क्ष}{१+\frac{१}{क्ष}}=क्ष$, या समीकरणाचे सहाय्यानें,

हें पुढील समीकरण सिद्ध कर,

$$लाग\ क्ष = क्ष - \frac{१}{क्ष} - \frac{१}{२}\left(क्ष^२ - \frac{१}{क्ष^२}\right) + \frac{१}{३}\left(क्ष^३ - \frac{१}{क्ष^३}\right) - इत्यादि$$

२. हें पुढील सिद्ध कर,

$$e^{क्ष\sqrt{-१}} = \phi\ क्ष + \sqrt{-१}\ \psi\ क्ष$$

$$e^{-क्ष\sqrt{-१}} = \phi\ क्ष - \sqrt{-१}\ \psi\ क्ष$$

$$(\phi क्ष + \sqrt{-१}\ \psi\ क्ष)^{म} = \phi\ (मक्ष) + \sqrt{-१}\ \psi\ (मक्ष).$$

तेरावा अध्याय.

गणितकृति सोपी करण्यासाठीं लाग्रतम कामांत आणण्याचा रितींविषयीं.

पूर्वींचा अध्यायामध्यें स्वाभाविक लाग्रतमाचा पर्याय दाखविला, त्यांत अंशाचे लाग्रतमांतून छेदाचें लाग्रतम वजा केल्यानें अपूर्णांकाचें लाग्रतम निघतें, या शिवाय दुसरी कांहीं सोपी रीति नाहीं. आणि तो पर्याय गणितकृति करण्याचें साधन आहे खरें, परंतु त्यांत वर सांगीतलेला कमीपणा आहे. उदाहरण, ·३ यांचें लाग्रतम काढण्याची या पुढील पेक्षां दुसरी कांहीं तोंकडी रीति नाहीं, ह्मणजे

लाग३–लाग१०अथवा १·०९८६१२२९–२·३०२५८५०९=–१·२०३९७२८०

३ चें लाग्रतम आणि·३,·०३,इत्यादि यांचीं लाग्रतमें यांमध्यें वरपेक्षां कांहीं अधिक स्पष्ट संबंध दिसून येण्याविषयीं दुसरा पर्याय काढितों.

$\text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{क्ष}$ याचा मुळरूप व्याख्यानापासून हें होतें

$$\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क्ष}} \qquad \text{अ} = \text{क्ष}^{\frac{1}{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क्ष}}}$$

तर याप्रमाणें होतें $\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क्ष}} = \text{ब}^{\text{लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$

परंतु $\text{ब} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{ब}} \qquad \therefore \text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{ब}\ \text{लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$

त्याच सारिखें $\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क}\ \text{लाग}_{\text{क}}\text{ब}\ \text{लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$

$$= \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{र}\ \text{लाग}_{\text{र}}\text{क}\ \text{लाग}_{\text{क}}\text{ब}\ \text{लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$$

हें शेवटील उत्तर या पुढीलप्रमाणें सिद्ध करितां येईल;

$$\text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{इ लाग}_{\text{इ}}\text{क लाग}_{\text{अ}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}} = \left\{\text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{इ}}\right\}^{\text{लाग}_{\text{इ}}\text{क लाग}_{\text{क}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$$

$$= \text{इ}^{\text{लाग}_{\text{इ}}\text{क लाग}_{\text{क}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}} = \text{क}^{\text{लाग}_{\text{क}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}} = \text{ब}^{\text{लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}} = \text{क्ष}$$

आतां, अ यास एकच अंक गणित रूप घातप्रकाशक लावितां येईल, जापासून क्ष असें उत्तर निघेल; कां कीं, शक्य असेल तर त्यास दोन घातप्रकाशक प आणि क आहेत असें मनांत आण, आणि $\text{अ}^{\text{प}}=\text{क्ष}$, $\text{अ}^{\text{क}}=\text{क्ष}$ असें घे, यावरून $\text{अ}^{\text{प}}=\text{अ}^{\text{क}}$, आणि $\text{अ}^{\text{प}-\text{क}}=१$; यामुळें $\text{प}-\text{क}=०$, अथवा $\text{प}=\text{क}$, ह्मणजे कल्पना केल्याप्रमाणें, प आणि क यांमध्यें कांहीं भेद नाहीं. यावरून,

$\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क्ष}} = \text{अ}^{\text{लाग}_{\text{अ}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}}$, असें असतां हें पुढील होतें,

$\text{लाग}_{\text{अ}}\text{क्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}}\text{क लाग}_{\text{क}}\text{ब लाग}_{\text{ब}}\text{क्ष}$ इ०. या पुढील एकरूप समीकरणाचे सहाय्याने हीं वरचीं उत्तरें स्मरणांत रहातील.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{अ}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$$

यापासून हा पुढील सिद्धांत होतो;

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{इ}}\frac{\text{इ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{फ}}\frac{\text{फ}}{\text{इ}}\frac{\text{इ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} \text{ इत्यादि}$$

जर प्रत्येक अपूर्णांकाचे जागीं त्याचे छेदाचे पायास त्याचे अंशाचें लाग्रतम घेऊन मांडिलें असतां, वरचे समीकरणाची श्रेणी खरी होईल.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}}$ याचे सहाय्यानें स्मरणांतर होतें कीं, $\text{लाग}_{\text{ब}}\text{अ लाग}_{\text{अ}}\text{ब} = \text{लाग}_{\text{अ}}\text{अ} = १$

अथवा $\qquad \text{लाग}_{\text{अ}}\text{ब} = \frac{१}{\text{लाग}_{\text{ब}}\text{अ}}$

हेंहि होतें

$$\text{लाग}_{\text{ब}}\ \text{अ} = \frac{\text{लाग}_{\text{अ}}\ \text{क्ष}}{\text{लाग}_{\text{अ}}\ \text{ब}}$$

अथवा; जा लाग्रतमांचा पाया अ आहे, अशा कांहीं दिलेल्या पर्यायास दुसऱ्या ब पायाच्या पर्यायांत रूपभेद करण्याकरितां, प्रत्येक दिलेल्या लाग्रतमास बचा दिलेल्या लाग्रतमानें भाग.

व्यवहारांत सर्व अपूर्णांकास दशांशअपूर्णांकांचें रूप देण्यास सोईस पडतें, तर जो पाया निवडून घेण्यास योग्य आहे, तो असा असावा कीं १०,१००, इत्यादि याचें लाग्रतम पूर्णांक असावें, ह्मणजे तो पाया १० असावा. कां कीं, अशा पक्षांत याप्रमाणें होईल,

लाग १०=१, लाग १००=२, लाग १०००=३, इत्यादि

आणि जर कोणत्याहि अंकाचें लाग्रतम दाखविण्यासाठीं प घेतला, ह्मणजे जर तो अंक २९ आहे, तर याप्रमाणें होईल

लाग २·९ = लाग २९—लाग १० = प—१
लाग ·२९ = लाग २९—लाग १०० = प—२
लाग ·०२९ = लाग २९—लाग १००० = प—३ इत्यादि
लाग २९० = लाग २९+लाग १० = प+१
लाग २९०० = लाग २९+लाग १०० = प+२ इत्यादि

तर अशानें, जेव्हां पाया १० आहे, तेव्हां अंकांत जर दशांशचिन्हाचा स्थळभेद झाला, तर लाग्रतमाला कांहीं पूर्णांक मात्र मिळवावे किंवा त्यांतून वजा करावे लागतील.

जा लाग्रतमाचे पर्यायाचा पाया १० आहे, तो पर्याय या पुढील समीकरणाचे सहाय्यानें स्वाभाविक पर्यायापासून काढिला आहे,

$$\text{लाग}_{१०}\text{क्ष} = \frac{\text{लाग}_e\ \text{क्ष}}{\text{लाग}_e\ १०} = \frac{\text{लाग}_e\ \text{क्ष}}{२\text{·}३०२५८५०९} = \text{लाग}_e\ \text{क्ष} \times \text{·}४३४२९४४८१९.$$

या लाग्रतमाचे पर्यायास **साधारण** किंवा **कोष्टकरूप** किंवा **दशांशरूप**, अथवा **ब्रिगसाहेबाचा** पर्याय असें ह्मणतात; आणि ·४३४२९...

यांस त्या पर्यायाचा **माड्यूलस** ह्मणतात; आणि सामान्यतः ज्या पर्यायाचा पाया अ आहे, त्याचा माड्यूलस १ ÷ लाग $_e$अ, अथवा लाग$_अ e$ आहे.

या अध्यायांत पुढें ज्या लाग्रतमाविषयीं विचार होईल, तीं सर्व साधारण लाग्रतमें आहेत असें मनांत ठेवावें.

सांगीतलेल्या अंकांचें लाग्रतम किंवा सांगीतलेल्या लाग्रतमापासून अंक कसे काढावे. हें दाखविण्यासाठीं लाग्रतमाचे कांहीं कोष्टकांची रचना दाखवितों.

१. लालांड साहेबाची रचना.

अंक	लाग्रतम	बाकी	अंक	लाग्रतम	बाकी
१०८०	३·०३३४२		१११०	३·०४५३२	
१०८१	३·०३३८३	४१	११११	३·०४५७१	३९
१०८२	३·०३४२३	४०	१११२	३·०४६१०	३९
१०८३	३·०३४६३	४०	१११३	३·०४६५०	४०
१०८४	३·०३५०३	४०	१११४	३·०४६८९	३९
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०

२. शेर्वीन हट्टन वाब्बेज, या तीन साहेबांची रचना.

अंक	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
५१५०	७११८०७२	८१५७	८२४१	८३२५	८४१०	८४९४	८५७८	८६६३	८७४७	८८३१	८४
१	८९१५	९०००	९०८४	९१६८	९२५३	९३३७	९४२१	९५०६	९५९०	९६७४	१ ८, २ १७
२	९७५९	९८४३	९९२७	००११	००९६	०१८०	०२६४	०३४९	०४३३	०५१७	३ २५, ४ ३४
३	७१२०६०१	०६८६	०७७०	०८५४	०९३९	१०२३	११०७	११९१	१२७६	१३६०	५ ४२, ६ ५०
४	१४४४	१५२८	१६१३	१६९७	१७८१	१८६५	१९५०	२०३४	२११८	२२०२	७ ५९, ८ ६७, ९ ७६
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	

बहुतकरून लाग्रतमांत कांहीं पूर्णांक, आणि त्याचे पुढें दशांश अपूर्णांक असे जोडिलेले असतात, ते दोन्ही किंवा त्यांतून एक ऋण अस-

तो; परंतु **बहुतकरून** कोष्टकांमध्यें **धन दशांश अपूर्णांक** यांशिवाय दुसरें मांडीत नाहीं. सर्व पक्ष घेऊन ही रचना कशी आहे हें आतां दाखवितों.

१. एक ऋण लाग्रतम घे, जसें — ३·१६८०४, हें या पुढील रूपाचें आहे, −३−·१६८०४, अथवा −४+(१−·१६८०४), अथवा −४+·८३१९६. असें लाग्रतम विशेषेंकरून याप्रमाणें मांडितात, $\overline{४}$·८३१९६ यांत, चोंहोंवर जें ऋणचिन्ह मांडिलें तें हें दाखवितें, कीं तो अंक मात्र ऋण आहे. **यावरून,** $\overline{१}$**३ यांचा अर्थ −१०+३, अथवा −७ आहे,** १$\overline{३}$६ **यांचा अर्थ १०६−३० अथवा ७६ आहे.** या रितीनें, प्रत्येक ऋण लाग्रतमाचा रूपभेद असा करितां येईल, कीं त्याचा दशांश भाग धन होईल.

२. लाग्रतमाचे दशांशाचा जो अंक आहे तो अंक कळल्यावर, सर्व लाग्रतमाचा अंक आहे तो त्वरेनें या पुढील कोष्टकावरून काढितां येईल.

लाग $\frac{१}{१०००}$ अथवा लाग $१०^{-३}$ = −३	लाग १० अथवा लाग $१०^{१}$ = १
लाग $\frac{१}{१००}$ अथवा लाग $१०^{-२}$ = −२	लाग १०० अथवा लाग $१०^{२}$ = २
लाग $\frac{१}{१०}$ अथवा लाग $१०^{-१}$ = −१	लाग १००० अथवा लाग $१०^{३}$ = ३

जसें, ·३०१०३ या लाग्रतमाचा अंक जवळ जवळ २ आहे; ह्मणजे, ·३०१०३ = लाग २; यामुळें, १·३०१०३ = लाग १० + लाग २ = लाग २०, $\overline{१}$·३०१०३ = लाग $\frac{१}{१०}$ + लाग २ = लाग $\frac{२}{१०}$ = लाग ·२, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

जर एकमापेक्षां कमी, कांहीं दशांश अपूर्णांक असेल, आणि त्यास दाखविण्यासाठीं **ड** घेतला, तर **३५९ पृष्ठावरून** हें कोष्टक होतें,

या खालीं सांगितलेल्या अंकांमधील अंकाचें लाग्रतम.	या खालचा अंकांमध्यें असावें.	आणि यामुळें तो अंक या खालचे रूपाचा असावा.	अशे अंकाचीं उदाहरणें.
$\frac{१}{१०००}$ आणि $\frac{१}{१००}$	−३ आणि −२	−३ + ड	·००१३, ·००९८
$\frac{१}{१००}$ आणि $\frac{१}{१०}$	−२ आणि −१	−२ + ड	·०१४, ·०७३८
$\frac{१}{१०}$ आणि १	−१ आणि ०	−१ + ड	·१०३, ·४२९६
१ आणि १०	० आणि १	० + ड	२·५६, ७·९९
१० आणि १००	१ आणि २	१ + ड	११·०३, ४५·९६
१०० आणि १०००	२ आणि ३	२ + ड	१५९, १५९·१०८
इ०	इ०	इ०	इ०

व्याख्यान. साधारण लाग्रतमाचा पूर्ण भाग, तो धन असो किंवा ऋण असो, त्यास त्या लाग्रतमाचा **गुणप्रकाशक** ह्मणतात; आणि त्याचा दशांशभागास **मान्टिस्सा** ह्मणतात. जें पूर्वीं सांगीतलें त्यापासून जे सिद्धांत स्पष्ट निघतात, त्यांतून कांहीं सांगतों.

१. (जा लाग्रतमांत ० सुद्धां पूर्णांक येतो) त्यांत दशांश चिन्हाचे स्थळाचा कसाहि भेद केल्यानें लाग्रतमाचा **मान्टिस्सा**मध्यें कांहीं भेद होत नाहीं, परंतु त्याचे **गुणप्रकाशकां**मध्यें मात्र भेद होतो.

२. जेव्हां अंकाचे दशांश चिन्हाचे **पूर्वीं** अर्थरूप अंक **येतात**, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक, **धन** आहे, आणि तो त्या **अंकस्थळांचे संख्येंत एक एकं कमी इतका असतो.** जसें, १२३४५·६७ यांचें लाग्रतम ४+ **मान्टिस्सा आहे;** ६·९ यांचें लाग्रतम ०+ **मान्टिस्सा** आहे.

३. जेव्हां दशांशचिन्हाचे पूर्वीं अर्थरूप अंक येत **नाहींत**, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक ऋण आहे, आणि पहिल्ये अर्थरूप अंकाचे पूर्वीं जितकी ० स्थळांची संख्या येती, त्यापेक्षां **एक अधिक** इतका गुणप्रकाशक असतो. जसें, ·०००८३ यांचें लाग्रतम−४+ **मान्टिस्सा** आहे आणि ·८३ यांचें लाग्रतम−१+ **मान्टिस्सा** आहे.

सांगीतलेला अंक पूर्णांक आहे असें कल्पून, लालांड साहेबाचा कोष्टकांत लाग्रतमाचे आंकडे दिलेले असतात; जसें १०८१ यांचें लाग्रतम ३·०३३८३ असें आहे. परंतु त्या कोष्टकांतून १·०८१ यांचें लाग्रतम काढायाचें असेल, तर ·०३३८३ हा मान्टिस्सा मात्र घ्यावा,

आणि त्याला ० प्रकाशक जोडावा. जसें, १·०८१ यांचें लाग्रतम ०·०३३८३ आहे, आणि वर सांगितलेल्या रितीवरून हा पुढील कोष्टक होतो;

लाग १०८१००० = ६·०३३८३	लाग १·०८१ = ०·०३३८३
लाग १०८१०० = ५·०३३८३	लाग ·१०८१ = $\bar{\text{१}}$·०३३८३
लाग १०८१० = ४·०३३८३	लाग ·०१०८१ = $\bar{\text{२}}$·०३३८३
लाग १०८१ = ३·०३३८३	लाग ·००१०८१ = $\bar{\text{३}}$·०३३८३
लाग १०८·१ = २·०३३८३	लाग ·०००१०८१ = $\bar{\text{४}}$·०३३८३
लाग १०·८१ = १·०३३८३	लाग ·००००१०८१ = $\bar{\text{५}}$·०३३८३

दुसरे कोष्टकांत ७. अंकस्थळांचे अंकांचीं लाग्रतमें आहेत. पहिल्ये कोष्टकांतून ५१५३ आणि ५१५४, अथवा ५१५३० आणि ५१५४० यांचींहि लाग्रतमें काढितां येतील; कां कीं त्यांत केवळ गुणप्रकाशकाचा मात्र भेद आहे; परंतु या दोन शेवटील अंकांमध्यें जे अंक येतात त्यांचीं लाग्रतमें ह्मणजे ५१५३१,५१५३२,....५१५३९ यांचीं लाग्रतमें दुसऱ्ये कोष्टकांतून काढितां येतील.

आतां लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जेव्हां एकादे संख्येमध्यें एक अंक बदल होतो, तेव्हां लाग्रतमांतील जो पहिल्यानें अंक बदल होतो तो अंक संख्येंतील बदललेल्ये अंकाप्रमाणें डाव्येकडे जवळ किंवा दूर जाईल. ही गोष्ट या ह्मणण्याप्रमाणें आहे, कीं सर्व अंकाचे प्रमाणाशीं जितका अंकाचा फेर लहान आहे, तितका लाग्रतमांमध्यें फेर लहान होईल, आणि ही गोष्ट या पुढील सिद्धांतावरून दाखवितां येईल. ३६३ आणि ३७५ पृष्ठांवरून १+क्ष यांचें साधारण लाग्रतम (म = ·४३४२९....) हे घेऊन,

$$\text{लाग } \text{१}+\text{क्ष} = \text{लाग क्ष}+\text{२म}\left(\frac{1}{\text{२क्ष}+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\text{२क्ष}+1)^3}+\text{इत्यादि}\right) \text{ आहे,}$$

यामुळें लाग १+क्ष होण्यासाठीं जें कांहीं लाग क्षमध्यें मिळवावें लागतें तें जसजसा क्ष मोठा होत जातो, तसें तें मिळवायाचें कमी होतें. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणांपासून स्पष्ट होईल, त्यांत जा अंकाचा बदल होतो, त्यास (ʹ) या चिन्हानें खुणाविला आहे. वेगळेवेगळे अंक

आणि त्यांचीं लाग्रतमें पहिल्यानें मांडिलीं आहेत, आणि त्यांचे उजवे बाजूस पहिल्ये कोष्टकांत फेर केलेल्या अंकाचे मूळचे संख्येशीं जें प्रमाण होतें तें मांडिलें आहे ; आणि दुसऱ्या कोष्टकांत एकंमाच्या केवढा फेर लाग्रतमामध्यें होतो, तो सुमारानें मांडिला आहे.

	मूळचे सर्व अंकांशीं फेराचें प्रमाण.	लाग्रतमांतील खरा फेर.
लाग १′ =०·००००००० लाग २′ =०·३०१०३००	१	$\frac{1}{3}$
लाग १०′ =१·००००००० लाग ११′ =१·०४१३९२७	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$
लाग १००′ =२·००००००० लाग १०१′ =२·००४३२१४	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{250}$
लाग १०००′ =३·००००००० लाग १००१′ =३·०००४३४१	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{2500}$
लाग १००००′ =४·००००००० लाग १०००१′ =४·०००४३४	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{25000}$
लाग १०००००′ =५·००००००० लाग १००००१′ =५·००००४३	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{250000}$

यावरून, सुमारानें, लाग्रतमाचे मान्टिसामध्यें जो खरा फेर पडतो तो त्याचे बरोबरीचे अंकांतील फेराचे अर्धापेक्षां कांहीं कमी असतो, ही गोष्ट शिकणारानें वर दिलेल्या श्रेणीपासून काढायास यत्न करावा. जसें, जर कांहीं अंक त्याचे सहस्रांशानें वाढतो, तर लाग्रतमाची वाढ $\frac{1}{2000}$ या अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल, आणि याप्रमाणें पुढें हि. यावरून, कोणत्याहि कोष्टकांत लाग्रतमाचीं अंकस्थळें किती काढायाचें अगत्य आहे तें पुरतेपणीं कळेल. ह्मणजे मनांत आण, कीं असा एक कोष्टक करायाचा आहे, जांत १०००० पासून ९९९९९ पर्यंत प्रत्येक पांच स्थळांचा अंक यावा. कोष्टकाचें शेवटीं अंकाचा फेर सुमारानें $\frac{1}{100000}$ होतो, आणि यामुळें लाग्रतमाची खरी वाढ $\frac{1}{250000}$, अथवा ·००००००४ आहे. यामुळें लाग्रतमाचीं अंकस्थळें सहा अगत्य

असावीं. सहा स्थळांपेक्षां कमी असलीं, तर फेर दिसून येणार नाहीं; उदाहरण,

लाग ९९८४६ = ४·९९९३३०७

लाग ९९८४७ = ४·९९९३३५०

या दोन लाग्रतमांमध्यें साहाव्ये स्थळीं मात्र भेद आहे. कोष्टकाचे आरंभीं अंकांची वाढ $\frac{१}{१००००}$ यापेक्षां किंचित् अधिक आहे, आणि लाग्रतमाची खरी वाढ ·००००४ जवळ जवळ आहे, तेथें पांच अंकस्थळें पुरेशीं होतील. परंतु व्यवहाराचे सोयीसाठीं, सर्व कोष्टकांत अंकस्थळें सारिखींच असलीं पाहिजेत, यामुळें थोडीं तरी साहा अंकस्थळें असावीं. वरचा दुसऱ्या कोष्टकांत अंकांचीं पांच स्थळें आहेत, आणि त्यांचे समोर लाग्रतमाचीं सात स्थळें आहेत. परंतु लाग्रतमाचीं पहिलीं तीन स्थळें कांहीं वेळापावेतों सारिखींच रहातात,यासाठीं, अद्यापि कोष्टकामध्यें फेर पुष्कळ होतो, तथापि जा जागीं फेर होतो, त्या जागीं ते अंक पहिल्या ओळींत मांडिलेले असतात; येणेकरून पुष्कळ जागा वांचती, परंतु तशे रचनेपासून, हींच अडचण होती, कीं लाग्रतमाचे तिसऱ्या अंकाचा फेर ओळीचे प्रारंभींच क्वचित पडतो, तर तिसरा नवा अंक पहिल्यानें दृष्टीस पडे तोंपर्यंत मांडितां येत नाहीं. हीं पुढील उदाहरणें जीं दुसऱ्या कोष्टकांतून काढिलीं आहेत, तीं या कोष्टकाची रचना आणि ही नवी अडचण, शब्दांनीं सांगितल्यापेक्षां अधिक चांगली दाखवितील.

अंकसंख्या.	लाग्रतमाचा मानूटिस्सा.	अंकसंख्या.	लाग्रतमाचा मानूटिस्सा.
५१५२०	·७११ ९७५९	५१५२६	·७१२ ०२६४*
५१५२१	·७११ ९८४३	५१५२७	·७१२ ०३४९*
५१५२२	·७११ ९९२७	५१५२८	·७१२ ०४३३*
५१५२३	·७१२ ००११*	५१५२९	·७१२ ०५१७*
५१५२४	·७१२ ००९६*	५१५३०	·७१२ ०६०१
५१५२५	·७१२ ०१८०*	५१५३१	·७१२ ०६८६

* या सर्वांत मानूटिस्साचे पहिले तीन अंकाविषयीं खालीं पाहिलें पाहिजे.

या कोष्टकांत पहाण्यांत येईल, कीं प्रत्येक लाग्रतम आणि त्याचे पूर्वींचें लाग्रतम यांचें अंतर ·००००००८३ किंवा ·००००००८४ किंवा ·००००००८५ आहे. सारांश, ५१५२० आणि ५१५२०+१० यांचे लाग्रतमांचें अंतर ·०००००८४२ आहे, ह्मणजे जशी अंकसंख्या क्रमाने एकएक वाढत जाती, तशी लाग्रतमांची मध्यम वाढ ·००००००८४ इतकी होती. यावरून, ५१५२० या अंकाचे जागीं आणि त्याचे जवळचे अंकाचे जागीं हीं पुढील समीकरणें होतात;

लाग (५१५२०+१) = लाग ५१५२०+·००००००८४

लाग (५१५२०+२) = लाग ५१५२०+·००००००८४×२

अथवा जर १० पेक्षां ह अधिक नसेल, तर

लाग (५१५२०+ ह) = लाग ५१५२०+·००००००८४×ह ··(अ)

अथवा कोष्टकांतील लहान भागाविषयीं, जेव्हां अंकसंख्या एकएकानें वाढत जातात, तेव्हां त्यांचीं लाग्रतमें जवळ जवळ गणितश्रेढीप्रमाणें वाढत जातात. आतां ३६३ आणि ३७६ पृष्टांवरून म = ·४३४२९... असें असून,

$$\text{साधारण लाग } \left(१+\frac{ह}{क्ष}\right) = म \left(\frac{ह}{क्ष} - \frac{१}{२}\left(\frac{ह}{क्ष}\right)^२ + \frac{१}{३}\left(\frac{ह}{क्ष}\right)^३ - \text{इत्यादि}\right)$$

$$= म\frac{ह}{क्ष}, \text{ फार जवळ, जेव्हां } \frac{ह}{क्ष} \text{ लहान आहे}$$ ३१५ पृष्ट पहा

अथवा लाग (क्ष+ह) = लाग क्ष+ म $\frac{ह}{क्ष}$, फार जवळ जवळ,

हें समीकरण आणि वरचें (अ) समीकरण हीं एक रूपाचीं आहेत; यावरून जेव्हां ह = १० आहेत, तेव्हां जर (अ) जवळ जवळ खरें आहे, तर जेव्हां ह अपूर्णांक आहे, तेव्हां (अ) अगत्य अधिक खरें असावें. यावरून या पक्षांत याप्रमाणें होतें,

क्ष = ५१५२० आणि $\frac{म}{क्ष}$ अथवा $\frac{·४३४२९४५}{५१५२०}$ = ·००००००८४

लाग ५१५२० $\frac{१}{२}$ = लाग ५१५२०+·००००००८४× $\frac{१}{२}$

लाग ५१५२०·३६ = लाग ५१५२०+००००००८४×·३६

कोष्टकांत जा ओळीवर बाकी मांडिली असती, ती या कामासाठीं

आहे, कीं जेव्हां साहा किंवा सात स्थळांपर्यंत लाग्रतम काढायाचें इच्छिलें आहे, तेव्हां वरचे समीकरणांत जो गुणाकार करावा लागतो, तो त्वरेनें करितां यावा. त्या ओळींत ८४ चे दशांशांचे जवळचे पूर्णांक लिहिले आहेत; जसें,

८४ यांचा एक दशांश = ८·४, याचे जवळचा पूर्णांक = ८ आहे
८४ यांचे दोन दशांश = १६·८ . . . . १७ आहे
८४ यांचे तीन दशांश = २५·२ . . . . २५ आहे

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ८४ चे दशांशांतून एक अंक कापून टाकिल्याने त्यांचे शतांश काढितां येतात, परंतु टाकिलेला अंक ५ अथवा पांचांचे वर असेल, तर बाकीचा अंक एकानें वाढवावा,
जसें,

८४ यांचा एक शतांश जवळ जवळ= ·८, याचे जवळचा पूर्णांक =१आहे
८४ यांचे दोन शतांश . . . . . = १·७, याचे जवळचा पूर्णांक =२आहे
८४ यांचे तीन शतांश . . . . . = २·५, याचे जवळचा पूर्णांक = ३ आहे

आणि या प्रमाणें पुढेंहि. यावरून बाक्यांची ओळ पहाण्यानें बाकीचे दशांश आणि शतांश लागलेच कळतात. आतां ३७६ पृष्ठावरचे दुसऱ्या कोष्टकापासून ५१·५३९४६ यांचे लाग्रतम काढितो.

या अंकसंख्येचा लाग्रतमाचा मान्टिस्सा, आणि ५१५३९·४६ यांचे लाग्रतमाचा मान्टिस्सा सारिखाच आहे, आणि

लाग (५१५३९×·४६)=लाग ५१५३+·०००००८४×·४६

$$=\text{लाग } ५१५३९+·०००००८४\left(\frac{४}{१०}+\frac{६}{१००}\right)$$

परंतु

$$·०००००८४\left(\frac{४}{१०}+\frac{६}{१००}\right)= ·०००००००१\left(\frac{४}{१०}\times ८४+\frac{६}{१००}\times ८४\right)$$

कोष्टकांतून $= ·०००००००१(३४+५)$

·१, ·०१, ·००१, इत्यादि यांणीं, जर कोणताहि पूर्णांक गुणायाचा असेल, तर पूर्णांकाचा एकं स्थळींचा अंक दशांशाचें पहिलें किंवा दुसरें किंवा तिसरें इत्यादिस्थळीं मांडावा लागतो; यावरून हें होतें,

कोष्टकांतून लाग ५१५३९ यांचा मान्टिस्सा .... =	·७१२१३६०
९ चे पुढें जो ४ अंक येतो, त्यासाठीं मिळवायाचें .. =	३४
आणि ४ चा पुढें जो ६ अंक येतो .... =	५
बेरीज =	·७१२१३९९

ही बेरीज ५१५३९·४६ यांचे लाग्रतमाचा मान्टिस्सा आहे, आणि ५१·५३९४६ यांचा लाग्रतमाचा मान्टिस्साहि तोच आहे; यामुळें, या शेवटील अंकाला योग्य गुणप्रकाशक लावला असतां, याप्रमाणें होईल

लाग ५१·५३९४६ = १·७१२१३९९

तशेच रितीवरून, हीं पुढील उदाहरणें निघतात,

लाग ·५१५२७४८?

लाग ·५१५२७	$\bar{1}$·७१२०३४९
४	३४
८	७
लाग ·५१५२७४८	$\bar{1}$·७१२०६९०

लाग ५·१५०००८?

लाग ५·१५००	०·७११८०७२
०	००
८	७
लाग ५·१५०००८	०·७११८०७९

लाग ५१५२७६८०००?

लाग ५१५२७०००००	९·७१२०३४९
६	५०
८	७
लाग ५१५२७६८०००	९·७१२०४०६

लाग ·००००५१५४८९९

लाग·००००५१५४८	$\bar{5}$·७१२२११८
९	७६
९	८
लाग·००००५१५४८९९	$\bar{5}$·७१२२२०२

या प्रश्नाचें उलटें या पुढीलप्रमाणें करितात; मनांत आण, कीं $\bar{1}$·७११८३६६ या लाग्रतमाचा बरोबरीची अंकसंख्या कोष्टकांतून काढायाची आहे. गुणप्रकाशक सोडून कोष्टकांतून जो मान्टिस्सा ·७११८३६६ यांचे जवळ असून, त्याहून कमी आहे त्यास शोधून काढितों. तर दिसण्यांत येतें, कीं तो मान्टिस्सा ·७११८३२५ हा आहे, याची अंकसंख्या ५१५०३ आहे; यावरून अर्थ अंकांविषयीं इच्छिलेली अंकसंख्या ५१५०३ यांपासून एक एकंमाचे आंत इतकी आहे. तो इच्छिला अंक ५१५०३+ह असा घे, तर ठाऊक आहे, कीं ह असा घेतला पाहिजे, कीं

लाग (५१५०३+ह) =४·७११८३६६

परंतु ३८२ पृष्ठावरून

लाग (५१५०३+ह)=लाग ५१५०३+·००००० ८४×ह फार जवळ.

=४·७११८३२५+·००००० ८४×ह

याबरून,

$$ह = \frac{४·७११८३६६-४·७११८३२५}{·००००००८४} = \frac{·००००००४१}{·००००००८४} = \frac{४१}{८४}$$

आतां, कोष्टकांतल्ये बाकीचे ओळींत पहाण्यांत येतें, कीं

३४ हे ८४ चे $\frac{४}{१०}$ चे जवळ आहेत,

७६ हे ८४ चे $\frac{८}{१०}$ अथवा,

७ हे ८४ चे $\frac{८}{१००}$ चे जवळ आहेत;

ह्मणून ३४+७ अथवा ४१ हे ८४ चे $\frac{४}{१०}+\frac{८}{१००}$; ह्मणजे $\frac{४१}{८४}$=·४८=ह;

यावरून ५१५०३+ह=५१५०३·४८ आणि

४·७११८३६६ हें ५१५०३·८४ यांचें लाग्रतम आहे

$\bar{१}$·७११८३६६ हें ·५१५०३८४ यांचें लाग्रतम आहे

परंतु लाग्रतम काढण्याची जी रीति आहे, तिचे उलट कृती केल्यानें व्यवहार कामासाठीं फार सोईस पडतें. आतां कोष्टकाचे दुसऱ्ये भागांतून एक उदाहरण सांगतों.

२१७४८३·६ यांचें लाग्रतम काय आहे.

लाग २१७४८	(*)		५·३३७४१९३
३			६०
६	(†)		१२
लाग २१७४८३६	=		५·३३७४३६५

* पहा यांत एकदांच गुणप्रकाशक मांडिला आहे.

† पूर्वीप्रमाणें, एथें ६चे समोर पाहिलें असतां, १२० दिसतात, त्यांतून एक अंक सोडून देतों.

५·३३७४२६५ या लाग्रतमाचा बरोबरीची अंक संख्या काय आहे?

कोष्टकांत यांचे जवळचें लातग्रम जाची अंकसंख्या	२१७४८	·३३७४२६५
		·३३७४१९३
	वजाबाकी	७२

कोष्टकांत अंतरांचे ओळींत, या बाकीचे जवळचा अंक जाचे समोर ३ आहेत ६०

१२०

बाकीवर०मांड, कांकीं एक अंक सोडिला होता, यामुळें एक अंक, वर मांडिला पाहिजे,*परंतु तो अंक कोणता हें माहित नाहीं. कोष्टकांत १२० यांचे समोर ६ हा अंक आहे.

यामुळें ५ गुणप्रकाशक आहे ह्मणून दशांश चिन्हा पूर्वीं ६ अंकस्थळें असावीं, तर सांगितलेल्या लाग्रतमाचा बरोबरीचा इच्छिला अंक २१७४८३·६ आहे.

१. कोष्टकांतील बाकीची ओळ एकदां कामांत आणिल्यानंतर, शेवटीं जी वजाबाकी येती तिला, एक अंक कशासाठीं जोडिला पाहिजे. २· तो अंक काय आहे हें कशासाठीं समजूं शकत नाहीं. ३. ०खरें होईल असें कशानें घडेल. जर कित्येक लाग्रतमें काढून नंतर प्रत्येकाची उलट कृती केली तर, ही गोष्ट शिकणाराचे मनांत अधिक ठसेल. ११५ आणि १२५ जांचें मध्यप्रमाण १२० आहे त्यांचे कोष्टकांतील वजाबाकीचें उत्तर कदाचित् वर निघालेलें १२, असेल. वरचे कृतीचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

---

* याविषयीं जें पुढें येईल तें पहा.

$\overline{२}$·११८३२१४ आणि $\overline{१}$·९६४८३१७ या लाग्रतमाचा अंकसंख्या काय आहेत?

	·११८३२१४			·९६४८३१७
१३१३१	·११८२९७८		९२२२१	·९६४८२९८
	२३६			१९
७	२३२		४	१९
	४०			०
१	३३			
उत्तर. ·०१३१३१७१			उत्तर. ९२·२२१४०	

$\overline{२}$·९ अशो तऱ्हेचें परिमाणाचे गुणाकार आणि भागाकार शिकणारांस करण्यासाठीं कदाचित् येतील. या परिमाणांस ५नीं गुणायाचें असेल, तर जे हातचे येतील ते बीजगणिताचे मिळवणीचे रितीप्रमाणें ऋण परिमाणास मिळीव. जसें, ५वेळा ९हे ४५, यावरचे ५ मांडून हातीं ४ घे; ५वेळा −२ हे −१० आहेत, आणि ४ मिळून −६ होतात, तर $\overline{६}$·५ हें उत्तर आहे. अथवा

$$५(·९-२)=४·५-१०=४-१०+·५=\overline{६}·५$$

$\overline{२}$·९ यांस ५नीं भागायाचें असेल, तर ऋण पद ५नीं भागिलें जाईं असें कर, आणि तितक्यानें पदाची बाकी वाढवून नीट कर. जसें, $\overline{२}$·९ हे $\overline{५}$+३·९ आहेत, आणि

$$\frac{\overline{२}·९}{५}=\frac{\overline{५}}{५}+\frac{३·९}{५}=\overline{१}+·७८=\overline{१}·७८$$

हीं पुढील कांहीं दुसरीं उदाहरणें आहेत;

$\overline{३}$·४६	$\overline{१}$·४१७
८	१०
६)$\overline{२१}$·६८	५)$\overline{६}$·१७०
$\overline{४}$·६१३	$\overline{२}$·८३४

गुणाकार आणि भागाकार यांविषयीं लाग्रतमें कामांत आणण्याचीं हीं पुढील उदाहरणें देतों. ·५७२९५७८ यांस २०·६२६४८ यांणीं

गुणिलें असतां, आणि तो गुणाकार ७८५३९८२ यांणीं भागिला असतां, नंतर भागाकाराचा नऊ घात केला असतां, आणि त्या घाताचें दशघात मूळ काढिलें असतां, उत्तर काय येईल? अथवा हें पुढील काय होईल,

$$\left\{\frac{\cdot५७२९५७८\times२०\cdot६२६४८}{७८५३९८२}\right\}^{\frac{९}{१०}}$$

लाग ·५७२९५७८		$\bar{१}$·७५८१२२६
लाग २०·६२६४८		१·३१४४२५१
	बेरीज	१·०७२५४७७
लाग ७८५३९८२		६·८९५०८९९
	वजाबाकी	$\bar{६}$·१७७४५७८
		९
	१०)	$\overline{५३}$·५९७१२०२
		$\bar{६}$·७५९७१२०
	५७५०५	·७५९७०५६
		६४
	८	६०
		४०
	५	३८
उत्तर,	·००००५७५०५८५	

शिकणारानें अभ्यासाकरितां या पुढीलप्रमाणें समीकरणाची सत्यता दाखवायासाठीं उदाहरणें करावीं, ह्मणजे जसा अ (अ+ब) = $अ^२$ + अब, जांत अ आणि ब कांहीं अंक असतील. अ आणि अ+ब यांचीं लाग्रतमें मिळवून त्यापासून अ(अ+ब) यांची किंमत निघती, आणि त्यापासून $अ^२$ आणि अब यांची निराळी किंमत काढावी; आणि जर सगळी कृती शुद्ध केली असेल, तर शेवटील पदांची बेरीज पहिल्या पदाचे बरोबर, होईल.

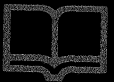
$$(अ+ब)\,(अ-ब) = अ^2-ब^2$$

$$\sqrt{अब} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब}$$

$$(अब)^{\frac{म}{न}} = अ^{\frac{म}{न}} \times ब^{\frac{म}{न}}$$

लाग्रतमानें चुकीवांचून काम करणें याविषयीं शिकणारा केवळ अभ्यासानें मात्र निपुण होईल, आणि व्यवहारांतील जे सर्व पक्ष येतात यांचीं विस्ताररूप उदाहरणें लाग्रतमाविषयींचा पुस्तकांत आहेत.

समाप्त.



शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
१४	८	पद्धती	पद्धति
१४	१७	पद्धती	पद्धति
२१	१४	पद्धती	पद्धति
२२	६	रिती	रीति
२४.	१४	पद्धती	पद्धति
३४	८	अ+ब)(क−ड)	(अ+ब)(क−ड)
४१	२२	मागाकार	भागाकार
४६	४	$\frac{\text{२अअ+अब}}{\text{अ+ब}}$	$\frac{\text{२अअ+बब}}{\text{अ+ब}}$
७९	२१	समीकरणाचें	समीकरणांचें
८९	२३	पाण्याचें	पाण्याचे
९६	१७	−४०(−क्ष)	−४०(९−क्ष)
१०६	१५	घोड्याचें	घोड्यांचें
१३१	२	−ट+क्ष	−ट+ज्ञ
१३६	११	तर अ	तर−अ
१४४	१४	३(६०+क्ष)	$\text{३(६०}\pm\text{क्ष}^{२}\text{)}$
१५५	१४	अक्ष+बय+कज्ञ	$\text{अक्ष+ब}\bar{\text{य}}\text{+क}\bar{\text{ज्ञ}}$
१६३	५	$\frac{\text{२}-\text{४}}{\text{२}\times\text{२}-\text{४}\times\text{४}}$	$\frac{\bar{\text{२}}-\text{४}}{\text{२}\times\text{२}-\text{४}\times\text{४}}$
२११	१०	$\underline{(-\text{१})^{\text{२}}+\text{२}(-\text{१})(\sqrt{-\text{३}})+(\sqrt{-\text{३}})^{\text{२}}}$	$\frac{(-\text{२})^{\text{२}}+\text{२}(-\text{१})(\sqrt{-\text{३}})+(\sqrt{-\text{३}})^{\text{२}}}{\text{४}}$
२१६	१०	$(\text{अ}+\sqrt{\text{य}})^{\text{२}}$	$(\text{क्ष}+\sqrt{\text{य}})^{\text{२}}$
२१८	२२	अद्यपि	अद्यापि
२२२	११	$(\text{प}^{-\text{२}}\text{क्र}^{-\text{१}})^{\frac{\text{१}}{\text{३}}}$	$(\text{प}^{-\text{२}}\text{क्र}^{-\text{१}})^{-\frac{\text{१}}{\text{३}}}$
२२३	७	$\sqrt{\text{३}}\ \text{७}$	$\sqrt{\frac{\text{३}}{\text{७}}}$
२२४	११	आद्यापि	अद्यापि
२२६	५	दर्शावयाचो	दर्शवायाची
२५३	५	$\frac{-(\text{प}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}})\pm\sqrt{\text{५प}^{\text{४}}-\text{४प}^{\text{३}}\text{क}+\text{२प}^{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{३}}}}{\text{२प}-\text{क}}$	$\frac{-(\text{प}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}})\pm\sqrt{\text{५प}^{\text{४}}-\text{४प}^{\text{३}}\text{क}+\text{२प}^{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{४}}}}{\text{२(प}-\text{क)}}$
२७३	८	याणायाला	आणायाला

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
३०२	१९	(अ)-क्ष³(ब)	(अ)= क्ष³(ब)
३१८	२२	च	चे
३१८	२९	सात	सांत
३२०	४	घ	घे
३२२	१७	$१\div१+\text{क्ष}^२$	$१\div(१+\text{क्ष}^२)$
३२२	१९	$\frac{१}{१\div\text{क्ष}^२}$	$\frac{१}{१+\text{क्ष}^२}$
३२३	२३	$(\frac{\text{मक}}{\text{प}^३}-\frac{\text{कन}}{\text{प}^२})\text{क्ष}^२$	$(\frac{\text{मक}^२}{\text{प}^३}-\frac{\text{कन}}{\text{प}^२})\text{क्ष}^२$
३२७	१९	+ होतो	१ होतो
३२८	१५	$(\text{क्ष}-\text{क्ष}^२+१)$	$\text{क्ष}^२-\text{क्ष}+१$
३२८	१९	$=\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१}$	$=\frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}}$
३२८	२३	$=\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१}$	$=\frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}^२}$
३३३	२०	$-\frac{१}{१}$	$-\frac{१}{२}$
३३५	१०	चिन्हें	चिन्ह
३३६	२	व	ϕब
३४१	१७	अपूर्णांक	पूर्णांक
३५७	४	फाकटर	फाक्टर
३६७	७	फ(क्ष-य)	फ(क्ष+य)
३६७	२०	$-२\text{अ}_३\text{ब}$	$-२\text{अ}_३\text{ब}^३$
३६८	१३	$\frac{\text{क्ष}^३}{२.३.४}-\frac{\text{क्ष}^४}{२.३.४.५.६}$	$\frac{\text{क्ष}^४}{२.३.४}-\frac{\text{क्ष}^६}{२.३.४.५.६}$
३६९	१४	ϕ२क्ष	ϕ(२क्ष)
३७५	१	$\text{लाग}_\text{ब}\text{अ}$	$\text{लाग}_\text{ब}\text{क्ष}$
३८३	२०	लाग ५१५३+	लाग ५१५३९+
[illegible]	१२	लाग २१७४८३६	लाग २१७४८३·६